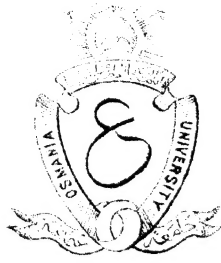


UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224528

UNIVERSAL
LIBRARY



نصاب سلسلہ امتحان جامعہ عثمانیہ

محرومی تراشیں

تصنیف

چارلس اسمتھ ایم۔ اے

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتہ تالیف ترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

۱۳۶۰ھ - ۱۳۵۰ھ - ۱۹۳۱ء

الطبع من جامعہ عثمانیہ عظیمہ لاہور

یہ کتاب نیکلسن کمپنی کی اجازت سے جن کو حق اشتا
حاصل ہے اُردو میں ترجمہ کر کے
طبع و شائع کی گئی ہے

فہرست مضامین

مخروطی تراشیں

صفحہ	مضمون
۱	پہلا باب - محدود
۲۳	دوسرا باب - خطِ مستقیم
۷۶	دوسرے باب پر مثالیں
۸۳	تیسرا باب - محوروں کی تبدیلی - غیر موسیقی نسبتیں یا چلیبی نسبتیں - دریچ
۱۰۲	چوتھا باب - دائرہ
۱۴۴	چوتھے باب پر مثالیں
۱۵۱	متفرق مثالیں (۱)
۱۵۵	پانچواں باب - قطع مکانی

صفحہ	مضمون
۱۸۵	لغات
۱۹۲	پانچویں باب پر مثالیں
۲۰۳	چھٹا باب - قطع ناقص
۲۳۸	چھٹے باب پر مثالیں
۲۶۰	ساتواں باب - قطع زائد
۲۸۴	ساتویں باب پر مثالیں
۲۹۰	متفرق مثالیں (۲)
۲۹۶	آٹھواں باب - مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو۔
۳۰۹	آٹھویں باب پر مثالیں
۳۱۵	نواں باب - درجہ دوم کی عام مساوات
"	ہر منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ کی ہو ایک مخروطی ہوتا ہے۔
۳۱۸	ایک مخروطی کے مرکز کے محدود
۳۲۰	ممیز
"	ایک مرکز دار مخروطی کے محوروں کا محل اور مقدار
۳۲۲	ایک مکانی کا محور اور وتر خاص
۳۲۳	مخروطیوں کو مرتسم کرنا
۳۲۷	مخروطی کے متعارفوں کی مساوات
۳۲۹	قائم زائد کے لیے شرط

صفحہ	مضمون
۳۳۱	نویں باب پر مثالیں
۳۳۵	دسواں باب - متفرق مسئلے
"	مخروطی کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات
۳۳۷	وہ شرط کہ ایک دیا ہوا خط مستقیم ایک مخروطی کا مماس ہو سکے
۳۳۸	ایک مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کی مساوات
۳۴۰	مزدوج نقطہ اور مزدوج خط
"	ایک مخروطی کا کوئی وتر ایک نقطہ اور اس کے قطبی سے
۳۴۱	مستقیم طور پر منقطع ہوتا ہے
۳۴۳	ایک مخروطی کے قطر
"	وہ شرط کہ دو دیے ہوئے خط مزدوج قطروں کے متوازی ہوں
۳۴۵	ایک مخروطی کے مساوی مزدوج قطر
۳۴۶	ایک مخروطی کے وتروں کے قطعے
"	س۔ لہ مے = ۷، س۔ لہ عو = ۷، اور س۔ لہ ع = ۷۔
۳۴۹	سے مراد
۳۵۳	کسی نقطہ سے مماسوں کے ایک زوج کی مساوات
۳۵۵	ایک وتر کے سروں کے مماسوں کی مساوات
۳۵۶	مرتب دائرہ کی مساوات
۳۵۷	ایک مخروطی کے چار ماسکے
۳۵۹	ایک مخروطی کے خروج المکز
۳۶۰	ماسکے اور مرتب
۳۶۸	محوروں کی مساوات
۳۷۰	ایک مخروطی کی مساوات بجا لہ مماس اور عماد

صفحہ	مضمون
۳۷۳	عام
۳۷۷	متشابه منحنی
۳۸۶	دسویں باب پر مثالیں
۴۰۳	گیارہواں باب - مخروطیوں کے نظام
۴۰۵	ایک مخروطی پانچ نقطوں میں سے
۴۰۶	ایک مخروطی چار نقطوں میں سے
۴۰۸	دو مکافی چار نقطوں میں سے
"	چار نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کا مرکز طریق
	ایک چار زاویوں کے وتر نقطہ ایک ایسے مثلث کے
	راس ہوتے ہیں جو کسی حائل مخروطی کے لحاظ سے
۴۱۳	خود قطبی ہو۔
	ایک چار زاویوں کے وتر ایک ایسے مثلث کے ضلع
	ہوتے ہیں جو کسی اندرونی مخروطی کے لحاظ سے
۴۱۴	خود قطبی ہو۔
۴۱۶	چار مشابہ خطوط کو س کرنے والے مخروطیوں کا مرکز طریق
۴۱۸	محوروں کے محوروں کو مس کرنے والا مکافی
۴۲۲	ہم ماسکی مخروطی
۴۳۵	لٹھی مخروطی
۴۴۷	کسی نقطہ پر دائرہ اسٹنٹا
۴۴۴	نویں باب پر مثالیں
۴۵۳	بارہواں باب - لفاف اور محاسی مساواتیں

صفحہ	مضمون
۴۵۳	لغاف
۴۵۸	ماسی محمد اور مساواتیں
۴۶۰	لغاف کا مرتب دائرہ
۴۶۲	لغاف کے ماسکے
۴۶۳	محوروں کے طول
۴۶۴	مخروطی ہم ماسکی جب کہ ف (ل، م) =
"	مخروطی ہم ماسکی جب کہ ف (لا، ما) =
۴۶۵	ماسی مساوات میں۔ لہٰذا = کا مفہوم
"	اُن مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق جچا ثابت خطوط مستقیموں کے
۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸	اُن مخروطیوں کے مرتب دائرے جو چار دیے ہوئے خطوط مستقیموں کے
۴۶۸	مس کریں ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔
۴۶۹	بارہویں باب پر مثالیں
۴۷۷	تیرہواں باب۔ سہ خطی محدود
"	سہ خطی محدودوں کی تعریف
۴۷۹	خطوط مستقیم
۴۸۸	چار نقطوں کے محدود شکل \pm ف، \pm گ، \pm ہ میں
۴۸۹	چار خطوط کی مساوات شکل ل \pm م، \pm ن، \pm ج میں
۴۹۲	مخروطی جو درجہ دوم کی عام مساوات سے حاصل ہوتے ہیں۔
۴۹۳	ماس اور قطبی
۴۹۶	ایک مخروطی کے مرکز کے محدود
"	ایک مکانی کے لیے شرط

صفحہ	مضمون
۴۹۷	شقارب
۴۹۹	قائم زائد کے لیے شرط
"	حائط دائرہ
۵۰۰	ایک دائرے کے لیے شرطیں
۵۰۲	ماسکے اور مرتب
۵۰۳	رقبئی محدود
۵۰۷	حائط مخروطی
۵۰۹	اندرونی مخروطی
۵۱۲	مخروطی جو چار ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں
۵۱۴	مخروطی جو چار ثابت خطوں کو مس کرتے ہیں
۵۱۶	مخروطی ایک خود قطبی مثلث کے حوالے سے
۵۱۷	مخروطی دو ماسوں اور وتر تھاس کے حوالے سے
۵۲۲	دائرے جن کا تعلق ایک مثلث سے ہوتا ہے
۵۲۲، ۵۲۸	پیا سکل کا مسئلہ
۵۳۰	بریان کان (Brianchon) کا مسئلہ
۵۳۱	ماسی محدود
۵۳۵	مثلثات ایک مخروطی میں، اور دوسرے مخروطی کے گرد
۵۴۴	اور تیسرے کے لحاظ سے خود قطبی
۵۵۱	اندرونی — حائط کثیر الاضلاع
۵۶۰	تیرہویں باب پر مثالیں
"	چودھواں باب — متکافی قطبی — ظل
"	قطبی مکانی کی تعریف

صفحہ	مضمون
۵۶۱	کسی منحنی کا درجہ اور اس کے متکافی کی جماعت ایک ہی ہوتے ہیں
۵۶۲	متکافی مسئلوں کی مثالیں
۵۶۵	دائرہ کے لمحاظ سے مکافات
۵۶۲	ہم محور دائروں کی مکافات ہم ماسکی محروطیوں میں
۵۶۴	تظلیل - تغلیل کی تعریف
۵۶۵	کسی منحنی کا نفل اُسی درجہ کا ایک منحنی ہوتا ہے
"	ماسوں، قطبوں اور قطبیوں، متوازی خطوط مستقیم نفل
	کسی خط کو لاتنا ہی پر منفل کیا جاسکتا ہے، اور اس کے ساتھ ہی کسی دوزادیوں کو دیے ہوئے زاویوں میں نفل کیا جاسکتا ہے۔
۵۶۸	کسی محروطی کو ایک دائرہ میں منفل کیا جاسکتا ہے
۵۸۰	محروطیوں کا ایک نظام جو ایک چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں ہم ماسکی محروطیوں میں منفل کیا جاسکتا ہے
۵۸۱	پنسلوں اور سعتوں کی چلیبی نسبتیں تظلیل سے نہیں لیتیں
۵۸۲	چار خطوط کی پنسل کی چلیبی نسبت اس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے جو ان خطوط کے قطبوں سے بنتی ہے۔
۵۸۴	ایک محروطی پر کے نقطوں کے غیر موسیقی خواص، اور
"	ایک محروطی کے ماسوں کے غیر موسیقی خواص۔
۵۸۹	ہم رسم سعتیں اور پنسلیں
۵۹۸	چودھویں باب پر مثالیں

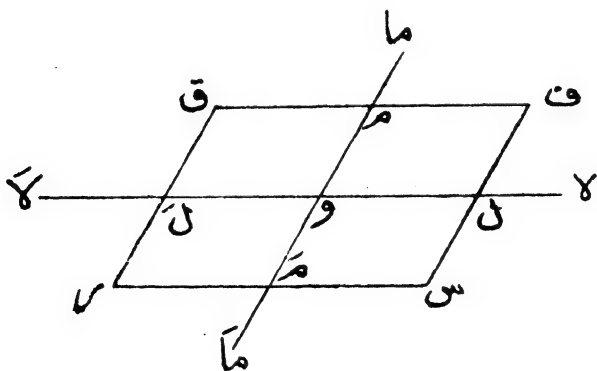
صفحہ	مضمون
۶۰۲	پندرہواں باب - غیر متغیر
۶۰۳	غیر متغیر
۶۲۳	پندرہویں باب پر مثالیں
۶۲۸	منفرد مثالیں

پہلا باب

(1)

محمد

۱۔ اگر ایک مستوی میں دو ثابت خطوط مستقیم لاؤں، ما و ما لے جائیں اور مستوی کے کسی نقطہ ف میں سے دو خطوط مستقیم ف مر، ف ل علی الترتیب لاؤں، ما و ما کے متوازی کھینچے جائیں جہاں ف ل اور ف مر، لاؤں اور ما و ما سے علی الترتیب ل اور مر پر ملتے ہیں تو نقطہ ف کا محل معلوم ہو سکتا ہے جبکہ خطوط ف مر اور ف ل کے



طول دیے گئے ہوں۔ کیونکہ ہمیں صرف ول، و مر کو علی الترتیب معلومہ خطوط مر ف، ل ف کے مساوی لینا اور متوازی الاضلاع ل و مر ف کی تکمیل کرنا ہوگا۔

یہ طول مر ف اور ل ف، یا ول اور و مر، جو اس طرح نقطہ ف کے محل کو خطوط ولا، و ما کے حوالہ سے مقرر کرتے ہیں نقطہ ف کے محدود بحوالہ محاور ولا، و ما کہلاتے ہیں۔ محوروں کا نقطہ تقاطع مبدا کہلاتا ہے۔ جب محوروں کا درمیانی زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے تو محوروں کو قائم محاور کہا جاتا ہے لیکن جب یہ درمیانی زاویہ، زاویہ قائمہ نہیں ہوتا تو محوروں کو مائل محاور کہتے ہیں۔

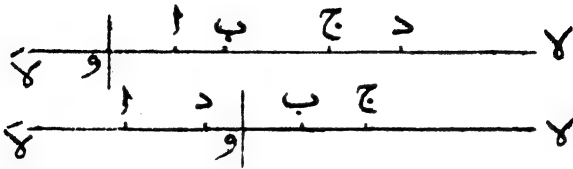
(۲)

ول کو بالعموم نقطہ ف کا فصلہ اور ل ف کو معین کہتے ہیں۔ وہ محدود جس کی پیمائش محور ولا پر عمل میں آتی ہے حرف لا سے تعبیر کیا جاتا ہے اور وہ محدود جس کی پیمائش محور و ما پر کی جاتی ہے حرف ما سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر شکل میں، ول طول کی و اکائیاں اور و مر ب اکائیاں ہوں تو نقطہ ف پر لا = و اور ما = ب اور اس لیے اس نقطہ کو اکثر اختصاراً نقطہ (و، ب) کہا جاتا ہے۔

۴۔ فرض کرو کہ و مر کو طول میں و مر کے مساوی اور ول کو ول کے مساوی لیا گیا ہے اور مر، ل میں سے محوروں کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں (دیکھو شکل دفعہ ۱)۔ اب تین نقطوں ق، س، س کے محدود مقدار میں ف کے محدودوں کے مساوی ہونے لگے۔ پس خطوط ول، ل ف کے طولوں کا جان لینا ہی کافی نہیں ہے بلکہ وہ سمتیں بھی معلوم ہونی چاہئیں جن میں ان کی پیمائش کی گئی ہے۔

اگر ایک سمت میں پیمائش کردہ خطوں کو مثبت لیا جائے تو سمت مخالف میں پیمائش کردہ خطوں کو منفی لینا چاہیے۔ ہم ان خطوں کو جن کی پیمائش ولا یا و ما کی سمتوں میں کی گئی ہو مثبت سمجھیں گے اور اس لیے وہ خطوط جن کی پیمائش ولا یا و ما کی سمتوں میں کی گئی ہو منفی متصور ہونے چاہئیں۔

اُس خطِ مستقیم کو جس پر یہ نقطے واقع ہیں لاکا محور فرض کرو اور اس پر کسی نقطہ کو مبداء قرار دو۔ اب اگر $ا = لا$ ، $ب = لا$ ، $ج = لا$ اور $د = لا$ تو



$$اب = ا + د + ب = -ا + د + ب = لا + لا$$

$$ج = د + ج + و = -د + ج + و = لا + لا$$

$$\text{نیز } ج = ج = لا + لا = ا + د = لا + لا$$

$$ا = ج = لا + لا = د + د = لا + لا$$

اس لیے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ کی تمام قیمتوں کے لیے

$$(-ا + لا)(-ب + لا) = (-ا + لا)(-ب + لا) + (-ا + لا)(-ج + لا) + (-ا + لا)(-د + لا)$$

درست ہے۔ خطوط وحدانی دور کرنے سے یہ واضح ہے۔

مثال ۲۔ ایک خطِ مستقیم پر کوئی تین نقطے $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ہیں اور ف کوئی اور نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ف \times ا + ب \times ج + ج \times ا + ا \times ب + ب \times ج + ج \times ا + ا \times ب = ۰$$

۴۔ دو نقطوں کے درمیانی فاصلہ کو ان کے محدودوں کی رقوم میں بیان کرنا۔

ہم مبدا سے ف کے فاصلہ کو راست معلوم کر سکتے ہیں یا اس کو اوپر کے ضابطہ میں لا = ۰، ما = ۰ رکھنے سے معلوم کیا جاسکتا ہے چنانچہ

$$\text{وف} = \pm \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} \quad \text{لا ما جمہ}$$

یا محاور قائم ہوں تو

$$\text{وف} = \pm \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

(۵) سوائے اُن خطوط مستقیم کے جو محوروں کے متوازی ہوں دیگر خطوں کی سمت کے متعلق کوئی قرارداد اختیار نہیں کی گئی ہے کہ کونسی سمت کو مثبت سمجھا جائے۔ اس لیے ہم ف ق یا ق ف میں سے کسی ایک کو مثبت فرض کر سکتے ہیں۔ لیکن اگر ایک ہی خط مستقیم میں تین یا زیادہ نقطہ ف، ق، سر، ... ہوں تو ایک ہی سمت کو مثبت سمجھنا چاہیے تاکہ تمام صورتوں میں

$$\text{ف ق} + \text{ق سر} = \text{ف سر}$$

حسب ذیل مثالوں میں محاور قائم ہیں :-

مثال ۱- ایک شکل میں نقطہ لا = ۱، ما = ۲ اور نقطہ لا = ۳، ما = ۱ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ ان کے درمیان فاصلہ ۵ ہے۔

مثال ۲- اُن خطوں کے طول معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو ملاتے ہیں:

$$(۱) (۱-۱) \text{ اور } (۱-۱) \quad (۲) (۱-۱) \text{ اور } (۱-۱) \quad (۳) (۱-۱) \text{ اور } (۱-۱)$$

$$(۴) (۱-۱) \text{ اور } (۱-۱)$$

مثال ۳- ثابت کرو کہ تین نقطہ (۱-۱)، (۱-۱) اور (۱-۱)

ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

مثال ۴- ثابت کرو کہ چار نقطہ (۱-۱)، (۱-۱)، (۱-۱) اور (۱-۱)

ایک مستطیل کے راس ہیں۔

مثال ۵۔ ایک ہی شکل میں نقطوں $(-۱, ۰)$ ، $(۱, ۲)$ ، $(۳, ۰)$ اور $(۲, -۱)$ کو مرتب کر دیا اور ثابت کر دیا کہ وہ ایک مربع کے راس ہیں۔
یہی بات نقطوں $(۱, ۲)$ ، $(۳, ۴)$ ، $(۵, ۲)$ اور $(۳, ۰)$ کی صورت میں بھی ثابت کر دیا۔

مثال ۶۔ ثابت کر دیا کہ چار نقطے $(۱, ۲)$ ، $(۳, ۵)$ ، $(۴, ۳)$ اور $(۴, ۱)$ ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔
مثال ۷۔ اگر نقطہ $(۱, ۲)$ دو نقطوں $(۳, ۳)$ اور $(۲, ۱)$ سے مساوی فاصلے پر ہو تو ثابت کر دیا کہ $۵ = ۳ + ۲$

$$[\text{کیونکہ } (۲ - ۱) + (۳ - ۲) = (۳ - ۱) + (۲ - ۲)]$$

اور اس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔]
مثال ۸۔ ثابت کر دیا کہ نقطہ $(۱, ۰)$ تین نقطوں $(۱, -۱)$ ، $(۳, ۳)$ اور $(۳, ۱۸)$ سے مساوی فاصلے پر ہے۔

مثال ۹۔ وہ نقطہ معلوم کر دیا جو نقطوں $(۰, ۰)$ ، $(۱, ۳۲)$ اور $(۰, ۳۲)$ سے مساوی فاصلے پر ہو۔
جواب: $(۱۱, ۲۱)$

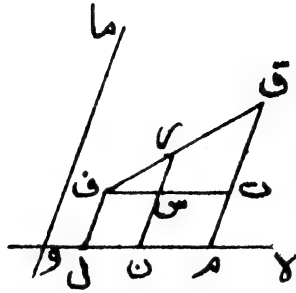
مثال ۱۰۔ تین مثلث کے اضلاع کے طول معلوم کر دیا جس کے راس $(۱, ۰)$ ، $(۳, ۱۳)$ اور $(۴, ۵)$ ہیں۔

ثابت کر دیا کہ نقطہ $(۲, ۴)$ ہر راس سے فاصلہ ۵ پر ہے۔

جواب: اضلاع ۵، ۱۲، ۱۳ ہیں۔

۵۔ اس نقطہ کے محدود معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے
نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کی تقسیم ایک معلوم نسبت میں
کرے۔

فرض کر دیا کہ F کے محدود L ، M اور Q کے محدود L ، M ہیں اور فرض کر دیا کہ S (لا M) وہ نقطہ ہے جو FQ کو نسبت k : k میں تقسیم کرتا ہے۔



فل، سر ن، ق م کو محور ما کے متوازی اور ف س ت کو محور لا کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

تب ل ن : ن م = ف س : س ت = ف س : س ر ق = ک پ : ک پ
 \therefore ک پ \times ل ن - ک پ \times ن م =

یا ک پ (لا - لا) - ک پ (لا - لا) =

$$\therefore لا = \frac{ک پ لا + ک پ لا}{ک پ + ک پ}$$

$$اسی طرح ما = \frac{ک پ با + ک پ با}{ک پ + ک پ}$$

سب سے زیادہ مفید صورت وہ ہے جب کہ خط ف ق کی تنصیف کی گئی ہو چنانچہ نقطۂ تنصیف کے محدود

$$\frac{1}{4} (لا + لا) + \frac{1}{4} (با + با)$$

ہیں۔

اگر خط نسبت ک : - ک میں خارجاً منقطع ہو تو

ل : ن : ن مر = ک : (- ک)

اور اس لیے لا = $\frac{ک - لا - ک لا}{ک - ک}$ ، ما = $\frac{ک - ما - ک ما}{ک - ک}$

(۷) مندرجہ بالا نتیجہ درست رہتے ہیں خواہ محدودوں کے محوروں کے درمیان کوئی زاویہ ہو۔ لیکن بہت سی صورتوں میں ضابطے ذرا پیچیدہ ہو جاتے ہیں جب کہ محاور علی القوائم نہ ہوں۔

ہم آئندہ محوروں کو تمام صورتوں میں علی القوائم سمجھینگے
الا آنکہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔

مثال ۱۔ اس خط کا وسطی نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۱، ۳) (۵، -۷) کو ملاتا ہے۔

$$لا = \frac{۱ + ۵}{۲} = ۳ ، ۱ = \frac{۳ + (-۷)}{۲} = -۲$$

مثال ۲۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۲، ۳) اور (۵، -۳) کو ملانے والا خط کی تقسیم نسبت ۲ : ۱ میں کرتا ہے۔

$$لا = \frac{۱ \times ۵ + ۲ \times ۲}{۲ + ۱} = ۳ ، ۱ = \frac{۱ \times (-۳) + ۲ \times ۳}{۲ + ۱} = ۱$$

مثال ۳۔ نقاط ا، ب، ج علی الترتیب (لا، ما)، (لا، ما) اور (لا، ما)

ہیں۔ ب ج، ج ا، ا ب کے نقاط وسطی علی الترتیب د، ع، ف ہیں۔
نقطہ گ کے محد معلوم کرو جو د کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ د گ = گ ا
د کے محد

$$لا = \frac{لا + لا}{۲} ، ما = \frac{ما + ما}{۲}$$

ہیں اور اس لیے گ کے محد

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 1 + 2 \times (1 + 1)}{2 + 1} = 1$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 1 + 2 \times (1 + 1)}{2 + 1} = 1$$

ہیں۔

اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ گ خطوط ع ب اور ف ج پر بھی واقع ہے اور نیز یہ کہ ۲ ع گ = گ ب اور ۲ ف گ = گ ج کسی مثلث کے خطوط وسطی کے نقطہ تقاطع کو مثلث کا مرکز ہندسی کہتے ہیں اور ہم اوپر کی مثال سے یہ دیکھتے ہیں کہ اگر ایک مثلث کے راس (۱، ۱)، (۱، ۲)، (۲، ۱) ہوں تو اس کے مرکز ہندسی کے محدود

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 1 + 2 \times (1 + 1)}{2 + 1} = 1$$

ہیں۔

مثال ۴۔ اس مثلث کا مرکز ہندسی معلوم کرو جس کے راس علی الترتیب

(۲، ۳)، (۲، ۲) اور (۵، ۲) ہیں۔ جواب: (۳، ۰)

مثال ۵۔ اس مثلث کا مرکز ہندسی معلوم کرو جس کے راس

علی الترتیب (۵، ۳)، (۳، ۴) اور (۲، ۱۰) ہیں۔ جواب: (۱، ۲)

مثال ۶۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو (۳، ۵) اور (۵، ۳) کو ملانے والے

خط کی تقسیم نسبت ۵:۳ میں کرتا ہے۔ جواب (۱۴، ۱۵)

مثال ۷۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو (۱۴، ۲) اور (۵، ۳) کو ملانے والے خط

کی تقسیم خارجی طور پر نسبت ۲:۳ میں کرتا ہے۔ جواب: (۰، ۴)

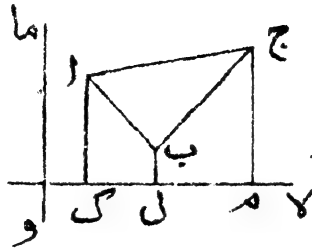
۶۔ مثلث کے رقبہ کو اس کے راسوں کے محدودوں

کی رقوم میں بیان کرنا۔

(۸)

فرض کرو کہ راسوں ۱، ب، ج کے محدود علی الترتیب (۱، ۱)، (۱، ۲)، (۲، ۱)

(لا، پا) (لا، پا) (لا، پا) ہیں۔



خطوط اک، ب ل، اور ج د کو محور ما کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

۵ اب ج = مرج اک - ک اب ل - ل ب ج د

اب مرج اک = ۵ مرج ا + ۵ اک د

$$= \frac{1}{4} \text{ اک د} \times \text{مرج} + \frac{1}{4} \text{ ک م} \times \text{ک ا}$$

$$= \frac{1}{4} (\text{لا} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا})$$

اسی طرح ک اب ل = $\frac{1}{4} (\text{لا} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا})$

اور ل ب ج د = $\frac{1}{4} (\text{لا} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا})$

$$\therefore ۵ اب ج = \frac{1}{4} \{ (\text{لا} + \text{لا}) (\text{لا} - \text{لا}) + (\text{لا} + \text{لا}) (\text{لا} - \text{لا}) + (\text{لا} + \text{لا}) (\text{لا} - \text{لا}) \}$$

$$+ (\text{لا} + \text{لا}) (\text{لا} - \text{لا})$$

یا اُن رقموں کو ترک کرنے سے جو ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں

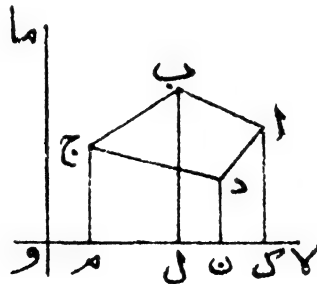
$$۵ اب ج = \frac{1}{4} \{ \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} + \text{لا} \}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}$$

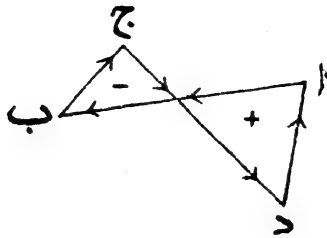
مثلت کے رقبہ کا یہ جلد مثبت ہوگا اگر اس ایسی ترتیب میں ہوں کہ مثلث کے گرد چلنے میں رقبہ ہمیشہ بائیں جانب رہے یا اگر گھیرے ا ب ج ا کو طے کرنے کی ترتیب خلاف سمت ساعت ہو۔ جب کبھی راسوں کے محدودوں کے اندراج سے رقبہ کے سیلہ منفی جملہ حاصل ہو تو مثلث کے گرد چلنے کی ترتیب کو الٹ دیا جائے۔

۹۔ ذواربعتہ الاضلاع کے رقبہ کو اس کے راسوں کے محدودوں کی رقوم میں بیان کرنا جبکہ راس ترتیب وار دیے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ راس ترتیب وار ا، ب، ج، د ہیں اور ان کے محدود علی الترتیب (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما)، اور (لا، ما) ہیں۔



ا، ب، ج، د کو محور ما کے متوازی کھینچو حسب شکل۔



مثال ۱۔ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس (۲، ۱) (۴، ۳) اور (۲، ۵) ہیں۔ نیز اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس (۴، ۲) (۵، ۶) اور (۱، ۳) ہیں۔

جواب: ۴، ۵

مثال ۲۔ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس 'ا'، 'ب'، 'ج' علی الترتیب (۳، ۴)، (۵، ۴) اور (۲، ۶) ہیں۔ جواب: ۵۔

[منفی علامت اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ ا ب ج ا گردش کی اس ترتیب میں ہے جو موافق سمت ساعت ہے اور یہ نقطوں کو مرتبہ کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ اکثر صورتوں میں رقبہ کی صرف مطلق قیمت مطلوب ہوگی۔]

(۵) میں اور ب ج، ج ا، ب کے نقاط وسطیٰ د، ع، ف ہیں۔
مثبت کرو کہ

۵ ا ب ج = ۵۲ د ع ف

مثال ۴۔ اُس ذواربۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس ترتیب وار (۲، ۱)، (۲، ۶)، (۳، ۵) اور (۴، ۳) ہیں۔

نیز اس ذوالربطۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے راس (۲، ۲) ، (۲، ۲) ، (۳، ۲) اور (۳، ۱) ہیں۔
جواب: $\frac{11}{2}$

مثال ۵۔ اس ذواربقۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کر دو جس کے راس
'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ترتیب وار (۲۴-۳)، (۵-۳)، (۱-۴) اور (۲-۴) ہیں۔
جواب :- صفر

نقطوں کو مرتب کرو اور نتیجہ کو ظاہر کرنے کے لیے اب ج د ا کھینچو۔
رقبہ معلوم کرو جب کہ نقطوں کو ترتیب 'ا' 'ب' 'د' 'ج' میں لیا گیا ہو۔

جواب: ۵۶

مثال ۶۔ نقطہ 'ا' 'ب' 'ج' 'د' علی الترتیب (۴،۲) (۲،۳) (۴،۸) (۴،۸)

اور (۶،۴) ہیں۔ اب ج د کا رقبہ معلوم کرو۔ نیز نقطوں کو ترتیب 'ا' 'ج' 'ب' 'د' میں اور ترتیب 'ا' 'ب' 'د' 'ج' میں لے کر ثابت کرو کہ 'ا' 'ب' 'ج' د کے متوازی ہے اور 'ب' 'ج' 'د' کے متوازی ہے۔

جواب: ۱۲

۸۔ اگر ایک منحنی کی تعریف ایک ایسی ہندسی خاصیت کی بنا پر کی گئی ہو جو اس کے تمام نقطوں میں مشترک ہو تو کوئی نہ کوئی جبری رشتہ موجود ہو گا (۱۱)
جو منحنی کے تمام نقطوں کے محدودوں سے پورا ہو گا اور ان نقطوں کے علاوہ دیگر نقطوں سے پورا نہیں ہو گا۔ اس جبری رشتہ کو منحنی کی مساوات کہتے ہیں۔

اس کے برعکس وہ تمام نقطے جو ایک معلوم جبری مساوات کو پورا کرتے ہیں ایک منحنی پر واقع ہوتے ہیں جس کو اس مساوات کا طریق کہتے ہیں۔
مثلاً اگر ایک خط مستقیم کو محور و صا کے متوازی اس سے فاصلہ ۱ پر کھینچا جائے تو اس خط پر کے نقطوں کے فاصلے سب کے سب مستقل مقدار ۱ کے مساوی ہونگے اور کسی اور نقطہ کا فاصلہ ۱ کے مساوی نہیں ہو گا۔

پس $لا = ۱$ و اس خط کی مساوات ہو گی۔

اس کے برعکس وہ خط جو محور ما کے متوازی اس سے فاصلہ ۱ پر کھینچا گیا ہو مساوات $لا = ۱$ کا طریق ہے۔

نیز اگر ایک دائرہ پر کے کسی نقطہ ف کے محدود لا، ما ہوں اور اس کا مرکز مبدا و پر ہو اور اس کا نصف قطر ج ہو تو فاصلہ و ف کا مربع لا + ما ہو گا [دفعہ ۴]۔
لیکن و ف دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود لا، ما رشتہ لا + ما = ج کو پورا کرتے ہیں یعنی دائرہ کل مساوات لا + ما = ج ہے۔

مثال ۳۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں (۱،۰) اور (۰،۱) سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا فرق مستقل (رج) رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $1^2 + 0^2 - 0^2 - 1^2 = 2$ ج

مثال ۴۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطہ (۰،۳) سے اس کا فاصلہ اس فاصلہ کا دوگنا رہتا ہے جو اس کو نقطہ (۰،۳) سے ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $0^2 + 3^2 = 4(0^2 + 3^2)$

مثال ۵۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کا فاصلہ مبداء سے اس کے فاصلہ کا نصف رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $0^2 + 3^2 = 4(0^2 + 3^2)$

مثال ۶۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کا فاصلہ نقطہ (۱،۱) سے اس کے فاصلہ کے مساوی رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $1^2 + 1^2 = 2(0^2 + 1^2)$

مثال ۷۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محوروں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ طول کی ۴ اکائیاں رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $0^2 + 1^2 = 4(0^2 + 1^2)$

مثال ۸۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کا فاصلہ محور لا سے اس کے فاصلے سے بقدر ۲ کے بڑا رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $0^2 + 1^2 = 4(0^2 + 1^2)$

مثال ۹۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۳،۴) سے فاصلہ ۵ پر رہتا ہے۔
جواب: $0^2 + 1^2 = 4(0^2 + 1^2)$

مثال ۱۰۔ وہ نقطے معلوم کرو جو نقطہ (۴،۳) سے فاصلہ ۵ پر اور نقطہ (۱۲،۵) سے فاصلہ ۱۳ پر ہیں۔

[یہ نقطے حسب ذیل دو مساواتوں کو برقرار کرتے ہیں:

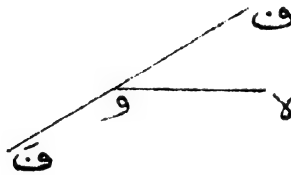
$$[(12-4)^2 + (5-3)^2 = 10^2]$$

جواب: (۰،۰) اور $(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5})$

۹۔۔۔ دفعات ۱ اور ۲ میں جو محدود استعمال ہوتے ہیں ان کو کارٹیزی محدود کہتے ہیں کیونکہ ان کو سب سے پہلے ڈیکارٹ نے استعمال کیا تھا۔ لیکن ایک مستوی پر کسی نقطہ کے محل کو دوسرے طریقوں سے بھی متعین کیا جاسکتا ہے۔ ان میں سے ایک مفید طریقہ حسب ذیل ہے:

قطبی محدود

اگر ایک نقطہ کو مبداء لیا جائے اور اس میں سے ایک ثابت خط مستقیم نکالا کھینچا جائے تو کسی نقطہ ف کا محل معلوم ہوگا اگر زاویہ لا وف اور فاصلہ وف معلوم ہوں۔



ان کو نقطہ ف کے قطبی محدود کہا جاتا ہے۔
 طول وف کو سمتی نصف قطر کہتے ہیں اور اسے بالعموم r سے تعبیر کرتے ہیں۔ زاویہ لا وف کو سمتی زاویہ کہتے ہیں اور اسے θ سے تعبیر کرتے ہیں۔
 اس زاویہ کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمائش ولا سے اس سمت کے خلاف کی گئی ہو جس میں گھڑی کی سُوئیاں گردش کرتی ہیں۔
 سمتی نصف قطر کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمائش ولا سے

اُس خط پر کی گئی ہو جو سمتی زاویہ کی تحدید کرتا ہے اور منفی سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمائش مخالف سمت میں کی گئی ہو۔
گرف دکوٹ تک خارج کیا جائے اور وف مقدار میں دف کے مساوی ہو اور اگر ف کے محدود ر، طہ ہوں تو ف کے محدود۔ ر، طہ یا ر، طہ + ۳۳ ہونگے۔

۱۰۔ دو نقطوں کا جن کے قطبی محدود دیے گئے ہوں درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دو نقطوں ف، ق کے محدود ر، طہ اور ر، طہ ہیں۔ تب

علم مثلث سے

$$ف ق = وف + وق - ۲ وف \times وق \text{ جم ف وق}$$

لیکن وف = ر، وق = ر، اور زاویہ ف وق = زاویہ لا وق
(۷) - زاویہ لا وف = طہ - طہ

$$\therefore ف ق = ر + ر - ۲ ر \text{ جم (طہ - طہ)}$$

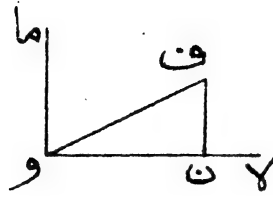
ایک دائرہ کی قطبی مساوات جب کہ دائرہ کا مرکز نقطہ (ر، ع) پر ہو اور اس کا نصف قطر ج = ر = ر + ر = ر ۲ اور جم (طہ - ع) ہے جہاں دائرہ کے کسی نقطہ کے محدود ر، طہ ہیں۔

۱۱۔ قائم محدودوں کو قطبی محدودوں میں تبدیل کرنا۔

اگر وہیں سے ایک خط و ما، ولا پر عمود کھینچا جائے اور ولا، و ما کو قائم محاور سمجھا جائے تو

$$لا = ون = وف \text{ جم لا وف} = ر جم طہ$$

$$\text{اور } ما = ن ف = وف \text{ جب لا وف} = ر جب طہ$$



مثال ۱ — اُن نقطوں کے قائم محد دیکھا ہیں جن کے قطبی محد علی الترتیب $(\frac{\pi}{3}, 1)$ ، $(\frac{\pi}{3}, 2)$ اور $(\frac{\pi}{3}, -2)$ ہیں۔

جواب: $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(-2, 2)$ ، $(-2, 2)$

مثال ۲ — اُن نقطوں کے قطبی محد دیکھا ہیں جن کے قائم محد علی الترتیب $(1, -1)$ ، $(-1, 1)$ اور $(2, -2)$ ہیں۔

جواب: $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، $(\frac{\pi}{2}, 2)$ ، $(5, -\frac{\pi}{2})$

مثال ۳ — اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی محد

جواب: $\frac{1}{2}$

$(2, \frac{\pi}{2})$ اور $(1, 0)$ ہیں۔

مثال ۴ — اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی محد

جواب: $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$

$(2, \frac{\pi}{2})$ اور $(1, 0)$ ہیں۔

مثال ۵ — اُس نقطہ کا طریق معلوم کرو جو نقطہ $(\frac{\pi}{2}, 5)$ سے فاصلہ ۳ پر

رہے۔ جواب: $2 - 10$ ، $10 + 16$

مثال ۶ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کا فاصلہ نقطہ $(\frac{\pi}{2}, 3)$ سے

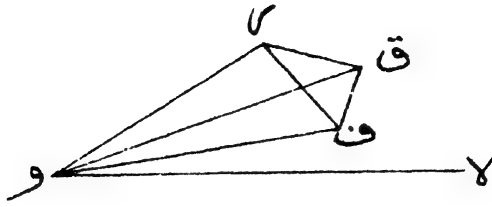
جواب: $2 - 6$ ، $6 + 5$

۲ ہے۔

۱۲ — ایک مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کے

راسوں کے قطبی محد دیے گئے ہوں۔

(۱۵)



فرض کرو کہ 'ق'، 'س' کے معد و علی الترتیب (ر، طم) (ر، طم) (ر، طم) ہیں
تب مثلث فق سر کا رقبہ = ۵ وف ق + ۵ وق سر - ۵ وس ف

اور ۵ وف ق = $\frac{1}{4}$ وف \times وق جب ف وق

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ ر، ر جب (طم - طم)}$$

اسی طرح ۵ وق سر = $\frac{1}{4}$ ر، ر جب (طم - طم)

اور ۵ وس ف = $\frac{1}{4}$ ر، ر جب (طم - طم) = $\frac{1}{4}$ ر، ر جب (طم - طم)

\therefore ۵ ف ق سر = $\frac{1}{4}$ ر، ر جب (طم - طم) + $\frac{1}{4}$ ر، ر جب (طم - طم) + $\frac{1}{4}$ ر، ر جب (طم - طم)

اگر مثلث وف ق کے رقبہ کو مثبت خیال کیا جائے جب کہ گھیرا وف ق و
تلاف سمت ساعت طے ہو اور منفی جبکہ موافق سمت ساعت طے ہو اور اسی طرح دوسرے
مثلثوں کے متعلق سمجھا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ تمام صورتوں میں

$$۵ ف ق سر = ۵ وف ق + ۵ وق سر + ۵ وس ف$$

نیز ذرا لبعۃ الاضلاع ف ق سر کے لیے تمام صورتوں میں

$$\text{رقبہ ف ق سر} = ۵ وف ق + ۵ وق سر + ۵ وس ف$$

$$= \frac{1}{4} \text{ ر، ر جب (طم - طم)} + \frac{1}{4} \text{ ر، ر جب (طم - طم)} + \frac{1}{4} \text{ ر، ر جب (طم - طم)}$$

$$+ \frac{1}{4} r^2 \text{ جب } (r - r) + \frac{1}{4} r^2 \text{ جب } (r - r)$$

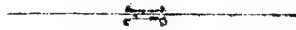
$$ab \quad r^2 \text{ جب } (r - r)$$

$$= r^2 \text{ جب } r^2 \text{ جب } r^2 \text{ جب } r^2$$

$$= r^2 - r^2 \text{ دفعہ ۱۱ سے}$$

پس حسب دفعہ ۷

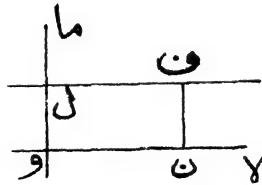
$$r^2 \text{ قیاس } = \frac{1}{4} \{ (r^2 - r^2) + (r^2 - r^2) + (r^2 - r^2) \} + (r^2 - r^2)$$



دوسرا باب

خطِ مستقیم

۱۳۔ ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو محدودوں کے محوروں میں سے ایک کے متوازی ہو۔
 فرض کرو کہ l ق l ایک خطِ مستقیم ہے جو محور la کے متوازی ہے اور
 نمود سے نقطہ l پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ $ol = b$ ۔

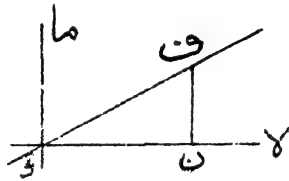


فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ f کے محدود (la) ہیں۔
 اب مابین n $f = ol$

پس $ما = ب$ خط کی مساوات ہے۔
اس طرح $لا = و$ اس خط کی مساوات ہے جو محور $ما$ کے متوازی ہے اور
اس سے قاصلہ و پر ہے۔

۱۴۔ ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو مبدا
میں سے گزرے۔

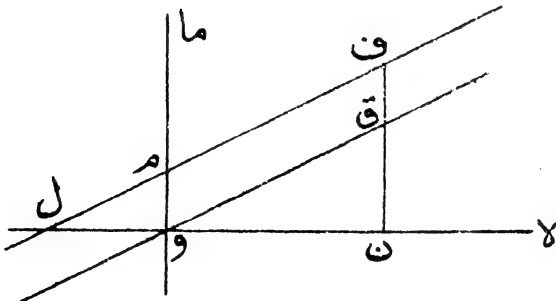
فرض کرو کہ مبدا میں سے گزرنے والا ایک خط مستقیم $و ف$ ہے اور
فرض کرو کہ زاویہ $لا و ف$ کا $ما س = م$



فرض کرو کہ خط $پ ر$ کے کسی نقطہ $ف$ کے محدد $لا، ما$ ہیں۔

اب $ن ف = م س ن و ف \times و ن$
پس $ما = م لا$ مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۵۔ کسی خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ ل م ر ف ایک خط مستقیم ہے جو محوروں سے نقاط ل اور م پر ملتا ہے۔

فرض کرو $و م = ج$ اور $م س = ل م = م$
فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے بعد لا، ما ہیں۔
ف ن کو محور ما کے متوازی اور وق کو خط ل م ر ف کے متوازی
کھینچو حسب شکل۔

$$ن ف = ن ق + ق ف$$

اب

$$= و ن م س ن وق + و م$$

لیکن $ن ف = ما، و ن = لا، و م = ج$ اور $م س ن وق = س ول م م$

$$\therefore ما = م لا + ج \dots \dots \dots (۱)$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

جب کوئی مخصوص خط مستقیم زیر بحث ہوتا ہے تو مقدار م اور ج مستقل رہتی ہیں اور اس لیے ان کو مستقل کہتے ہیں۔ ان میں سے م اُس زاویہ کا تماس ہے جو محور لا کی مثبت سمت اور خط کے اُس حصہ کے درمیان ہوتا ہے جو محور لا کے اوپر ہے اور ج محور ما پر کا مقطوعہ ہے۔

مستقلات م اور ج کو مناسب قیمتیں دے کر مساوات $ما = م لا + ج$ سے کسی خط مستقیم کو تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً وہ خط مستقیم جو محور ما کو میدان سے اکائی فاصلہ پر قطع کرتا ہے اور محور لا سے ۵ م کا زاویہ بناتا ہے مساوات $ما = لا + ۱$ سے تعبیر ہوگا۔

ہم (۱) سے دیکھتے ہیں کہ کسی خط مستقیم کی مساوات پہلے درجہ کی ہوتی ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ پہلے درجہ کی ہر مساوات ایک

خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔
پہلے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اب یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے یہ دکھانا کافی ہے کہ اگر طریق پر کے کسی تین نقطوں کو ملایا جائے تو اس طریقہ پر بنے ہوئے مثلث کا رقبہ صفر ہوگا۔

فرض کرو کہ طریق پر کوئی تین نقطے ف، ق، س ہیں اور ان کے محدود علی الترتیب (لا، ما)، (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔ پس نقطوں کے محدودوں کو مساوات (۱) پوری کرنی چاہیے اس لیے

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

اب ۱، ب، ج کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۰ = \begin{vmatrix} لا & ما \\ لا & ما \\ لا & ما \end{vmatrix}$$

اس لیے مثلث کا رقبہ صفر ہے (دفعہ ۶) اور اس لیے طریق پر کے کوئی تین نقطے ایک خط مستقیم پر ہونے چاہئیں۔

اس لیے مساوات ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

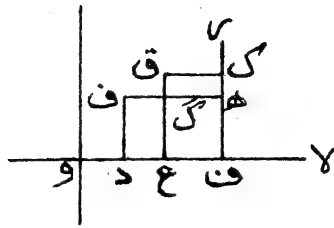
دوسرا ثبوت: اوپر کی مساواتوں سے بزرگ عمل تفریق حاصل ہوتا ہے

$$۱ + (لا - لا) + (ب - ما) + ج = ۰$$

$$۱ + (لا - لا) + (ب - ما) + ج = ۰ \quad \text{اور}$$

$$\frac{لا - لا}{ما - ما} = \frac{لا - لا}{ما - ما} \quad \text{اس لیے}$$

(۱۹)



یعنی بموجب شکل $\frac{ف ق}{ق ق} = \frac{ف ق}{ق ق}$

اس لیے مثلثات ف گ ق، ف ہ ہ مشابہ ہیں اور اس لیے ف ق ہ ایک خط مستقیم ہے۔

مساوات ۱ لا + با + ج = ۰ میں تین مستقلات نظر آتے ہیں حالانکہ دفعہ ۵ میں حاصل شدہ مساوات میں صرف دو مستقلات ہیں۔ لیکن اگر کسی نقطہ کے محدود لا، با، مساوات لا + با + ج = ۰ کو پورا کرتے ہوں تو وہ اس مساوات کو بھی پورا کرینگے جو کسی مستقل سے ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ چنانچہ اگر ہم با سے تقسیم کریں تو ہم مساوات کو شکل با = ۰ - لا + ج میں لکھ سکتے ہیں اور اس میں صرف دو مستقلات - لا اور ج ہیں اور یہ مساوات با = م لا + ج کے مستقلات م اور ج کے متناظر ہیں۔

مثال ۱۔ اس خط کی مساوات لکھو جو محور لا کے ساتھ ۵ ۳ ۱ کا زاویہ بنائے اور محور ما کو مبدا سے فاصلہ ۳ پر قطع کرے۔ جواب: با = ۰ - لا - ۳

مثال ۲۔ خط مستقیم ۳ لا + با - ۴ = ۰ کی مساوات کو شکل با = م لا + ج میں لکھو۔ جواب: با = ۰ - م لا + ج

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ وہ خط مستقیم جو محور لا کے ساتھ سن ۵ کا زاویہ بناتا ہے اور محور ما کو نقطہ (۵-۶۰) پر قطع کرتا ہے نقطہ (۰،۱) میں سے

گذرتا ہے۔

۱۶۔ ایک خطِ مستقیم کی مساوات کو ان مقطوعوں کی

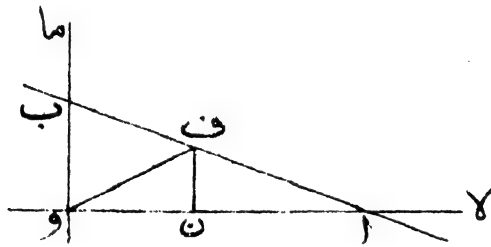
(۲۰)

رقوم میں معلوم کرنا جو وہ محوروں پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ۱ اور ب وہ نقطے ہیں جہاں خطِ مستقیم محوروں کو قطع

کرتا ہے اور فرض کرو کہ $و = ۱$ و $و = ب$ ۔

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدود لا، ا ہیں۔



ف ن کو محور ما کے متوازی کھینچو اور و ف کو ملاؤ۔

اب $و ا ف = و ا ف + و ف ب = و ا ب$ ∴ $و ا + ب ل = و ا ب$

$$یا \quad ۱ = \frac{و ا}{ب} + \frac{ل}{و}$$

اس مساوات کو شکل

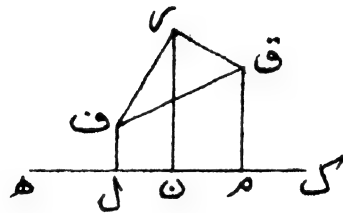
$$ل = و ا + م = ۱$$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں ل اور م، محوروں پر کے مقطوعوں کے متکافی ہیں۔

ظِل

۱۸۔ اگر کسی خط مستقیم کے سروں ف اور ق سے کسی دوسرے خط مستقیم ہک پر عمود ف ل اور ق م کھینچے جائیں تو ل م کو ف ق کا ظِل، ہک پر، کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ کوئی اور نقطہ س ہے اور ہک پر اس کا ظِل ن ہے تو چونکہ تمام صورتوں میں ل م + م ن = ل ن اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی خط پر ف ق اور ق م کے ظِلوں کا مجموعہ اس خط پر ف م کے ظِل کے مساوی ہوتا ہے۔ (۲۱)



اسی طرح کسی خط پر ا ب، ب ج، ج د،، ف ق کے ظِلوں کا مجموعہ ا ق کے ظِل کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز کسی خط پر ایک بند کثیر الاضلاع کے ضلعوں کے ظِلوں کا مجموعہ صفر کے مساوی ہوتا ہے۔

اگر ن ضلعوں والے منتظم کثیر الاضلاع کا ایک ضلع ایک معلومہ خط کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو دوسرے اضلاع ترتیب وار زاویے

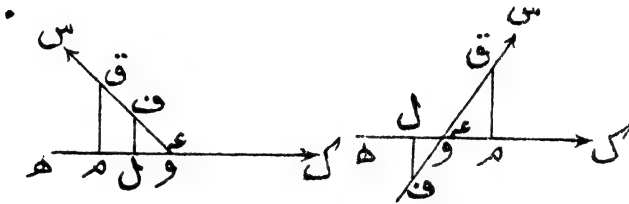
$$\text{طہ} + \frac{\pi}{n}, \text{طہ} + \frac{2\pi}{n}, \text{طہ} + \frac{3\pi}{n}, \dots$$

بنائینگے اور طہ کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگا۔

$$\text{جم طہ} + \text{جم (طہ)} + \left(\frac{\pi^2}{\pi}\right) + (\text{طہ} + \frac{\pi^2}{\pi}) + \dots + \text{ن رقبہ مک} =$$

فرض کرو کہ وہ خط جس پر فاق واقع ہے ہک کو د پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ان دو خطوں کی مثبت سمتوں وک اور وس کے درمیان زاویہ ک وس' ع ہے۔

اب زاویہ کی جیب التام کی تعریف کی رو سے



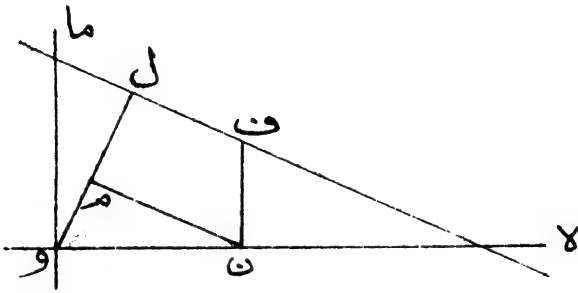
$$\text{ول} = \text{وف جم ع} \quad \text{اور} \quad \text{وم} = \text{وق جم ع}$$

$$\text{ل م} = \text{فاق جم ع}$$

پس کسی خط ہک پر خط فاق کا ظل فاق جم ع ہوتا ہے جہاں ع وہ زاویہ ہے جو ہک کی مثبت سمت اور اُس خط کی مثبت سمت کے درمیان ہے جس پر فاق واقع ہے۔

۱۹۔ ایک خط مستقیم پر مبدا، د سے عمود ول کھینچنا

گیا ہے اور یہ عمود محور لا کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے۔ خط مستقیم
 کی مساوات کو عمود ول اور زاویہ عہ کی رقوم میں معلوم کرو۔
 فرض کرو کہ ول = ع اور زاویہ لا ول = عہ۔ فرض کرو کہ خط پر کے
 کسی نقطہ ف کے محدود لا، ما ہیں۔
 ف ن کو محور ما کے متوازی اور ن مرکو ول پر عمود کھینچو۔



اب ن ف، و ما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں
 زاویہ ما ول = زاویہ ما و لا + زاویہ لا ول
 = - زاویہ لا و ما + زاویہ لا ول = $-\frac{\pi}{4} + ع$
 ول پرو ن اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ ول کے مساوی
 ہے (دفعہ ۱۸)۔

$$\begin{aligned} \text{ون کا ظل} &= \text{ون جم ع} \\ \text{ن ف کا ظل} &= \text{ن ف جم} (-\frac{\pi}{4} + ع) \\ \text{اس لیے ع} &= \text{ون جم ع} + \text{ن ف جم} (-\frac{\pi}{4} + ع) \\ &= \text{لا جم ع} + \text{ما جب ع} \end{aligned}$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

۲۰۔ دفات ۱۵، ۱۴، اور ۱۹ میں ہم نے خط مستقیم کی مساوات کو مختلف شکلوں میں جن میں مختلف مستقلات شامل ہوتے ہیں غیر تابع طریقوں سے معلوم کیا ہے۔ لیکن اس مساوات کی کسی شکل کو دوسری شکل سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

(۲۲)

مثلاً اگر ہمیں یہ مساوات محوروں پر کے مقطوعوں کی رقوم میں معلوم ہو تو ہم E اور e کی رقوم میں اس مساوات کو رشتوں 1 و $جم$ $e = E$ اور $ب$ جب $e = E$ کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں جہاں یہ رشتے دفعہ ۱۹ کی شکل سے فوراً حاصل ہو جاتے ہیں۔ پس مساوات $\frac{1}{ب} + \frac{1}{جم} = \frac{1}{E}$ اور $ب$ کی ان قیمتوں کو درج کرنے سے مساوات $لاجم$ $e + ماجب$ $e = E$ حاصل ہوتی ہے۔

اگر خط مستقیم کی مساوات

$$1 + لا + ب + ما + ج = 0$$

ہو تو اس کو $1 + لا + ب$ سے تقسیم کرنے پر مساوات

$$0 = \frac{1}{1 + لا + ب} + \frac{ما}{1 + لا + ب} + \frac{ج}{1 + لا + ب}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اب $\frac{1}{1 + لا + ب}$ اور $\frac{ج}{1 + لا + ب}$ علی الترتیب کسی خاص

زاویہ کی جیب التمام اور جیب ہیں کیونکہ ان کے مربوں کا مجموعہ اکائی کے مساوی ہے۔ اگر ہم اس زاویہ کو e کہیں تو

$$لاجم$$
 $e + ماجب$ $e = E$

جہاں E کو $\frac{ج}{1 + لا + ب}$ کی جگہ رکھا گیا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ۳ لا - ۲ م - ۵ = ۰ تو $۲م + ۳لا$ سے تقسیم کرنے پر مساوات $\frac{۵}{۳}$ لا - $\frac{۲}{۳}$ م = ۱ - ۰ حاصل ہوتی ہے۔ اس کی شکل لاجم م + ماحب م - ۴ = ۰ ہے جہاں جرم م = $\frac{۵}{۳}$ جب م = $\frac{۲}{۳}$ اور ع = ۱ مثال ۲۔ مساوات لا + م + ۵ = ۰، مساوات

$$\frac{۵}{۳} = \frac{۲}{۳} + م + ۵$$

کے مائل ہے۔

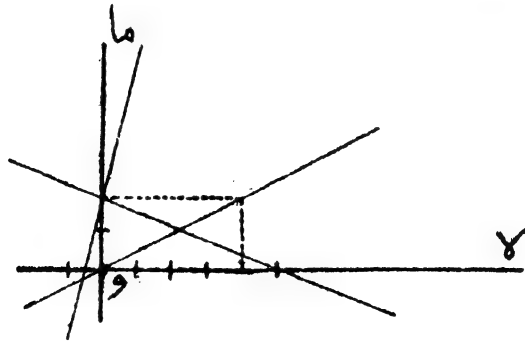
مثال ۳۔ مساوات لا + ۲م + ۲۵ = ۰ کو شکل

$$لاجم م + ماحب م - ۴ = ۰$$

$$جواب: - \frac{۲}{۳} لا - \frac{۲۲}{۳} م = ۱ - ۰$$

میں لکھو۔

۲۱۔ جب کسی خط مستقیم کی مساوات دی گئی ہو تو اس کا محل معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ اس پر کے کسی دو نقطوں کے محدد معلوم کر لیے جائیں۔ ان محددوں کو معلوم کرنے کے لیے لا کی کوئی دو قیمتیں فرض کرو اور ان کے جواب میں معلوم مساوات سے م کی دو قیمتیں معلوم کرو۔ وہ نقطے جہاں خط محوروں کو قطع کرتا ہے بڑی آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔



مثال ۱ — خط مستقیم کی مساوات $۲ + ۵ = ۱۰$ ہے۔ یہ خط مستقیم محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں $۵ = ۱۰$ اور اس لیے $۵ = ۱۰$ ۔ محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں $۱۰ = ۵$ اور اس لیے $۱۰ = ۵$ ۔

مثال ۲ — خط $۲ + ۵ = ۱۰$ محوروں پر جو نقطہ سے قطع کرتا ہے وہ علی الترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{5}$ ہیں۔

مثال ۳ — $۱۲ = ۱۰$ یا اس صورت میں مبداء خط پر ہے اور جب $۱۲ = ۱۰$ تو $۲ = ۱۰$ ۔

یہ سب خطوط شکل میں کھینچے گئے ہیں۔

۳۲ — اگر ہم ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو کسی دو شرطوں کو پورا کرتا ہے تو ہم حسب ذیل عام شکلوں میں سے کوئی ایک شکل اس خط کی مساوات کے لیے فرض کر سکتے ہیں:

$$(۱) \quad ۱ = ۱۰ + ۵ = ۱۰ \quad (۲) \quad \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} = ۱ \quad (۳) \quad ۱ = ۱۰ + ۵ = ۱۰$$

$$(۴) \quad ۱ = ۱۰ + ۵ = ۱۰ \quad (۵) \quad ۱ = ۱۰ + ۵ = ۱۰$$

ان میں سے کسی ایک شکل کو اختیار کر لینے کے بعد دو مستقلات ۱۰ اور ۵ یا $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{5}$ یا $\frac{1}{۱۰}$ اور $\frac{1}{۵}$ کی قیمتوں کو ان دو شرطوں سے متعین کرنا ہوگا جن کو خط پورا کرتا ہے۔

مثال ۱ — ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کر دو نقطہ $(۲، ۳)$ میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر مساوی نقطہ سے قطع کرتا ہے۔

$$[\text{فرض کر دو کہ خط کی مساوات } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} = ۱ \text{ ہے۔}]$$

اب چونکہ نقطہ مساوی ہیں اس لیے $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۵}$ ۔

$$\text{نیز چونکہ نقطہ } (۲، ۳) \text{ خط پر ہے اس لیے } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} = ۱$$

$$\therefore ۱ = ۵ = ۱۰ \quad \text{ب اور مطلوبہ مساوات } \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵} = ۱ \text{ ہے۔}$$

مثال ۲ — اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۳۱، ۲) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے۔

[فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات $mx + ly = c$ ہے۔

تب چونکہ خطِ مستقیم محور لا کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے اس لیے $m = 0$ اور $l = 1$ ۔ نیز نقطہ (۳۱، ۲) خط پر ہے اس لیے $2 = m \cdot 31 + l \cdot 0$ اور

اس لیے $c = 2$ ، پس مطلوبہ مساوات $2 = y$ ہے۔]

مثال ۳ — جب مساوات $5x + 12y - 26 = 0$ کو شکل لایم $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ میں لکھا جائے تو c کی قیمت معلوم کرو۔ جواب: ۲

مثال ۴ — خط $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

جواب: ۲، ۶

کا مبداء سے عمودی فاصلہ معلوم کرو۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ وہ خط جس کے مقطع x محاور لا اور y محاور 5 علی الترتیب ۵ اور ۴ ہیں نقطہ (۱۵، ۸) میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۶ — ثابت کرو کہ وہ خط جو نقطوں (۵، ۰) و (۰، ۲) میں سے گزرتا ہے نقطوں (۱۵، ۴) اور (۵، ۴) میں سے بھی گزرتا ہے۔

مثال ۷ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۱۲) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ 30° بناتا ہے۔ جواب: $3x + 4y = 16$

مثال ۸ — ثابت کرو کہ نقطوں (۳، ۴) اور (۵، ۱) کو ملائے والے خطِ مستقیم کا نقطہ وسطی خط لا $2x + y = 10$ پر ہے۔

مثال ۹ — ثابت کرو کہ خط لا $2x + y = 10$ اُس خط کو جو نقطوں (۳، ۱۰) اور (۸، ۹) کو ملاتا ہے نسبت ۲:۳ میں قطع کرتا ہے۔

مثال ۱۰ — ثابت کرو کہ خط لا $2x + y = 10$ اُس خط کو جو (۱، ۱) اور (۳، ۴) کو ملاتا ہے نسبت ۳:۲ میں خارجاً قطع کرتا ہے۔

۲۳ — ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا (۲۶)

جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے معلومہ سمت میں کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے عہدہ لا، ما ہیں اور فرض کرو کہ خط محور لا کے ساتھ من۔ ام کا زاویہ بناتا ہے۔ تب اس خط کی مساوات

$$م = لا + ج$$

ہوگی اور چونکہ (لا، ما) اس خط پر ہے اس لیے

$$ما = م + لا + ج$$

اس لیے تفریق کرنے پر

$$1- ما = م (لا - لا) \dots \dots (1)$$

وہ خط جو (۱) سے حاصل ہوتا ہے نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس م کو مناسب قیمت دینے سے یہ مساوات کسی خط مستقیم کو جو نقطہ (لا، ما) میں سے گذر گیا تبسیر کریں گی۔

پس جب ہم یہ معلوم ہو جائے کہ ایک خط مستقیم ایک مخصوص نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتا ہے تو ہم اس کی مساوات کے لیے فوراً لکھ لیتے ہیں۔

$$1- ما = م (لا - لا)$$

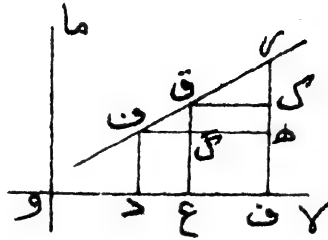
اور پھر م کی قیمت کو اس دوسری شرط سے معلوم کرتے ہیں جس کو خط پورا کرتا ہے۔

۲۲۔ ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو دو

دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ ف اور ق علی الترتیب (لا، ما) اور (لا، با) ہیں اور فرض کرو کہ خط مستقیم ف ق پر کوئی دوسرا نقطہ سا

(لا، ما) ہے۔



(۲۷) اب چونکہ ف ق سہ ایک خط مستقیم ہے مثلثات کی گ ق، ف ہ سہ، متشابه ہیں اور اس لیے

$$\frac{\text{فہ سہ}}{\text{فگ ق}} = \frac{\text{قہ سہ}}{\text{قگ ق}}$$

$$\frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا} - \text{پ}} = \frac{\text{لا} - \text{پ}}{\text{لا} - \text{پ}}$$

یعنی

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

دوسرا طریقہ: فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

(۱) '۰ = ج + ما + لا

ہے تب چونکہ نقاط (لا، پ)، اور (لا، پ) اس خط پر ہیں اس لیے

(۲) '۰ = ج + پ + لا

(۳) '۰ = ج + پ + لا اور

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) سے 'ج کو ساقط کرو تو مطلوبہ

مساوات شکل

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

میں حاصل ہوگی۔

مثال ۱ — نقاط (۳، ۲) اور (۱، ۳) کو ملانے والے خط کی مساوی

$$= \frac{3-2}{2-1} = \frac{2-1}{2-3} \quad \text{یا} \quad 2+6-2-1=0$$

ہے۔

مثال ۲ — ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو (۱) نقاط (۳، ۱)

اور (۵، ۴) (ii) نقاط (۱، ۴) اور (۰، ۱۳) کو ملاتے ہیں۔

جواب: (i) $2+6-2-1=0$ (ii) $13-6-2+1=0$

مثال ۳ — ثابت کرو کہ (۵، ۳) اور (۴، ۲) کو ملانے والا خط

اس خط کی تنصیف کرتا ہے جو (۲، ۴) اور (۳، ۹) کو ملاتا ہے۔

مثال ۴ — ثابت کرو کہ (۶، ۳) اور (۹، ۶) کو ملانے والا خط

محور کو مبدا سے اکائی فاصلہ پر قطع کرتا ہے۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ دو نقطوں (۳، ۹) اور (۱۵، ۳) میں

سے گزرنے والا خط محور پر مساوی نقطے قطع کرتا ہے۔

مثال ۶ — وہ خطوط معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۳) میں سے گزرتے

ہیں اور محور کو اس طرح قطع کرتے ہیں کہ مقطوعے مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔

جواب: $1+6-2-1=0$ اور $6-2-1=0$

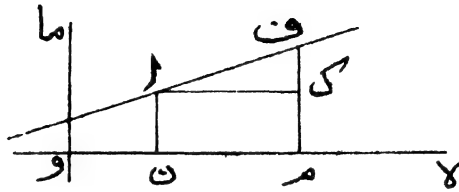
۲۵ — فرض کرو کہ خط مستقیم 'ف' محور لا کے ساتھ زاویہ

طہ بناتا ہے۔ فرض کرو کہ 'ا' کے محدوداً، 'ا' اور 'ف' کے محدوداً، 'ا' میں

اور فاصلہ 'ا' = 'ر'۔

ان اور 'ف' کو محور 'ا' کے متوازی کھینچو۔ 'ا' کو محور 'ا' کے

متوازی کھینچو۔



تب اک = اف جم طہ اور ک ف = اف جب طہ
یا لا - لا = ر جم طہ اور ما - ما = ر جب طہ
خط اف کی مساوات کو شکل

$$لا - لا = \frac{ما - ما}{جم طہ} = ر$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۶۔ فرض کرو کہ کسی خط مستقیم کی مساوات

$$ا + لا + ج + ما + ج = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ ق کے محدود لا، ما ہیں اور فرض کرو کہ وہ خط جو محور ما کے متوازی ہے اور ق میں سے گزرتا ہے دیے ہوئے خط کو نقطہ ف پر قطع کرتا ہے جس کے محدود لا، ما ہیں۔

تب ایک شکل سے یہ ظاہر ہو گا کہ جب تک ق، خط مستقیم کی ایک ہی جانب رہتا ہے ق ف کو ایک ہی سمت میں کھینچنا پڑتا ہے لیکن جب ق، خط مستقیم کی دوسری جانب واقع ہوتا ہے تو ق ف کو مخالف

سمت میں کھینچا پڑتا ہے۔

اس کا یہ مطلب ہے کہ ق ف، خط مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی۔

$$\text{اب} \quad \text{ق ف} = \text{ما} - \text{ما} \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{اور} \quad \text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = \text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} - (\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج})$$

[کیونکہ (لا، ما) خط پر ہے اور اس لیے $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$]

$$\therefore \text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = - (\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}) \dots \dots \dots (۳)$$

(۲) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}$ ، خط مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی ہے۔

اگر ایک خط مستقیم کی مساوات $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$ ہو اور کسی نقطہ (لا، ما) کے محدود جملہ $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}$ میں درج کیے جائیں تب اگر $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}$ مثبت ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (لا، ما) خط کی مثبت جانب واقع ہے لیکن اگر $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}$ منفی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (لا، ما) خط کی منفی جانب واقع ہے۔

اگر خط کی مساوات کو

$$- \text{ا لا} - \text{ب ما} - \text{ج} = ۰$$

لکھا جائے تو یہ ظاہر ہے کہ وہ جانب جس کو ہم نے مثبت جانب کہا ہے اب اسے منفی جانب کہنا چاہیے۔

مثال ۱ — نقطہ (۲، ۳) خط $۲ - لا - ۳ - ما - ۱ = ۰$ کی منفی جانب پر ہے اور خط $۳ - لا - ۲ - ما - ۱ = ۰$ کی مثبت جانب پر ہے۔

مثال ۲ — نقاط (۱، ۲) اور (۱، ۱) خط $۳ - لا + ۲ - ما - ۶ = ۰$ کی مخالف جانبوں پر ہیں۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ چار نقطے (۰، ۰)، (۱، -۱)، (-۱، ۱) اور (۲، ۱) خط مستقیم $۲ - لا - ۳ - ما + ۱ = ۰$ اور $۳ - لا - ۵ - ما + ۲ = ۰$ سے بنے ہوئے چار مختلف خانوں میں

واقع ہیں۔

۲۷۔ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کے محدود

معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$1) \dots\dots\dots 0 = a + b + c \dots\dots\dots (1)$$

$$2) \dots\dots\dots 0 = a + b + c \dots\dots\dots (2)$$

ہیں۔

اب اس نقطہ کے محدود جو دونوں خطوط مستقیم میں مشترک ہے دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرینگے۔ پس ہمیں ا اور ب کی وہ قیمتیں معلوم کرنی ہیں جو مساواتوں (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں۔ یہ قیمتیں

$$\frac{a}{b - c} = \frac{a}{c - b} = \frac{a}{b - c}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

۲۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین خطوط مستقیم ایک نقطہ پر

(۳۰)

مل سکیں۔

فرض کرو کہ تین خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$1) \dots\dots\dots 0 = a + b + c \dots\dots\dots (1)$$

$$2) \dots\dots\dots 0 = a + b + c \dots\dots\dots (2)$$

$$3) \dots\dots\dots 0 = a + b + c \dots\dots\dots (3)$$

ہیں۔

یہ تین خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ملینگے اگر ان میں سے دو خطوں کا نقطہ تقاطع تیسرے خط پر واقع ہو۔

خطوط مستقیم (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع کے محدود

$$\frac{1}{\text{ب-ج-ا}} = \frac{1}{\text{ج-ا-ب}} = \frac{1}{\text{ا-ب-ج}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

وہ شرط کہ یہ نقطہ خط (۳) پر واقع ہو رہے ہے کہ

$$\frac{\text{ب-ج-ا}}{\text{ا-ب-ج}} + \frac{\text{ج-ا-ب}}{\text{ا-ب-ج}} + \frac{\text{ا-ب-ج}}{\text{ا-ب-ج}} = 0$$

$$\text{یا } 0 = (\text{ب-ج-ا}) + (\text{ج-ا-ب}) + (\text{ا-ب-ج})$$

مثالیں

۱۔ وہ خطوط مستقیم کھینچو جن کی مساواتیں ہیں

$$(۱) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ \quad (۲) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱$$

$$(۳) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ = ۱۲$$

۲۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو ملاتے ہیں :

$$(۱) \quad (۳، ۲) \text{ اور } (۱، ۲) \quad (۲) \quad (۱، ۲) \text{ اور } (۱، ۲)$$

$$\text{جواب: } (۱) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ = ۱۲ \quad (۲) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ = ۱۲$$

۳۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتے ہیں اور محور لا کے ساتھ علی الترتیب زاویے ۵۰° اور ۴۰° بناتے ہیں۔

$$\text{جواب: } ۱۲ = ۱۱ + ۱ = ۱۲$$

۴۔ حسب ذیل مساواتوں کو شکل لاجمہ + ما جب م = ۰ میں لکھو:

$$(۱) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ = ۱۲ \quad (۲) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ = ۱۲$$

$$\text{جواب: } (۱) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ = ۱۲ \quad (۲) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ = ۱۲$$

۵۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے اور

خط ۱۲-۱۳-۵ = کے متوازی ہے۔ جواب: ۱۲-۱۳-۴ =

۶ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۲) میں سے گزرتا ہے اور نقاط (۳، ۲) ' (۱، ۳) کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ جواب: ۱۳-۱۴-۹ =

۷ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۶، ۵) میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر مساوی مقطوعے قطع کرتا ہے۔ جواب: ۱۱-۱۲-۱۱ =

(۳۱)

۸ — خطوط مستقیم کے حسب ذیل زوجوں کے تقاطع معلوم کرو:

$$(۱) ۵-۱۱-۱۱ اور ۹۹-۱۱-۱۱ = ۴۴-۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱-۱۱$$

$$(۲) ۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} اور ۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

$$جواب: (۱) (-۶، -۶) (۲) (-۱، -۱) (۳) \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

۹ — ثابت کرو کہ تین خطوط مستقیم ۵-۱۱-۱۱، ۴-۱۱-۱۱، ۱۰-۱۱-۱۱ اور ۱۲-۱۱-۱۱ =

ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۱۰ — ثابت کرو کہ تین نقطے (۱۱، ۰)، (۳، ۲) اور (۱، ۳) ایک خط مستقیم

پر ہیں۔

نیز تین نقطے (۳، ۰)، (۰، ۳) اور (۱، ۱) بھی ایک خط مستقیم پر ہیں۔

۱۱ — اُس مثلث کے اضلاع کی مساواتیں معلوم کرو جس کے راسوں کے محدد (۲، ۱)، (۳، ۲)، (۵، ۳) ہیں۔

$$جواب: ۸-۱۱-۱۱ = ۱۰-۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱-۱۱$$

۱۲ — اُن خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جن میں سے ہر ایک، مثال کے مثلث کے راسوں میں سے ایک میں سے اور مقابل کے ضلع کے نقطہ وسطی میں سے گزرتا ہے۔ جواب: ۱۲-۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱-۱۱

۱۳ — اُس متوازی الاضلاع کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے اضلاع کی مساواتیں

$$۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱ = ۱۱-۱۱$$

ہیں۔

جواب: (د-ج) لا + (ا-ب) ما + ب ج-د = (د-ج) لا + (ب-ا) ما + ا ج-ب = د۔

۱۳۔ ا کی کیا قیمت ہونی چاہیے کہ تین خطوط مستقیم
 $۳ = ۲ + ۲ + ۲$ ، $۱ = ۱ + ۱ + ۱$ ، $۲ = ۳ - ۱$ ، $۳ = ۳ - ۱ - ۱$ ۔

ایک نقطہ پر مل سکیں۔

۱۵۔ نقطوں (۲، ۱) اور (۴، ۳) کو ملانے والا خط، نقطوں (۲، ۳) اور (۴، ۱) کو ملانے والے خط سے کس نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

جواب: خط کی تنصیف ہوتی ہے۔

۱۶۔ معلوم کرو کہ آیا نقطے (۲، ۳) اور (۳، ۲) خطِ مستقیم ۵-۶-۷-۸ کی ایک ہی جانب واقع ہیں یا مخالف جانبوں پر۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ نقطے (۰، ۰) اور (۴، ۳) خط ۶-۷-۸-۱ کی مخالف جانبوں پر واقع ہیں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ مبدا اُس مثلث کے اندر ہے جس کے ضلعوں کی مساواتیں

$$۱۱ + ۶۳ + ۵۵ = ۲۵ + ۶۴ + ۱۱$$

ہیں۔ [متناظر اس (۱-۲) (۳، ۴) (۴، ۳) ہیں]

۲۹۔ دو خطوط مستقیم کی مساواتیں دی گئی ہیں۔

ان خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

(۱) اگر دیے ہوئے خطوں کی مساواتیں

$$۱۰ = ۲۰ + ۱۰ + ۱۰$$

ہوں تو مطلوبہ زاویہ ۱۰ یا ۲۰ (۱۰-۲۰) ہوگا۔

کیونکہ ۱۰ اور ۲۰ وہ زاویے ہیں جو وہ عمود محور لا کے ساتھ بناتے ہیں جن کو مبدا سے ان خطوں پر علی الترتیب کھینچا گیا ہے اور یہ ظاہر ہے کہ کسی دو خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی یا متمم ہوتا ہے جو ان خطوں کے عمودوں کے درمیان بنتا ہے۔

(۲) اگر خطوں کی مساواتیں

$$ما = م + لا + ج ، ما = م + لا + ج$$

ہوں اور طہ، طہ وہ زاویے ہوں جو یہ خطوط محور لا کے ساتھ بناتے ہیں تو

$$مس طہ = م + اور مس طہ = م + اور اس لیے$$

$$مس (طہ - طہ) = \frac{م - م}{م + م}$$

$$ن سطلوبہ زاویہ مس (\frac{م - م}{م + م}) ہے۔$$

یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہونگے جبکہ

$$+ م م = .$$

اور متوازی ہونگے جبکہ

(۳) اگر خطوں کی مساواتیں

$$ولا + ب + ما + ج = . ، ولا + ب + ما + ج = .$$

ہوں تو ان مساواتوں کو شکلوں

$$ما = \frac{ا}{ب} لا - \frac{ج}{ب} اور ما = \frac{ا}{ب} لا - \frac{ج}{ب}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے (۲) کی رو سے مطلوبہ زاویہ

$$مس - ا - \frac{ا}{ب} + \frac{ج}{ب} یا مس - ا - \frac{ا}{ب} + \frac{ج}{ب}$$

ہے۔

$$خطوط ولا + ب + ما + ج = . ، اور ولا + ب + ما + ج = .$$

ایک دوسرے پر عمود ہونگے اگر

$$ولا + ب + ب = .$$

اور متوازی ہونگے اگر

$$\text{ب} - \text{آ} = \text{ب} - \text{ا} = ۰ \text{ یا } \frac{۱}{۳} = \frac{\text{ب}}{\text{آ}}$$

۳۰۔ عمودیت کی شرط صرفاً ان دو خطوں سے پوری ہوتی ہے جن کی مساواتیں

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۰ \text{ اور } \text{ب} - \text{ا} - ۱ + \text{ا} + \text{ج} = ۰$$

ہیں۔ یہ شرط ان دو خطوں

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۰ \text{ اور } \frac{\text{لا}}{۱} - \frac{\text{ا}}{\text{ب}} + \text{ج} = ۰$$

سے بھی پوری ہوتی ہے۔

پس اگر ایک دیے ہوئے خطِ ستقیم کی مساوات میں لا اور ما کے سروں کو باہم بدلا جائے (یا انہیں مغلوب کیا جائے) اور ان میں سے ایک کی علامت تبدیل کی جائے تو ایک ایسے خطِ ستقیم کی مساوات حاصل ہوگی جو دیے ہوئے خطِ ستقیم پر عمود ہوگا، اب اگر یہ خط کسی دوسری شرط کو بھی پورا کرتا ہے تو مستقل رقم کو موزوں قیمت دینی چاہیے۔

مثال ۱۔ وہ خط جو مبداء میں سے گزرتا ہے اور $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۰$ پر عمود ہے

مثال ۲۔ وہ خط جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے اور $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۰$ پر عمود ہے

نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۳۔ خطوط

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱ \text{ اور } \text{ا} - \text{ب} = ۰$$

کے درمیان حادہ نواویہ سن ۵۱ ہے۔

فان کو دلا پر اور ف م کو ول پر عمود کھینچو۔
 تب $وم = ول$ پر ون اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ
 اب ن ف، و ما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں
 زاویہ ما ول = زاویہ ما و لا + زاویہ لا ول
 $= -$ زاویہ لا و ما + زاویہ لا ول $= -$ $\frac{\pi}{2} + ع$
 ول پر ون کا ظل ون جم ع ہے اور ن ف کا ظل
 ن ف جم $(-\frac{\pi}{2} + ع)$

ہے۔ پس $وم = لا$ جم ع + ما جب ع
 ک ف = ل م = و م۔ ول
 $= لا$ جم ع + ما جب ع - ع
 پس خط لا جم ع + ما جب ع - ع = پر کسی نقطہ سے عمود کھینچا
 جائے تو اس کا طول جملہ
 لا جم ع + ما جب ع - ع
 میں نقطہ کے محدودوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خط کی مساوات $لا + ب + ما + ج = ۰$ ہو تو اس کو (دفعہ ۲۰) لکھا جاسکتا ہے (۳۵)

$\frac{ا}{لا + ب} + \frac{ب}{لا + ب} + \frac{ج}{لا + ب} = ۰$ (۲)
 میں لکھا جاسکتا ہے اور یہ شکل وہی ہے جو (۱) کی ہے۔ اس لیے اس خط پر
 نقطہ لا، ما سے کھینچے ہوئے عمود کا طول

$$\frac{ا}{لا + ب} + \frac{ب}{لا + ب} + \frac{ج}{لا + ب}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{لا، ب + ما، ج}}{\text{لا، ب}} \quad (۳) \dots \dots \dots$$

ہے۔

دوسرا طریقہ :- اس خط کی مساوات جو نقطہ ف (لا، ما) میں سے گذرتا ہے اور خط لا + ب + ما + ج = ۰ پر عمود ہے
ب (لا - لا،) - (ما - ما،) = ۰

ہے۔

اگر یہ عمودی خط دیے ہوئے خط سے نقطہ گ پر ملے اور گ کے محدود لا، ما، ہوں تو چونکہ گ دونوں خطوں پر ہے اس لیے

$$\text{ب (لا - لا،) - (ما - ما،) = ۰} \dots \dots \dots (۱)$$

اور لا، ب + ما، ج = ۰ جس کو لکھا جاسکتا ہے

$$\text{لا، - لا،) + ب (ما، - ما،) = ۰} \dots \dots \dots (۲)$$

(۱) اور (۲) کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$\text{(لا، + ب) = \{(لا، - لا،) + (ما، - ما،)\}^2 = (لا، + ب + ما، + ج)^2}$$

$$\text{اس لیے گ ف = \{(لا، - لا،) + (ما، - ما،)\}^2}$$

$$= \frac{\text{لا، + ب + ما، + ج}}{\text{لا، + ب}}$$

پس جب ایک خط مستقیم کی مساوات کو شکل لا، ب + ما،

+ ج = ۰ میں دیا جائے تو اس سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا عمودی

فاصلہ جملہ لا، ب + ما، ج میں نقطہ کے محدود درج کرنے اور لا، ما، کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر المربع سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر $\angle A + \angle B$ کو ہمیشہ مثبت فرض کیا جائے تو خط کی مثبت جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول مثبت ہوگا اور منفی جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول منفی ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۲۶]

۳۲۔ ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کی تصنیف کریں۔ (۳۶)

اگر دو خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کے ناصف کھینچے جائیں اور ان ناصفوں میں سے ایک پر کے کسی نقطے سے خطوں پر عمود ڈالے جائیں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ عمود مقدار میں ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔ پس اگر خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$(1) \quad \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$(2) \quad \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

ہوں اور دونوں ناصفوں میں سے کسی ایک پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو

$$\frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2}$$

مقدار میں مساوی ہونے چاہئیں۔
اس لیے نقطہ (لا، ما) خطوط مستقیم

$$(3) \quad \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} \pm \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = 180^\circ$$

میں سے کسی ایک پر ہے۔

اس لیے وہ دو خطوط جو (۳) سے حاصل ہوتے ہیں مطلوبہ ناصف ہیں۔ ہم ان دونوں ناصفوں میں تیز کر سکتے ہیں کیونکہ اگر ہم دونوں نسب نماؤں کو مثبت لیں اور اگر (۳) میں اوپر کی علامت لی جائے تو $\angle A + \angle B + \angle C$ اور

ا + ب + ج دونوں یا تو مثبت ہونے چاہئیں یا دونوں منفی۔

پس
$$\frac{ا + ب + ج}{۲} = \frac{ا + ب + ج}{۲} + \frac{ا + ب + ج}{۲} \dots (۴)$$

میں ہر نقطہ خطوط (۱) اور (۲) دونوں کی مثبت جانب ہے یا دونوں کی منفی جانب۔

اگر مساواتوں کو اس طرح لکھا جائے کہ مستقل ارتقام دونوں مثبت ہوں تو میدان دونوں خطوں کی مثبت جانب ہوگا اور اس لیے (۴) اس زاویہ کا نصف ہوگا جس میں میدان واقع ہے۔

مثال ۱۔ خطوط ۱۲-۱۳ + ۱ = ۰ اور ۱۲-۱۱ + ۵ + ۱۳ = ۰ کے

درمیانی زاویوں کے نصف
$$\frac{۱۲-۱۱+۵}{۵} = \frac{۱۳+۵+۱۲}{۱۳}$$
 سے حاصل ہوتے

ہیں اور اوپر کی علامت لینے سے وہ نصف ملتا ہے جس میں میدان واقع ہے۔

حسب ذیل مثال اہم ہے۔

مثال ۲۔ ایک مثلث ا ب ج کے راس ا ب ج کے محدد

علی الترتیب (۲۱) (۲۵) (۲۸) اور (۲۱) (۲۵) ہیں۔ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز معلوم کرو۔

اضلاع ب ج ج ا ب کی مساواتیں

$$۱۳+۱۶+۱۲=۳۵۳، ۱۹-۸-۳=۰، اور ۱۲-۱۳+۴=۰$$

ہیں۔ اگر ان مساواتوں کے دائیں جانبی ارکان میں ا ب ج کے محددوں کو درج کیا جائے تو نتائج علی الترتیب - + - ہوں گے۔

اب اضلاع کی مساواتوں میں تمام ارتقام کی علامتیں (اگر

ضرورت ہو) تبدیل کرو تاکہ ہر راس مقابل کے ضلع کی مثبت جانب ہو۔ تب مساواتیں ہوں گی

$$۱۳-۱۶+۱۲=۳۵۳، ۱۹-۸-۳=۰، اور ۱۲-۱۳+۴=۰$$

$$\frac{۳-۶۸-۱۱۹}{۲۸+۲۱۹}\sqrt{\quad} + = \frac{۴۵۳+۶۱۶-۱۱۳}{۲۱۶+۲۱۳}\sqrt{\quad} \text{ پس}$$

کو زاویہ ج کا اندرونی ناصف ہونا چاہیے کیونکہ اس مساوات کے دونوں ارکان مثبت ہونے چاہئیں یا دونوں منفی اور اس لیے ناصف پر کا کوئی نقطہ ج اور ج ب دونوں کی مثبت جانب یا دونوں کی منفی جانب ہونا چاہیے۔

$$\frac{۳-۶۸-۱۱۹}{۲۸+۲۱۹}\sqrt{\quad} + = \frac{۴-۶۴+۱۱}{۲۴+۲۱}\sqrt{\quad} \text{ اسی طرح}$$

زاویہ ج کا اندرونی ناصف ہے۔

پس اندرونی دائرہ کا مرکز مساواتوں

$$\frac{۴-۶۴+۱۱}{۱۷}\sqrt{\quad} = \frac{۳-۶۸-۱۱۹}{۱۷۵} = \frac{۴۵۳+۶۱۶-۱۱۳}{۱۷۵}$$

سے حاصل ہو گا چنانچہ یہ نقطہ (۱۱۵، ۱۱) ہے۔

۳۳۔ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

سطویہ مساوات کو حاصل کرنے کا سب سے واضح طریقہ یہ ہے کہ دیے ہوئے خط مستقیم کا نقطہ تقاطع (لا، ما) معلوم کیا جائے اور پھر شکل ما-ما = م (لا-لا) استعمال کی جائے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات کی شکل ہے۔ لیکن حسب ذیل طریقہ بعض اوقات قابل ترجیح قرار پاتا ہے۔

فرض کرو کہ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$(۱) \dots\dots\dots = ۰ \text{ } ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$$

$$(۲) \dots\dots\dots = ۰ \text{ } ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$$

ہیں۔ اب مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots = ۰ \text{ } ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$$

پر غور کرو۔ یہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے کیونکہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے، نیز اگر (لا، ما) وہ نقطہ اہو جو دیے ہوئے خطوط مستقیم میں مشترک ہے تو حاصل ہونا چاہیے

$$لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$لا + ب + ما + ج = ۰ \quad لا + ب + ج = ۰ \quad (لا + ب + ما + ج) = ۰$$

اس آخری مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (لا، ما) خط (۳)

پر بھی ہے۔

پس (۳) ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ نیز لہ کو موزوں قیمت دینے سے یہ مساوات کسی دوسری بشرط کو بھی پوری کر سکتی ہے، مثلاً وہ کسی دوسرے دیے ہوئے نقطہ میں سے گذرنے والے خط کو تعبیر کر سکتی ہے۔ اس لیے مساوات (۳) لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے ان تمام خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔

مثال۔ اس خط کی مساوات معلوم کرو جو مبداء کو خطوط لا + ۲ + ۵ = ۳۔

$$لا + ۳ - ۲ - ۵ = ۰ \quad \text{کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے۔}$$

کوئی خط جو نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے

$$لا + ۲ - ۵ + ۳ = ۰ \quad (لا + ۲ - ۵ + ۳) لہ + ۲ - ۵ + ۳ = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ نقطہ (۰، ۰) میں سے گذرے گا اگر

$$۲ - ۵ + ۳ = ۰ \quad یا \quad ۲ = ۰$$

$$لا + ۲ - ۵ + ۳ = ۰ \quad (لا + ۲ - ۵ + ۳) لہ + ۲ - ۵ + ۳ = ۰$$

$$لا + ۲ - ۵ + ۳ = ۰$$

یا

مطلوبہ مساوات ہے۔

۳۴۔ اگر تین خطوط مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب

$$لا + ب + ما + ج = ۰, \quad لا + ب + ما + ج = ۰, \quad لا + ب + ما + ج = ۰$$

ہوں اور اگر ہم تین مستقلات لہ، مہ، نہ معلوم کر سکیں ایسے کہ رشتہ
 لہ (لا + اب + ما + ج) + مہ (لا + اب + ما + ج) + نہ (لا + اب + ما + ج) = (۱)
 متماثل درجہ ہو یعنی لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہو تو تین
 خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ملیں گے۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدود خطوں کی کسی
 دو مساواتوں کو پورا کرتے ہوں تو رشتہ (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ یہ محدود تیسری
 مساوات کو بھی پورا کریں گے۔

یہ اصول اکثر استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال۔ دو تین خطوط مستقیم جو ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے
 ضلعوں کے تقاطعوں سے ملاتے ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

فرض کرو کہ راس 'د' ب 'ج' علی الترتیب (لا، ما)، (لا، ما)، اور
 (لا، ما) ہیں۔ اب ب ج، ج د، د ب کے تقاطعوں 'ع'، 'ف'، 'غ' علی الترتیب
 $(\frac{لا + لا}{۲}, \frac{ما + ما}{۲})$ ، $(\frac{لا + لا}{۲}, \frac{ما + ما}{۲})$ ، $(\frac{لا + لا}{۲}, \frac{ما + ما}{۲})$

ہوں گے۔ اس لیے ا د کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{۲} = \frac{ما - ما}{۱ - \frac{لا + لا}{۲}}$$

یا $(لا + لا - لا) - (لا + ما - ما) + (لا + ما - ما) - (لا + لا - لا) = ۰$
 ہوگی۔ اسی طرح ب ج، ج د، د ب کی مساواتیں علی الترتیب

$$۰ = (لا + لا - لا) - (لا + ما - ما) + (لا + ما - ما) - (لا + لا - لا)$$

اور $(لا + لا - لا) - (لا + ما - ما) + (لا + ما - ما) - (لا + لا - لا) = ۰$
 ہوں گی۔

اب چونکہ یہ تین مساواتیں متماثل معدوم ہوتی ہیں جبکہ انہیں باہم جمع کیا جاتا ہے

اس لیے ان سے تعبیر شدہ تین خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔
 [(۱) میں اندراج کرنے سے آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ ث
 جس کے محدود $\frac{1}{2}$ (لا + لا + لا) ، $\frac{1}{2}$ (ما + ما + ما) میں (د) پر ہے اور اس نتیجہ
 کے تشاکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ث ، ب ح اور ج ف پر بھی ہے۔]

مثالیں

(۴۰)

۱۔ وہ زاویے معلوم کرو جو خطوط مستقیم کے حسب ذیل زوجوں کے
 درمیان ہیں:

$$(۱) \quad ۵ + ۷۲ = ۷۴ \quad ۷۴ = ۷۳ + ۱$$

$$(۲) \quad ۷۳ + ۱ = ۷۴ \quad ۷۴ = ۷۳ + ۱$$

$$(۳) \quad ۷۳ + ۱ = ۷۴ \quad ۷۴ = ۷۳ + ۱$$

جواب: (۱) ۷۴ ، (۲) ۷۴ ، (۳) ۷۴

۲۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو $۷۳ + ۱ = ۷۴$ پر عمود ہو
 اور نقطہ (۱، ۷۴) میں سے گزرے۔ جواب: $۷۳ + ۱ = ۷۴$

۳۔ ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو مبدأ میں سے گزریں اور خطوط
 $۷۳ + ۱ = ۷۴$ اور $۷۳ + ۱ = ۷۴$ پر عمود ہوں۔ ان نقطوں کے محدود
 معلوم کرو جہاں یہ عمود خطوں سے ملتے ہیں اور ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملانے والا
 خط کی مساوات $۷۳ + ۱ = ۷۴$ ہے۔

۴۔ خطوں $۷۳ + ۱ = ۷۴$ اور $۷۳ + ۱ = ۷۴$ کے عمودی فاصلے معلوم کرو۔
 جواب: ۲

۵۔ ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو علی الترتیب نقاط (۱، ۷۴) اور
 (۷۳، ۱) میں سے گزریں اور $۷۳ + ۱ = ۷۴$ کے متوازی ہوں۔ ان

خطوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔ جواب: $\frac{1}{2}$
 ۶۔ ان دو خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۷۳، ۱) میں سے

گزریں اور لا + ۲ = ۰ کے ساتھ ۵ کا زاویہ بنائیں -

جواب: لا - ۳ = ۰، لا + ۳ = ۰، لا + ۳ = ۰

۷۔ ان دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو لا + ۴ = ۰ کے متوازی ہوں اور نقطہ (۱، -۱) سے اکائی فاصلہ پر واقع ہوں -

جواب: لا + ۴ = ۰، لا + ۴ = ۰، لا + ۴ = ۰

۸۔ اس خط کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ کو لا - ۴ = ۰ اور لا + ۲ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے -

جواب: لا + ۱۱ = ۰

۹۔ اس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) کو لا + ۳ = ۰ اور لا - ۲ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے -

جواب: لا + ۲۶ = ۰، لا + ۲۶ = ۰، لا + ۲۶ = ۰

۱۰۔ اس خط کی مساوات معلوم کرو جو لا - ۱ = ۰ اور لا + ۵ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے اور لا + ۳ = ۰ پر عمود ہو -

جواب: لا - ۸۸ = ۰، لا - ۸۸ = ۰، لا - ۸۸ = ۰

۱۱۔ ایک مثلث کے راس (۱، ۲)، (۲، ۳) اور (۱، -۱) ہیں - اس مثلث کے اضلاع پر مبدأ سے عمود کھینچے گئے ہیں - ان عمودوں کے طول معلوم کرو -

جواب: $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{13}$ ، $\frac{1}{26}$

۱۲۔ ان خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوطِ مستقیم لا + ۳ = ۰ اور لا - ۲ = ۰ کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں،

اور نیزہ شکل کھینچو جو ان چار خطوں کو تعبیر کرے -

جواب: لا + ۱۲ = ۰، لا + ۱۲ = ۰، لا + ۱۲ = ۰

۱۳۔ خطوط لا + ۳ = ۰، لا + ۳ = ۰، لا + ۳ = ۰ سے بنے ہوئے مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ نقطہ $(\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$ پر متقاطع ہوتے ہیں -

۱۴۔ خطوط لا - ۱ = ۰، لا + ۱ = ۰، لا - ۱ = ۰ سے بنے ہوئے

جواب: ج

مثلث کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۵ - ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوط $ما - لا$ سے $لا - لا$ =

اور $لا - لا$ سے بنتا ہے $\frac{۲}{۳}$ ہے۔

۱۶ - اس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جو خطوط $ما - لا$ سے $لا - لا$ =

جواب: $\frac{۳۳۸}{۲}$

۱۷ - ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوط $ما - لا$ سے $لا - لا$ =

$لا - لا$ سے بنتا ہے

$$\frac{\frac{1}{2} (ج - ج_۲)}{۱۲ - ۲۲}$$

ہے۔

۱۸ - ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوط مستقیم $ما - لا$ سے $لا - لا$ =

$لا - لا$ سے بنتا ہے

$$\frac{\frac{1}{2} (ج - ج_۲)}{۲ - ۱۲} + \frac{\frac{1}{2} (ج - ج_۲)}{۱۲ - ۲۲} + \frac{\frac{1}{2} (ج - ج_۲)}{۲ - ۱۲}$$

[مثال ۱۷ استعمال کرو]

ہوگا۔

۱۹ - ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم پر

اس نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا

طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۳۵ - ن ویں درجہ کی تجانس مساوات، مبداؤں سے

گزرنے والے ن خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔

فرض کرو کہ مساوات

$$۱۰۰ + ۱۰۰ب + ۱۰۰ج + ۱۰۰د + ۱۰۰ه = ۱۰۰$$

ہے۔

ان کے تقسیم کرو تو

$$(2) \dots = \mathcal{K} + \dots + \left(\frac{1}{y}\right) \mathcal{J} + \left(\frac{1}{y}\right) \mathcal{B} + \left(\frac{1}{y}\right) \mathcal{A}$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں m_1 ، m_2 ... m_n ہیں۔
تب مساوات بالا وہی ہے جو

$$= (r - \frac{b}{d}) \dots (r - \frac{b}{d}) (r - \frac{b}{d}) (r - \frac{b}{d})^2$$

ہے اور اس لیے پوری ہوتی ہے جبکہ

$$م - \frac{b}{u} = م - \frac{b}{u} \text{ و غیره}$$

اور وہ کسی اور صورتوں میں یوری نہیں ہوتی۔

اس لیے اُس طریق پر کے تمام نقطے جو (۱) سے تعبیر ہوتا ہے ان خطوط مستقیم

$$-m_1 = \dots -m_2 = \dots -m_3 = \dots$$

۱۱ میں سے ایک یا دو سرے پر ہیں۔

۳۶۔ دو خطوط مستقیم کے درمیان زاویہ معلوم کرنا جو مساوی

۱) لا + ب لا + ما + ج ما = سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اگر خطوط MA, MB, MC ہوں تو $(MA, MB, MC) = (MA, MB, MC) = 1$.

وہی ہے جو دی ہوئی مساوات

$$= 1 + \frac{2}{j} + \frac{1}{j^2}$$

-4-

$$(1) \dots \dots \dots \frac{b^2}{c} = r^2 + 1^2 \therefore$$

اذا $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (2)

اگر خطوط کے درمیان زاویہ طہ ہو تو

$$\text{مس طہ} = \frac{۲ \text{ ب}^۲ - \text{ج}^۲}{۲ \text{ م} + ۲ \text{ ج} + ۱} = \frac{۲ \text{ ب}^۲ - \text{ج}^۲}{۲ \text{ ج} + ۱} \quad (۱) \text{ اور } (۲) \text{ سے}$$

اگر ب۔ ج مثبت ہے تو خطوط حقیقی ہیں، یہ خطوط منطبق ہونگے
اگر ب۔ ج =۔

اگر ب۔ ج منفی ہے تو خطوط خیالی ہیں لیکن حقیقی نقطہ (۰،۰) میں سے گذرتے ہیں۔

اگر (ج + ۱) =۔ تو خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے
یعنی لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہو تو خطوط علی القوائم ہوں گے۔

۳۷۔ وہ شرط معلوم کرو کہ دوسرے درجہ کی عام مساوات
دو خطوط استقیم کو تعبیر کر سکے۔

دوسرے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۳ \text{ ب} + ۴ \text{ گ} + ۵ \text{ ف} + ۶ \text{ ج} = ۰ \quad (۱) \dots\dots\dots$$

ہے۔ اگر یہ مساوات متماثل
(۱ لا + ۲ ما + ۳ ب) (۱ لا + ۲ ما + ۳ ب) = ۰ (۲) \dots\dots\dots

کے معادل ہو تو (۱) اور (۲) میں سروں کو مساوی رکھنے سے

$$۱ \text{ لا} = ۱ \text{ لا} \quad ۲ \text{ ما} = ۲ \text{ ما} \quad ۳ \text{ ب} = ۳ \text{ ب} \quad ۴ \text{ گ} = ۴ \text{ گ} \quad ۵ \text{ ف} = ۵ \text{ ف} \quad ۶ \text{ ج} = ۶ \text{ ج}$$

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۳ \text{ ب} = ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۳ \text{ ب} \quad ۴ \text{ گ} = ۴ \text{ گ} \quad ۵ \text{ ف} = ۵ \text{ ف} \quad ۶ \text{ ج} = ۶ \text{ ج}$$

$$۴ \text{ گ} = ۴ \text{ گ} = ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۳ \text{ ب} + ۴ \text{ گ} + ۵ \text{ ف} + ۶ \text{ ج} = ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۳ \text{ ب} + ۴ \text{ گ} + ۵ \text{ ف} + ۶ \text{ ج}$$

$$۲ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۳ \text{ ب} + ۴ \text{ گ} + ۵ \text{ ف} + ۶ \text{ ج} = ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۳ \text{ ب} + ۴ \text{ گ} + ۵ \text{ ف} + ۶ \text{ ج}$$

$$۲ = ۱ ب ج + ۱ (۴ ف - ۲ ب ج) + ب (۴ گ - ۲ ج ۱)$$

$$+ ج (۴ ه - ۲ ب) (ب)$$

پس ۱ ب ج - ۱ ف - ب گ - ج ه + ۲ ف گ ه = ۰ ... (۳) مطلوبہ شرط ہے۔

اگر لا اور ما دونوں کے سر صفر نہ ہوں تو اوپر کے نتیجہ کو زیادہ آسانی سے اس طرح حاصل کیا جاسکتا ہے کہ مساوات کو لایا میں دو درجی مساوات سمجھ کر حل کیا جائے۔

فرض کرو کہ ۱ صفر نہیں ہے تو اگر ہم مساوات کو لایا میں دو درجی مساوات سمجھ کر حل کریں تو

$$۱ لا + ۲ ه + گ = \pm \sqrt{۱ (۴ ب - ۲ ما + ۲ (۴ گ - ۱ ف) + ۱ ج}$$

اب اس غرض کے لیے کہ یہ شکل ۱ لا + ب ما + ج = ۰ میں تحویل ہو سکے یہ ضروری اور کافی ہے کہ علامت جذر کے اندر کا جملہ کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط

$$(۴ ب - ۲ ما + ۲ (۴ گ - ۱ ف) = ۰$$

ہے جس کو ۱ سے تقسیم کرنے کے بعد وہ شرط (۳) کے مماثل ہو جاتی ہے۔

۳۸ — ان خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو

$$۱ لا + ۲ ه + ۱ ما + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ... (۱)$$

$$ل لا + م ما = ۱ ... (۲)$$

کے مشترک نقطوں کو مبداء سے ملانے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات (۱) کو مساوات (۲) کے ذریعہ دوسرے درجے کی متجانس مساوات بناؤ تو حاصل ہوگا

(۴۴)

$$۱ لا + ۲ ه + ۱ ما + ب ما + ۲ (گ لا + ف ما) + ج (ل لا + م ما) = ۰ ... (۳)$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔
 کیونکہ مساوات (۳) متجانس ہونے کی وجہ سے وہ مبدا میں گزرنیوالے
 خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے (دفعہ ۳۵)۔ یہ معلوم کرنے کے لیے کہ خطوط (۳)
 خط (۲) سے کہاں متقاطع ہوتے ہیں (۳) میں ل + لا + م + ما = ا رکھو تو رشتہ
 (۱) یورابوگا جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خطوط (۳) (۱) اور (۲) کے
 مشترک نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

مثال۔ وہ خطوط معلوم کرو جو

$$۲ لا + ۲ لا + لا - لا = ۱ + لا + ۱ = ۰ \text{ اور } ۳ لا + لا - ما = ۱ - ۱ = ۰$$

کے نقاط تقاطع کو مبدا سے ملاتے ہیں۔

خطوں کی مساوات

$$۲ لا + ۲ لا + لا - لا = ۳ لا + لا + ما + (۳ لا + لا + ما) = ۰$$

ہے۔ یہ مساوات

$$لا - ما - ۵ لا = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے۔ پس خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۳۹۔ اُن خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو دو خطوط مستقیم

$$۱ لا + ۲ لا + ما + ب ما = ۰$$

کے درمیانی زاویوں کی تفسیف کریں۔

اگر دیے ہوئے خطوط محور لا کے ساتھ زاویے طم اور طہ بناتے

ہیں تو

$$(ما - لا مس طہ) (ما - لا مس طہ) = ۰$$

وہی ہے جو دی ہوئی مساوات ہے۔ پس

$$مس طہ + مس طہ = - \frac{۲۰}{ب} \dots \dots (۱)$$

مس طہ مس طہ = $\frac{ک}{ب}$ ، (۲)

اگر طہ زاویہ ہو جو ناصفوں میں سے ایک، خور لا کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\frac{\pi}{2} + \frac{طہ + طہ}{2} = طہ \text{ یا } \frac{طہ + طہ}{2} = طہ$$

اور ان میں سے کسی صورت میں

$$\text{مس } ۲ طہ = \text{مس } (طہ + طہ)$$

$$\frac{\text{مس } ۲ طہ}{۱ - \text{مس } طہ} = \frac{\text{مس } طہ + \text{مس } طہ}{۱ - \text{مس } طہ}$$

یا

اگر ایک ناصف پر (لا، ما) کوئی نقطہ ہو تو $\frac{ما}{لا} = \text{مس } طہ$

(۵)

$$\frac{\text{مس } طہ + \text{مس } طہ}{۱ - \text{مس } طہ} = \frac{\frac{۲}{لا}}{۱ - \frac{۲}{لا}}$$

اس لیے (۱) اور (۲) کو استعمال کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$\frac{۲}{۱ - ب} = \frac{لا ۲}{لا - ۲}$$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{لا ۲}{۲} = \frac{لا - ۲}{۱ - ب}$$

ماثل ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ دو خطوط مستقیم لا، ۲ لا ما ق ط + لا = ایک دوسرے کے

ساتھ زاویہ طہ بناتے ہیں۔

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا + لا۲ - ما + ۲ + لا۳ - ما۳ = ۱۸$ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔
 ۳۔ ثابت کرو کہ حسب ذیل مساواتوں میں سے ہر ایک 'خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے۔ ہر زوج کا درمیانی زاویہ بھی معلوم کرو۔

$$(۱) (لا - لا۲) (لا - لا۳) = ۰, (۲) لا۲ - لا۳ = ۰,$$

$$(۳) لا۲ = ۰, (۴) لا۲ - لا۳ - ما۳ = ۲ + ما۲ = ۰,$$

$$(۵) لا۲ - لا۳ + ما۲ = ۰, (۶) لا۲ - لا۳ + ما۲ + لا۳ - ما۳ = ۲ = ۰,$$

$$(۷) لا۲ + لا۳ - ما۳ = ۲ = ۰,$$

۴۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$$لا۲ - لا۳ + ما۲ + لا۳ - ما۳ = ۲ + لا۲ = ۰$$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی؟ ثابت کرو کہ اگر یہ مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو ان کا درمیانی زاویہ مس' $\frac{1}{2}$ ہے

جواب : لہ = ۲

۵۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$$لا۲ + لا۳ - ما۳ + لا۳ - ما۳ = ۲ + ما۲ = ۰$$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی؟ جواب : لہ = ۱۰ یا ۳۵

۶۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$$لا۲ + لا۳ - ما۳ + لا۳ - ما۳ = ۲ + ما۲ = ۰$$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ یہ خطوط حقیقی ہیں یا خیالی؟

جواب : ۲۸

مثال ۷۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات $لا۲ + لا۳ - ما۳ + لا۳ - ما۳ = ۲ + ما۲ = ۰$

جواب : لہ = $\frac{15}{4}$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی؟

۸۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو

$$لا۲ + لا۳ - ما۳ + لا۳ - ما۳ = ۲ + ما۲ = ۰$$

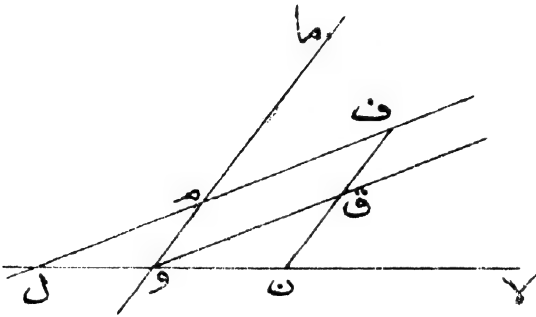
کے مشترک نقطوں کو مبداء سے ملاتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوم ہیں۔

خطوط $لا۲ + لا۳ - ما۳ + لا۳ - ما۳ = ۲ + ما۲ = ۰$ ہیں۔

مائل محاور

(۲۶)

۴۰۔ خطِ مستقیم کی مساوات اُن محوروں کے حوالے سے معلوم کرنا جو ایک دوسرے سے زاویہ سہ پر مائل ہوں۔



فرض کرو کہ l مرف کوئی خطِ مستقیم ہے جو محوروں سے نقاط l پر ملتا ہے۔

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ F کے عہد (لا، ما) ہیں۔
 F کو محور ma کے متوازی اور $وق$ کو خط l مرف کے متوازی کھینچو حسب شکل۔ تب

$$n = f + q + c \text{ 'ف' } \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{لیکن } \frac{n}{و} = \frac{جب (سہ - ن وق)}{جب ن وق} = \frac{مستقل}{مستقل} = م \text{ (فرض کرو)}$$

$$\text{اور } \frac{ق}{ف} = \frac{وم}{مستقل} = ج \text{ (فرض کرو)}$$

اس لیے (۱) ہو جاتا ہے $ما = م لا + ج جو$ مطلوبہ مساوات ہے۔
 اگر طہ وہ زاویہ ہو جو خط محور لا کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{م}} = \text{جب (سہ - ط)}$$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م جب سہ}}{\text{م + جم سہ}}$$

۴۱۔ دفعاتِ مابقی کے متعدد نتیجے درست رہتے ہیں خواہ محاور قائم ہوں یا مائل۔ ان نتیجوں کو آسانی سے پہچان لیا جاسکتا ہے۔

۴۲۔ دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں، زاویہ سہ پر مائل محوروں کے حوالے سے دیکھی ہیں۔ ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

اگر خطوں کی مساواتیں

ما = م لا + ج ، ما = م لا + ج
ہوں اور اگر طہ اور طہ وہ زاوے ہوں جو وہ علی الترتیب محور لا کے ساتھ بناتے ہیں تو (دفعہ ۴۰)

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م جب سہ}}{\text{م + جم سہ}} \text{ اور } \text{مس ط} = \frac{\text{م جب سہ}}{\text{م + جم سہ}}$$

اس لیے مس (طہ - طہ) = $\frac{(م - م) \text{ جب سہ}}{(م + م) \text{ جم سہ} + م م}$ (۱)
یا خطوں کا درمیانی زاویہ

$$\text{مس} = \frac{(م - م) \text{ جب سہ}}{(م + م) \text{ جم سہ} + م م}$$

ہے۔

یہ خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر

(۲) $(م + م) \text{ جم سہ} + م م = ۰$ ،
اگر خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ \quad ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

ہوں اور ان کے درمیان زاویہ طہ ہو تو $م = - \frac{۱}{ب}$ اور $م = - \frac{۱}{ب}$ اور اسلئے ان قیمتوں کو (۱) میں درج کرنے سے

$$- (۱ + ب - ۱ + ب) جب سے$$

$$مس طہ = \frac{- (۱ + ب - ۱ + ب) جب سے}{۱ + لا + ب + ما + ج = ۰}$$

یہ خط ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اگر

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ \quad ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

پس کوئی خط جو $۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$ پر عمود ہے اس کی مساوات

$$(ب - ۱ + جم سے) لا - (۱ - ب + جم سے) ما = مستقل$$

ہے۔ بالخصوص خطوط $لا + ما + جم سے = ۰$ اور $ما + لا + جم سے = ۰$ علی الترتیب محوروں $ما = ۰$ اور $لا = ۰$ کے عمود وار ہیں۔

$$۳ - خط \quad ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

(۴۸)

سے کسی نقطہ (لا، ما) کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خط محاور لا اور ما کو علی الترتیب نقاط ک اور ل پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد لا، ما ہیں اور فن وہ عمود ہے جو اس سے خط ل ک پر کھینچا گیا ہے۔ تب

$$۵ فل ک = ۵ فل و + ۵ ف و ک - ۵ ل و ک \dots (۱)$$

$$\therefore فن \times ل ک = ول \times لا جب سے + وک \times ما جب سے - وک \times ول$$

$$x جب سے \dots (۲)$$

اگر ہم مثلث کے رقبہ کی علامت کے لحاظ سے کوئی قرارداد اختیار نہ کریں تو نقطہ اور خط کے مختلف محلوں کے لیے رشتہ (۱) میں ترمیم کرنی ہوگی، لیکن مساوات (۲) ہر صورت میں درست رہتی ہے۔ طالب علم کو

پا ہے کہ مختلف شکلیں کھینچ کر اس بیان کی صداقت کا بطور خود یقین کر لے۔

$$\begin{aligned} \text{اب وک} &= \frac{\text{ج}}{\text{ب}} \text{ 'ول} = \frac{\text{ج}}{\text{ب}} \\ \text{نیز لک} &= \text{وک} + \text{ول} - \text{وک} \times \text{ول جم} \\ &= \frac{\text{ج}}{\text{ب}} (\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} \times \text{ب جم}) \end{aligned}$$

(۲) سے

$$\text{فان} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} \times \text{ب جم}}$$

دوسرا طریقہ

اس خط کی مساوات جو نقطہ ف (لا، ما) میں سے گذرتا ہے اور خط
 $\text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = 0$ پر عمود ہے

$$(\text{ب} - \text{ا} \text{ جم}) (\text{لا} - \text{لا}) - (\text{ا} - \text{ب} \text{ جم}) (\text{ما} - \text{ما}) = 0$$

ہے۔ فرض کرو کہ عمود کے پائیں ن کے محدود لا، ما ہیں، پس ن دونوں خطوں پر
 ہے اور اس لیے

$$(\text{ب} - \text{ا} \text{ جم}) (\text{لا} - \text{لا}) - (\text{ا} - \text{ب} \text{ جم}) (\text{ما} - \text{ما}) = 0 \dots (۱)$$

اور $\text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = 0$ جس کو لکھا جاسکتا ہے

$$(\text{ب} - \text{ا} \text{ جم}) (\text{لا} - \text{لا}) + (\text{ب} - \text{ب} \text{ جم}) (\text{ما} - \text{ما}) = 0 \dots (۲)$$

$$+ \text{ج} \dots \dots \dots (۲)$$

(۱) اور (۲) کا مربع لیکر جمع کرنے سے

$$(\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} \times \text{ب جم}) \{ (\text{لا} - \text{لا})^2 + (\text{ما} - \text{ما})^2 \} + 2(\text{لا} - \text{لا})(\text{ما} - \text{ما}) \times \text{جم} = 0$$

$$= \text{جم} (\text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج})$$

پس $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10} = \text{ن ف}$ جب سے

* ۴۴ - خطوط

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا جبکہ محاور زاویہ سے پر مائل ہوں -

اگر خطوط $م = م$ لا اور $م = م$ لا

ہوں تو $م + م = \frac{55}{2}$

اور $م = م = \frac{55}{2}$

اس لیے $م - م = \frac{55}{2} - \frac{55}{2} = 0$

لیکن $م = م$ لا اور $م = م$ لا کا درمیانی زاویہ

مست [دفعہ ۴۲] $\frac{(م - م) \text{ جب سے } 1 + (م + م) \text{ جم سے } م + م}{}$

ہے، اس لیے مطلوبہ زاویہ

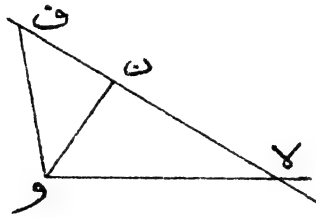
مس $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10} = \text{مس}$ جب سے

خطوط $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اگر $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ جم سے

قطبی محد

۴۵ - خطِ ستیقم کی قطبی مساوات معلوم کرنا -

فرض کرو کہ مبدا سے دیے ہوئے خط پر عمود و ن ہے اور فرض کرو کہ
 و ن = ع اور لا و ن = ع۔
 فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ ف ہے اور اس کے محدد ر، ط ہیں۔



تب شکل میں زاویہ ن و ف، (طہ - عہ) ہے اور
 و ف جم ن و ف = و ن
 اس لیے مطلوبہ مساوات
 ر جم (طہ - عہ) = ع

ہے۔

اس مساوات کو مساوات لاجم عہ + ماجب عہ = ع میں لا کی
 بجائے ر جم طہ اور ما کی بجائے ر جب طہ رکھ کر بھی ما حل کیا جاسکتا ہے۔

۴۶۔ دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے
 خط کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف، ق اور ان کے محدد علی الترتیب ر، طہ اور ر، طہ ہیں۔
 فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ س ہے اور اس کے محدد ر، طہ ہیں۔
 اب چونکہ

$$\Delta ف و ق + \Delta ق و س - \Delta ف و س = 0$$

اس لیے ر ر جب (طہ - طہ) + ر ر جب (طہ - طہ) - ر ر جب (طہ - طہ) = 0
 اس لیے مطلوبہ مساوات

رَ رَجِب (طہ - طہ) + رَ رَجِب (طہ - طہ) = .

مثالیں

۴۔

۱۔ ثابت کر دو کہ وہ خطوط جو مساوات $ما - لا = ۰$ سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں خواہ محاور کے درمیان زاویہ کچھ ہی ہو۔

۲۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۲) میں سے گزرے اور خط $لا + ۲ = ما$ کو علی القوائم قطع کرے، یہ معلوم ہے کہ محوروں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے۔

جواب: $لا = ۱$
۳۔ وہ زاویہ معلوم کرو جو خط $ما = ۵ + لا + ۶$ محور $لا$ کے ساتھ بناتا ہے جبکہ محاور ایک ایسے زاویہ پر مائل ہوں جس کی جیب تمام $\frac{۳}{۵}$ ہے۔

جواب: ۵۴°
۴۔ اگر خطوط $ما = م + لا + ج$ اور $ما = م + لا + ج$ ، محور $لا$ کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو

$م + م + ۲م + م = جم$ سے $۰ =$
۵۔ اگر خطوط $(لا + ۲ + ب لا + ما + ج ما = ۰)$ ، محور $لا$ کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو $ب = (جم)$ سے۔

۶۔ ثابت کر دو کہ وہ خطوط جو مساوات $لا + ۲ + لا + ما جم + ما جم ۲ = ۰$

سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں، محاور زاویہ ۳۰° پر مائل ہیں۔
۷۔ اس خط پر جو نقطوں $(ر، طہ)$ اور $(ر، طہ)$ کو ملاتا ہے قطب سے عمود کھینچا گیا ہے۔ اس عمود کے پائین کے قطبی مجہد معلوم کرو۔

۴۷۔ (۵۱) حسب ذیل مثالوں سے اہم امور کی توضیح ہوتی ہے:-

(۱) ایک مثلث کے اضلاع پر انہیں وتر مان کر متوازی الاضلاع کھینچے گئے ہیں جن کے ضلع دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے

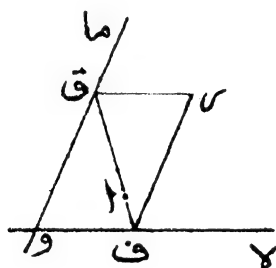
ان تین مساواتوں کا مجموعہ متماثلًا معدوم ہوتا ہے اس لیے یہ تین خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ [دفعہ ۳۴]

(۲) ایک ثابت نقطہ A میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے ہوئے خطوط EF و GH کو علی الترتیب نقطوں F و G پر قطع کرتا ہے۔ متوازی الاضلاع AF و AG کی تکمیل کی گئی ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

(۵۲) دیے ہوئے دو خطوں کو محاور تسلیم کرو اور فرض کرو کہ ا کے محذور ف گ ہیں
فرض کرو کہ ف ق کی مساوات، اس کے ممکنہ محلوں میں سے کسی ایک میں،

$$(1) \dots\dots\dots' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

ہے۔ تب نقطہ ص کے محدود اور بہ ہوں گے۔



لیکن چونکہ خط ف ق نقطہ (ف، گ) میں سے گزرتا ہے اس لیے قیمتیں
لا = ف، ما = گ مساوات (ا) کو پورا کرتی ہیں۔ اس لیے

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \frac{ف}{ع} + \frac{ج}{ع}$$

پس نقطہ س کے معدومہ اور بہ مارشتہ (۲) کو ہمیشہ پورا کرتے ہیں۔ نقطہ
س کے معدومہ کو س اور بہ کی بجائے لا اور ما کہنے سے اس کے طریق کی مساوات

$$1 = \frac{f}{l} + \frac{v}{u}$$

معلوم ہوتی ہے۔

(۳) ایک ثابت نقطہ و میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے ہوئے متوازی خطوط مستقیم کو علی الترتیب نقطوں ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ ف اور ق میں سے خطوط مستقیم مستقل سمتوں میں کھینچے گئے ہیں جو نقطہ سر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سر کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

ثابت نقطہ کو مبدا اور محور ما کو متوازی خطوط مستقیم کے متوازی لو۔ فرض کرو کہ ان متوازی خطوط مستقیم کی مساواتیں $لا = لا'$ ، $ب = ب'$ ہیں۔

اب اگر وف ق کی مساوات $ما = م$ لا ہو تو ف کا فصل $لا$ اور اس لیے اس کے معین کی قیمت $م$ $لا$ ہے۔ نیز ق کا فصل $ب$ اور اس لیے اس کا معین $م$ $ب$ ہے۔

فرض کرو کہ ف سر ہمیشہ خط $ما = م$ لا کے متوازی ہے اور ق سر ہمیشہ $ما = م$ لا کے متوازی ہے تو ف سر کی مساوات

ما - م $لا = م$ (لا - لا') (۱)

اور ق سر کی مساوات

ما - م $ب = م$ (لا - ب') (۲)

ہوگی۔

(۵۳) نقطہ سر پر رشتے (۱) اور (۲) دونوں پورے ہوں گے اور ہم م کی کسی مخصوص قیمت کے جواب میں سر کے محدودوں کو ہذا مساواتیں (۱) اور (۲) کے حل کرنے سے معلوم کر سکیں گے۔ لیکن ہمارا مقصود یہ نہیں ہے۔ ہمیں تو وہ جبری رشتہ مطلوب ہے جو نقطہ سر کے محدودوں (لا، ما) سے پورا ہوتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اس رشتہ کو معلوم کرنے کے لیے مساواتوں (۱) اور (۲) سے م کو صرف ساقط کرنا ہوگا۔ چنانچہ نتیجہ حاصل ہوگا۔

(ب - لا) $ما = م$ (لا - لا') - $م$ (لا - ب)

یہ مساوات پہلے درجہ کی ہے اور اس لیے مطلوبہ طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۴) ایک مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کے اندرونی

اور جانبی دائروں کے مرکز معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محدود علی الترتیب (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) ہیں۔ جب ج کی مساوات

$$ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا) = ۰ \dots\dots\dots (۱)$$

ہے، 'ج' کی مساوات

$$ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا) = ۰ \dots\dots\dots (۲)$$

ہے، اور 'ب' کی مساوات

$$ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا) = ۰ \dots\dots\dots (۳)$$

ہے۔

مذکورہ دائروں میں سے کسی ایک کے مرکز سے ان خطوں پر عمود مقدار میں مساوی ہیں۔ اس لیے ان چار دائروں کے مرکز مساواتوں

$$\frac{ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا)}{\sqrt{(لا-لا)^2 + (لا-لا)^2}}$$

$$\frac{ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا)}{\sqrt{(لا-لا)^2 + (لا-لا)^2}} = \pm$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا)}{\sqrt{(لا-لا)^2 + (لا-لا)^2}} = \pm$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محدودوں کو مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) میں علی الترتیب درج کیا جائے تو ان تین مساواتوں کے دائیں جانبی اراکین وہی ہوں گے۔ اس لیے (دفعہ ۲۶) مثلث کے راس سب کے سب یا تو خطوط (۱)، (۲)، (۳) کی مثبت جانبوں پر واقع ہوں گے یا سب کے سب منفی جانبوں پر۔

اندرونی دائرہ کے مرکز سے مثلث کے ضلعوں پر عمود سب کے سب اُسی سمت میں کھینچے ہوتے ہیں جس میں مثلث کے راسوں سے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہوں۔ پس (۴) میں تمام ایہامات کی علامتیں اندرونی دائرہ کے لیے مثبت ہیں۔

جانبی دائروں کے لیے علامتیں علی الترتیب $++$ ، $-+$ ، $++$ ، $-+$ ہیں۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ (۴) میں مندرجہ کسروں کے نسب نامہ مثلث (ب ج کے اضلاع 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں۔

اب اگر تمام ایہامات کی علامتوں کو مثبت لیا جائے یعنی اگر (لا، ما) اندرونی مرکز (In-centre) ہو تو تینوں شمار کنندوں کا مجموعہ Δr اوتینوں نسب ناموں کا مجموعہ $= ا + ب + ج$ کیونکہ لا اور ما کے سر دونوں مجموعوں میں صفر ہیں۔

$$\frac{\Delta r}{ا + ب + ج} = \text{پس ہر کسر}$$

اب شمار کنندوں اور نسب ناموں کو ترتیب وار لا، لا، لا سے ضرب دو اور جمع کر دو تو ہر کسر

$$\frac{\Delta r \times لا}{لا + لا + لا} =$$

$$لا (ا + ب + ج) = لا + لا + لا \quad \text{اس طرح}$$

$$ما (ا + ب + ج) = ما + ما + ما \quad \text{اسی طرح}$$

ان سے اندرونی مرکز کے متعدد اضلاع کے طولوں اور راسوں کے محدود کی رقوم میں حاصل ہوتے ہیں۔

نوٹ۔ اوپر کے نتیجہ کو ہم اس واقعہ سے بھی فوراً معلوم کر سکتے تھے کہ اندرونی مرکز (ب) پر کی گئیں گئیں کے لیے جو مقابل کے اضلاع کی متناوب ہوں "کیت کا مرکز" ہے اور یہ اس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ وہ خط جو ہر راس اندرونی مرکز سے ملاتا ہے مقابل کے ضلع کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان نسبت اس نسبت کا عکس ہوتی ہے جو اس کے سروں پر کی گئیں گئیں کے درمیان۔

دوسرے باب پر مثالیں

۱۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت متقاطع خطوط پر اس کے مقطوعوں کے شکائیوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات $b^2 - 2la + a^2 = 0$ دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ جو علی الترتیب خطوط مستقیم 1 اور 2 $la + a^2 = 0$ کے علی القیام ہیں۔

۳۔ ان خطوط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (ب) میں سے گزریں اور مساوات

$$b^2 - 2la + a^2 = 0$$

سے تعبیر شدہ ان خطوط پر علی الترتیب نمود ہوں۔

۴۔ ان خطوط مستقیم کے درمیانی زاویے معلوم کرو جو مساوات

$$la^2 + 3la - a^2 = 0$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۵۔ (ب) دو ثابت خطوط مستقیم ہیں اور (ا) ب ثابت نقطہ ہیں۔

ان خطوں پر ف، ق کوئی دو نقطے ہیں ایسے کہ نسبت ا، ف : ب، ق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۶۔ اگر ایک خط مستقیم ایسا ہو کہ کئی ثابت نقطوں سے اس پر کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ صفر ہو تو ثابت کرو کہ یہ خط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے گا۔

۷۔ ف، م، ن وہ عمود ہیں جو ایک نقطہ ف سے دو ثابت خطوط مستقیم پر کھینچے گئے ہیں جو نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ن، ق اور م، ق کو ان خطوط مستقیم کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ نقطہ ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نقطہ ف کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو نقطہ ق کا طریق بھی ایک خط مستقیم ہوگا۔

۸۔ ایک ثابت نقطہ و میں سے ایک خط مستقیم و، ف ق کھینچا گیا ہے جو دو ثابت خطوط مستقیم سے نقاط ف، ق پر ملتا ہے۔ خط مستقیم و، ف ق میں ایک نقطہ س ایسا لیا گیا ہے کہ و، ف، س، و، ق سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔ ثابت کرو کہ س کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۹۔ خطوط ع = ج، ع = ج، ع = ج سے بنے ہوئے متوازی الاضلاع کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جہاں

$$ع = لا جم ع + ما جب ع - ع$$

$$ع = لا جم ع + ما جب ع - ع$$

۱۰۔ ا، ب، ج، د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ا کو قطب اور ا، ب کو ابتدائی خط مان کر متوازی الاضلاع کے چار ضلعوں اور دو وتروں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک دیے ہوئے نقطہ (ھ، ک) سے محوروں پر عمود کھینچے گئے

ہیں اور ان عمودوں کے پائین کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ (ھ، ک) سے اس خط پر عمود کا طول

ھ ک جب ۲ سے

$$\sqrt{ھ^۲ + ک^۲} = ۲ ھ ک جم سے$$

ہے اور اس کی مساوات $لا - ک = ما - دھ$ - ک^۲ ہے۔

۱۲۔ دو خطوط مستقیم محدودوں کے مبادئیں سے گزرتے ہیں، ان میں سے ہر خط سے ایک نقطہ (لا، ما) کا فاصلہ ضہ ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو خطوط مساوی

$$(لا - ما - لا ما) = ضہ (لا + ما)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۳۔ دیے ہوئے خطوط مستقیم ولا، وما پر دو ثابت نقطے (ا، ب) اور نیز کوئی دو نقطے ف، ق لیے گئے ہیں ایسے کہ وف + وق = و ا + وب ثابت کرو کہ (ق اور ب ف کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۴۔ ایک مربع کے ضلعوں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے دو متقابلہ راسوں کے محدود ۳، ۴ اور ۱، ۲ ہیں۔

۱۵۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں۔ اس مثلث کے راس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو کہ اس پر ایک ہی خط مستقیم کے دو دیے ہوئے حصوں کے محاذی مساوی زاویے بنیں۔

۱۷۔ خطوط

$$لاجم ط + ماجب ط = ا، لاجم ف + ماجب ف = ا$$

ہر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب، خط

$$لاجم ط + ف + ماجب ط = اجم ف = اجم ط - ف$$

پر اسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کے مربع کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کے طریق کی مساوات $لا + ما = ا$ ہے۔

۱۸۔ ف، { ف ب خطوط مستقیم ہیں جو ثابت نقطوں (ا، ب) میں سے گزرتے ہیں اور ایک دیے ہوئے خط پر مستقل طول قطع کرتے ہیں۔ ف کے

طریق کی مساوات معلوم کرو -

۱۹ - ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو خطوط مستقیم $س$ لا

$$+ م = م + ۷ = ۷ + ۳ = ۱۰، ۳ + لا = ۳ + ۷ = ۱۰، ۳ + لا = ۳ + ۷ = ۱۰، اور ۳ + لا = ۳ + ۷ = ۱۰$$

$$= ۷ + ۳ = ۱۰، ۳ + لا = ۳ + ۷ = ۱۰، ۳ + لا = ۳ + ۷ = ۱۰، اور ۳ + لا = ۳ + ۷ = ۱۰$$

۲۰ - ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوط $لا$ اور ۲ سے بنا ہے

$$اور لا + م + ن = ۱۰ سے بنتا ہے$$

$$\frac{ن \times ۱۰}{۲} = ۵$$

ہے -

۲۱ - ثابت کرو کہ خطوں

$$لا + ۲ = لا + م + ب + م = ۱۰$$

میں سے ایک، اور خطوں

$$لا + ۲ = لا + م + ب + م = ۱۰$$

میں سے ایک کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے وہ اس زاویہ کے مساوی ہے جو نظام کے دوسرے دو خطوں کے درمیان ہے -

۲۲ - وہ شرط معلوم کرو کہ خطوں

$$لا + ۲ = لا + م + ب + م = ۱۰$$

میں سے ایک، خطوں

$$لا + ۲ = لا + م + ب + م = ۱۰$$

میں سے ایک پر منطبق ہو سکے -

۲۳ - وہ شرط معلوم کرو کہ خطوں

$$لا + ۲ = لا + م + ب + م = ۱۰$$

میں سے ایک، خطوں

$$لا + ۲ = لا + م + ب + م = ۱۰$$

میں سے ایک پر عمود ہو۔
 ۲۴ — ثابت کرو کہ نقطہ (۸، ۱) اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے جس کے اضلاع کی مساواتیں علی الترتیب
 $۳ + لا + ما = ۱۰$ ، $۲ + ما - لا = ۵$ ، $۱۰ = ما - لا = ۱۵$ ۔
 ہیں۔

۲۵ — ثابت کرو کہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدود جس کے راس (۲، ۱)، (۳، ۲) اور (۱، ۳) ہیں $\frac{1}{4}$ (۸ + ۱۰) اور $\frac{1}{4}$ (۱۲ - ۱۰) ہیں۔ نیز جانبی دائروں کے مرکز معلوم کرو اور مختلف صورتوں کا فرق دکھاؤ۔

۲۶ — اگر محاور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات
 $(لا - ۳ ما) لا = م ما (ما - ۳ لا)$
 سے ایسے تین خطوط تعمیر ہوتے ہیں جو مباد میں سے گزرتے ہیں اور ایک دوسرے کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

۲۷ — خطوط $لا + ۲ لا + ما + ب ما = ۱۰$ پر نقطہ (لا، ما) سے عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب

$$\frac{لا + ۲ لا + ما + ب ما}{\sqrt{(ب - ۱) + ۲ + لا}}$$

۲۸ — اگر نقطہ (لا، ما) سے خطوط $لا + ۲ لا + ما + ب ما = ۱۰$ پر عمود ع، ع، ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(ع + ع) (ع - ۱) = \{ (ب - ۱) + ۲ + لا \} (ب - ۱) (لا - ب ما)$$

$$+ ۲ + (ب + ۱) لا + ما + ۲ (لا + ما)$$

۲۹ — اگر تین خطوط مستقیم

۱) $ما + ب$ $ما + لا + ج$ $لا + د$ $لا = ۰$ ۔
 ہر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو اور ک کے مساوی
 ہو تو ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق

$$۱) ما + ب$$

$$۲) لا + ج$$

$$۳) لا + د$$

$$۴) لا = ۰$$

-۴-

۳۰۔ مساوات

(۵۸)

$$۱) لا + ۳$$

$$۲) ب$$

$$۳) لا + ما + ۳$$

$$۴) ج$$

$$۵) لا + ما + د$$

$$۶) لا = ۰$$

سے تعبیر شدہ تین خطوں میں سے دو خطوط علی القوائم ہوں گے اگر

$$۱) لا + ۳$$

$$۲) ج$$

$$۳) ب$$

$$۴) د$$

$$۵) لا + د$$

$$۶) لا = ۰$$

۳۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۱) لا + ما + ۳$$

$$۲) ب$$

$$۳) لا + ما + د$$

$$۴) لا = ۰$$

سے خطوط مستقیم کے ایسے دو زوج تعبیر ہوتے ہیں جو علی القوائم ہیں۔ نیز اگر ۲ ب
 $۱) لا + ۳$
 $۲) ج$
 $۳) ب$
 $۴) د$
 $۵) لا + د$
 $۶) لا = ۰$

۳۲۔ وہ ضروری اور کافی شرط کہ

$$۱) ما + ب$$

$$۲) لا + ج$$

$$۳) لا + ما + د$$

$$۴) لا + ع$$

$$۵) لا = ۰$$

سے تعبیر شدہ خطوط مستقیم میں سے دو علی القوائم ہوں یہ ہے کہ

$$۱) (ب + د)$$

$$۲) (لا + د + ب + ع)$$

$$۳) (ع - لا + ج + ع)$$

$$۴) (ع - لا + ج + ع) = ۰$$

۳۳۔ دو مختیوں

$$۱) لا + ۲$$

$$۲) لا + ما + ب$$

$$۳) لا + ما + گ$$

$$۴) لا = ۰$$

$$۱) لا + ۲$$

$$۲) لا + ما + ب$$

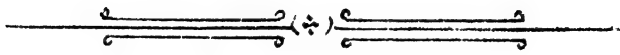
$$۳) لا + ما + گ$$

$$۴) لا = ۰$$

اور
 کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملا یا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ملانے والے خطوط مستقیم
 علی القوائم ہونگے اگر گ (ب + ۱) = گ (لا + ب)۔

۳۴۔ اگر ایک مثلث کے راسوں سے دوسرے مثلث کے اضلاع پر

کھینچے ہوئے عمود ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ دوسرے مثلث کے راسوں سے پہلے مثلث کے اضلاع پر کھینچے ہوئے عمود بھی ایک نقطہ پر ملیں گے۔
 ۳۵۔ اگر ایک مثلث کے راس تین ہم نقطہ ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں اور مثلث کے دو اضلاع ثابت نقطوں میں سے گزریں تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔

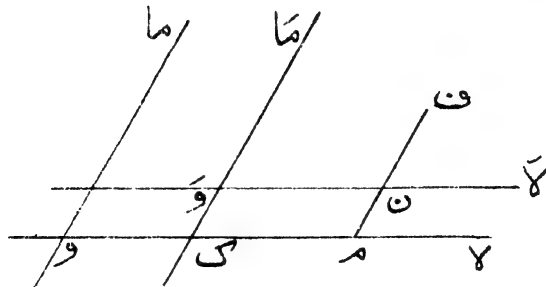


تیسرا باب

(۵۹) محور کی تبدیلی غیر متغی نسبتیں یا چلیبی نسبتیں۔ درپیش
محوروں کی تبدیلی

۴۸۔ جب ہم محوروں کے ایک جٹ کے حوالے سے ایک منحنی کی مساوات معلوم ہو تو ہم محوروں کے دوسرے جٹ کے حوالے سے اس کی مساوات کو اخذ کر سکتے ہیں۔

۴۹۔ محوروں کی سمت بدلے بغیر محدودوں کے مبداء کو تبدیل کرنا۔

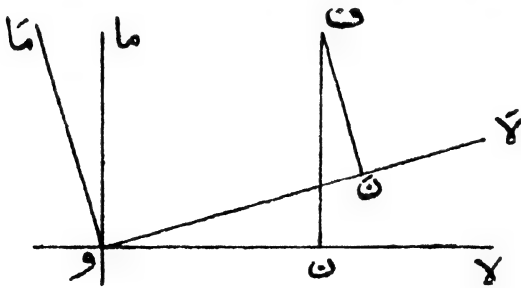


فرض کرو کہ ابتدائی 'محاور و لا' و 'ما ہیں اور نئے محاور و لا'

وَمَا جِہَاں وَلَا، ولا کے متوازی اور وَمَا، وما کے متوازی ہے۔
فرض کرو کہ ابتدائی محوروں کے حوالے سے وَ کے محدّد، ک ہیں۔
فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدّد ابتدائی محوروں کے
حوالے سے لَا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لَا، ما ہیں۔ ف م کو
وما کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ ف م، ولا کو م پر اور وَلَا کو
ن پر قطع کرتا ہے۔

(۶۰)
تب لا = و م = و ک + ک م = و ک + و ن = و م + لا
اور ما = م ف = م ن + ن ف = ک + و ن ف = ک + ما
پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدّد، نئے محدّدوں کی رقوم میں معلوم ہو چکے
اور اگر ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو صحیحی کی نئی مساوات
حاصل ہوگی۔
اد پر کے بیان میں محاور قائم یا مائل ہو سکتے ہیں۔

۵۔ مبداء کو بدلے بغیر محوروں کی سمت تبدیل کرنا
جبکہ دونوں نظام قائم ہوں۔



فرض کرو کہ ابتدائی محاور وَلَا، وما ہیں اور نئے محاور وَلَا،
وما۔ فرض کرو کہ زاویہ لَا وَلَا = ط۔

فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدود ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لا، مآ ہیں۔ ف ن کو ولا پر عمود اور ف ن کو ولا پر عمود کھینچو۔
کسی خط پر ون اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ، اس خط پر ون اور ن ف کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

$$\text{اب ولا اور و ما پر ظل لو تو}$$

$$\text{لا} = \text{لاجم طه} + \text{ماجم} \left(\frac{\pi}{p} + \text{طه} \right)$$

$$\text{اور } \text{ما} = \text{لاجم} \left(\text{طه} - \frac{\pi}{p} \right) + \text{ماجم طه}$$

$$\text{یعنی } \text{لا} = \text{لاجم طه} - \text{ماجم طه}$$

$$\text{ما} = \text{لاجم طه} + \text{ماجم طه}$$

(۶۱) پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدود، نئے محدود کی رقوم میں معلوم ہو چکے اور اگر ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو منحنی کی نئی مساوات حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ ایک منحنی کی مساوات $3\text{لا} + 2\text{لا} + 3\text{ما} - 18\text{لا}$
- $22\text{ما} + 50 = 0$ ہے۔ نقطہ (۳، ۲) میں سے گذرنے والے قائم محاورے کے حوالے سے یہ مساوات کیا ہو جائے گی جبکہ لا کا نیا محور پرانے محور کے ساتھ ۵۴° کا زاویہ بنائے۔

اول مبدا کو نقطہ (۳، ۲) پر منتقل کرو جس کے لیے لا، ما کی بجائے
علی الترتیب لا، ۲، ما، ۳ رکھنا ہو گا چنانچہ نئی مساوات

$$3(\text{لا} + 2) + 2(\text{لا} + 2) + (3 + 2)(\text{ما} + 3) - 18(\text{لا} + 2) - 22(2 + \text{ما}) + 50 = 0$$

ہوگی جو

$$3\text{لا} + 2\text{لا} + 3\text{ما} - 1 = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے یا زبروں کو اڑا دیا جائے تو

$$۳ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ لا} \text{ لا}^۲ + ۳ \text{ ما}^۲ - ۱ = ۰ \dots \dots (۱)$$

محوروں کو ۵ کے زاویہ میں سے گھمانے کے لیے لائی بجائے لا۔ $\frac{۱}{۲۲} - \frac{۱}{۲۲} - \frac{۱}{۲۲}$

اور مائی بجائے لا۔ $\frac{۱}{۲۲} + \frac{۱}{۲۲} + \frac{۱}{۲۲}$ رکھنا چاہیے۔ تب مساوات (۱)

$$۱ = ۳ \left(\frac{\text{لا} - \text{ما}}{۲۲} \right)^۲ + \left(\frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲۲} \right)^۳ + ۳ \left(\frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲۲} \right) = ۱$$

ہو جائے گی جو $۴ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ ما}^۲ = ۱$ میں تحویل ہوتی ہے۔
پس مطلوبہ مساوات

$$۴ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ ما}^۲ = ۱$$

۴۔ مثال ۲۔ مساوات لا۔ $\text{ما}^۲ + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} = ۰$ کیا ہو جائیگی

جبکہ مبدا کو نقطہ (۱، ۲) پر منتقل کیا جائے؟ جواب: لا۔ $\text{ما}^۲ + ۳ = ۰$ ۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ مساوات $۶ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} - ۶ \text{ ما} - ۷ \text{ لا} + ۷ \text{ ما} = ۰$

۵ + ۱۔ ان محوروں کے حوالے سے جو ایک خاص نقطہ میں سے گزرتے ہیں

اور ابتدائی محوروں کے متوازی ہیں $۶ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} - ۶ \text{ ما} - ۷ \text{ لا} = ۰$ ہو جاتی ہے۔

جواب: نقطہ (۱، ۱) ہے۔

مثال ۴۔ مساوات $۴ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} - ۱ = ۰$ کیا ہو جائیگی

جبکہ محوروں کو ۳۰ کے زاویہ میں سے گھمادیا جائے؟

جواب: $۵ \text{ لا} + \text{ما} - ۱ = ۰$ ۔

مثال ۵۔ مساوات لا۔ $۲ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۱ = ۰$ کو اس

محوروں کے حوالے سے معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۰) میں سے گزرتے ہیں اور ان

خطوں کے متوازی ہیں جو ابتدائی محوروں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف

کرتے ہیں۔ جواب: $۲ \text{ ما} - ۱ = ۰$ ۔

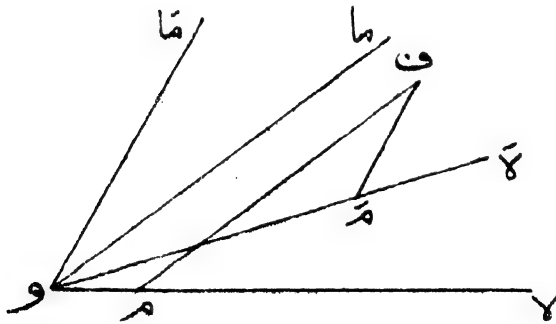
مثال ۶۔ مساوات $لا + ۲ ج = لا + ما = ا$ کو مستحیل کرو

جبکہ قائم محوروں کو زاویہ $\frac{\pi}{۲}$ میں سے گھمایا گیا ہو۔

جواب: $لا + (ج + ۱) = ما + (ج - ۱) = ا$

۵۱۔ مبدا کو بدلے بغیر اُصل محوروں کے ایک جٹ سے (۶۳) دوسرے جٹ میں تبدیل کرنا۔

فرض کرو کہ $ولا$ ، $وما$ ابتدائی محاور ہیں جو زاویہ سے پر اُصل ہیں۔
فرض کرو کہ $ولا$ ، $وما$ نئے محاور ہیں جو زاویہ سے پر اُصل ہیں۔ فرض کرو کہ
زاویہ $لا ولا$ ، $ط$ کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ $ف$ کوئی نقطہ ہے جس کے محدود ابتدائی محوروں کے
حوالے سے $لا$ ، $ما$ اور نئے محوروں کے حوالے سے $لا$ ، $ما$ ہیں چنانچہ شکل
میں $و م = لا$ ، $م ف = ما$ ، $و م = لا$ ، $م ف = ما$ جہاں $م ف = لا$

وما کے متوازی اور مرف، وما کے متوازی ہے۔
 کسی خط پر وما اور مرف کے ظلوں کا مجموعہ، اس خط پر وما
 اور مرف کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔
 ایک ایسے خط پر ظل لوجو ولا پر عمود ہے، تب

$$\text{ما جب سہ} = \text{لا جب سہ} + (\frac{\pi}{4} - \text{طہ}) + \text{ما جب سہ} + (\frac{\pi}{4} - \text{سہ})$$

ما جب سہ = لا جب طہ + ما جب سہ + (طہ + سہ)
 پھر ایک ایسے خط پر ظل لوجو ولا پر عمود ہے، تب

$$\text{لا جب سہ} + (\frac{\pi}{4} - \text{سہ}) = \text{لا جب سہ} + (\frac{\pi}{4} - \text{طہ}) + \text{ما جب سہ} + (\frac{\pi}{4} - \text{طہ} - \text{سہ})$$

لا جب سہ = لا جب سہ + (طہ) + ما جب سہ + (سہ - سہ - طہ)
 یہ ضابطے شاذ ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔ وہ نتیجے جو محور و مئی
 تبدیلی سے حاصل ہوتے ہیں بالعموم بالواسطہ معلوم کئے جاتے ہیں،
 جیسا کہ حسب ذیل مثال میں کیا گیا ہے۔

۵۲۔ اگر محوروں کی تبدیلی سے لا^۱ + ۲ لا + ۱ ب + ۱ ما^{*} (۶۳)

بدل کر لا^۱ + ۲ لا + ۱ ب + ۱ ما ہو جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1 + 1 \text{ ب} - 2 \text{ لا} + 1 \text{ سہ}}{\text{جب } 1 \text{ سہ}} = \frac{1 + 1 \text{ ب} - 2 \text{ لا} + 1 \text{ سہ}}{\text{جب } 1 \text{ سہ}}$$

جہاں سہ اور سہ محوروں کے ان دو جھٹوں کے زوایاے
 میلان ہیں۔

اگر مبداء و ہو اور ف کوئی نقطہ ہو جس کے محدود ابتدائی
 محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لا، ما
 ہیں تو

و ف^۲ = لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ما جم سہ
 نیز و ف^۲ = لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ما جم سہ
 پس لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ما جم سہ بد لکر لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ما جم سہ ہو جاتا ہے۔ نیز بموجب فرض

لا^۲ + ۲ لا ما + ب ما بد لکر لا^۲ + ۲ لا ما + ب ما
 ہوتا ہے۔ اس لیے اگر لہ کوئی مستقل عدد ہو تو

لا^۲ + ۲ لا ما + ب ما لہ (لا^۲ + ۲ لا ما جم سہ + ما)
 بد لکر لا^۲ + ۲ لا ما + ب ما لہ (لا^۲ + ۲ لا ما جم سہ + ما)
 ہو جائے گا۔ پس اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ ان میں سے ایک جملہ
 کامل مربع ہو تو دوسرا بھی لہ کی اسی قیمت کے لیے کامل مربع ہوگا۔
 جملہ اول کامل مربع ہوگا اگر

$$(ل + لہ) - (ب + لہ) - (لہ + لہ جم سہ) = ۰$$

اور جملہ دوم کامل مربع ہوگا اگر

$$(ل + لہ) - (ب + لہ) - (لہ + لہ جم سہ) = ۰$$

لہ کو معلوم کرنے کے لیے درجہ دوم کی یہ جو دو مساواتیں ہیں
 ان کی اصلیں وہی ہونی چاہئیں۔ ان کو اشکال

$$لہ جب ۲ سہ + (ل + ب - ۲ جم سہ) لہ + ب - ۲ سہ = ۰$$

اور لہ جب ۲ سہ + (ل + ب - ۲ جم سہ) لہ + ب - ۲ سہ = ۰

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(۱) \frac{ل + ب - ۲ جم سہ}{جب ۲ سہ} = \frac{ل + ب - ۲ جم سہ}{جب ۲ سہ}$$

$$(۲) \dots \dots \frac{ل + ب - ۲ سہ}{جب ۲ سہ} = \frac{ل + ب - ۲ سہ}{جب ۲ سہ}$$

اور

اگر محوروں کے یہ دو جٹ علی القوائم ہوں تو یہ مساداتیں حسب ذیل سادہ شکلیں اختیار کرتی ہیں:

۱ + ب = ب + ا ، ۱ ب - ۱ ب = ۱ ب - ۱ ب ، (۳)

۵۳۔ محوروں کے کسی تغیر سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔

دفعات ۴۹، ۵۰ اور ۵۱ سے ہم دیکھتے ہیں کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے نئی مساوات لا اور ماکہ بجائے شکل

لَآ مَآءَ نَ اِوْدَ نَ لَآ مَآءَ نَ

کے جملوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ جملے پہلے درج کے ہیں اور اس لیے ابتدائی مساوات میں لا اور ما کی بجائے یہ جملے درج کیے جائیں تو مساوات کے درج میں کوئی اضافہ نہیں ہوگا۔ اسی طرح مساوات کا درجہ گھٹ نہیں سکتا کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو نئی مساوات سے پرانی مساوات برعود کرنے سے درجہ میں اضافہ ہونا چاہئے۔

مثال - قائم محوروں کے حقیقی استخبار سے ثابت کرو کہ اگر $\alpha + \beta = 2\pi$ یا $\alpha + \beta = 0$ ہو جائے تو $\alpha + \beta = 0$ یا $\alpha + \beta = 2\pi$

ۛ۔ ا ب = ۛ۔ ۛ۔ ا ب

مثال ۲۔ محوروں کے ایک جٹ سے دوسرے جٹ میں متحیل کرنے کے لیے ضابطہ

$$لا = م + لا + ن + ما ، ما = م + لا + ن + ما$$
 ہو تو ثنابت کر دو کہ

لا = م لا + ن م ، م لا + ن م
ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{m \cdot m}{00} = \frac{1 - \overset{2}{m} + \overset{2}{m}}{1 - \overset{2}{0} + \overset{2}{0}}$$

لا اور ما کی بجائے دئے ہوئے جملے درج کرو اور لا^۱ اور ما^۲ کے سرورں کو اکائی کے مساوی رکھو اور پھر حجم سہ کو ساقط کرو۔

مثال ۳۔ ان طریقوں (Loc) کی مساواتیں معلوم کرو جو

$$(لا + ب + ج) = (لا + ب)$$

$$اور (لا + ب + ج) = (ب + لا + د) = (لا + ب)$$

سے تعبیر ہوتے ہیں جبکہ عمودی خطوں لا + ب + ج = اور ب + لا + د = کو علی الترتیب لا اور ما کے محوروں کے طور پر لیا گیا ہو۔

جواب: ما^۱ = لا + ب + ج =

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ مساواتوں

$$لا + ب + ج = اور (لا + ب + ج) = ۳ (ب + لا + د) =$$

سے تعبیر شدہ خطوط ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع بناتے ہیں۔
[محوروں کو خطوں لا + ب + ج = اور ب + لا + د = پر تبدیل کرو

تویہ مساواتیں

$$لا + ج = (لا + ب + ج) = اور ما^۲ = ۳ لا =$$

ہو جائیں گی اور نتیجہ واضح ہے۔]

غیر موقی یا چلیپی نسبتیں

۵۴*۔ ایک خط مستقیم پر نقطوں کے کسی جٹ کو سماعت کہتے ہیں،

اور ایک نقطہ میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے کسی جٹ کو منسل کہتے ہیں، اور اس کے ہر خط کو شعاع یا کرن کہتے ہیں۔

اگر ایک خط مستقیم پر ف، ق، س، چار نقطے ہوں تو نسبت

$$\frac{ف ق}{ق س} : \frac{ف س}{س ق} یا ف ق \times س س : ف س \times س ق$$

کو سعت ف، ق، ر، س کی غیر موسیقی نسبت یا چلیبی نسبت کہا جاتا ہے اور اس کو {ف ق ر س} سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ موسیقی اگر ایک سعت کی چلیبی نسبت۔ ا کے مساوی ہو تو اس کو موسیقی کہتے ہیں۔

ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر {ف ق ر س} = اتو
ف ق : ف س = (ف ر - ف ق) : (ف س - ف ر)
اس لیے ف ق، ف ر، ف س سلسلہ موسیقی میں ہیں۔
اگر ف، ق، ر، س موسیقی سعت ہو تو ق، س کو ف، ر کے لحاظ سے موسیقی طور پر مزدوں کہا جاتا ہے۔

۵۵۔ اگر چار خطوط مستقیم و ف، ق، ر، س کسی خط مستقیم سے علی الترتیب نقاط ف، ق، ر، س پر قطع ہوں تو سعت ف، ق، ر، س کی چلیبی نسبت مستقل ہوتی ہے۔
فرض کرو کہ دئے ہوئے خطوں کی مساواتیں

$$ا = م، لا = م، لا = م، لا = م، لا = م، لا = م$$

ہیں۔
فرض کرو کہ قاطع خط ف ق ر س، مساوات $ا = م، لا = م$ سے تعبیر ہوتا ہے۔ تب اگر محور لا پر ف، ق، ر، س کے غل $ا، ب، ج، د$ ہوں تو مبدا سے ان غلوں کے فاصلے علی الترتیب

$$\frac{ک}{م-ا}، \frac{ک}{م-ب}، \frac{ک}{م-ج}، \frac{ک}{م-د}$$

ہوں گے۔ پس

$$\frac{\text{ف ق} \times \text{ر س}}{\text{ف س} \times \text{ر ق}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}}$$

$$\frac{\left\{ \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ا}} - \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ب}} \right\} \left\{ \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ا}} - \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ب}} \right\}}{\left\{ \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ا}} - \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ب}} \right\} \left\{ \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ا}} - \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ب}} \right\}} = \frac{(\text{م} - \text{ا})(\text{م} - \text{ب})}{(\text{م} - \text{ا})(\text{م} - \text{ب})} =$$

جو خط ف ق ر س کے محل پر منحصر نہیں ہے اور اس لیے مستقل ہے۔

چار خطوں کی پنسل کی چلیبی نسبت سے مراد اس سعت کی

چلیبی نسبت ہوتی ہے جس میں کسی دوسرے خط سے یہ پنسل منقطع ہوتی ہے۔

۵۶۔ اس پنسل کی چلیبی نسبت معلوم کرنا جو مساواتوں (۶۶)

$$\text{لا} = \text{ا}، \text{ما} - \text{م} \text{ لا} = \text{ا}، \text{ما} = \text{ا}، \text{ما} - \text{م} \text{ لا} = \text{ا}.$$

سے تعبیر شدہ خطوط مستقیم سے بنے۔

یہ گزشتہ مسئلہ کی مخصوص صورت ہے جبکہ $\text{م} = \infty$ اور $\text{م} = 0$ ۔

یا گزشتہ دفعہ کی بموجب پنسل کو کسی خط سے قطع کر کے چلیبی نسبت معلوم کیجا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ خط لا = م پنسل کو قطع کرتا ہے، تب م کی دو قیمتیں جہاں یہ خط پنسل کے خطوط کو قطع کرتا ہے علی الترتیب

$$\infty، \text{م}، 0، \text{م}$$

ہیں۔ پس مطلوبہ چلیبی نسبت

$$\frac{م}{م} = \frac{م \times \infty}{م \times \infty}$$

ہے۔

ظاہر ہے کہ خطوط

لا = ۰ ، ما - م لا = ۰ ، ما = ۰ ، ما - م لا = ۰

سے یہ موسیقی پنسل بنتی ہے

اگر محاور ایک دوسرے کے علی القوام ہوں تو خطوط ما - م لا = ۰ ، اور ما + م لا = ۰ دو محوروں میں سے کسی ایک سے مساوی زاوے بناتے ہیں۔

پس اگر کوئی پنسل موسیقی ہو اور دو متبادل کرنیں ایک دوسری کے علی القوام ہوں تو یہ کرنیں دوسری دو کرنوں کے اندرونی اور بیرونی زاویوں کی تقصیف کریں گی۔

۵۔ ذواربعۃ الاضلاع کے تین وتروں میں سے ہر وتر دوسرے دو وتروں سے موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ خطوط مستقیم ق ا ب ، ق د ج ، ف د ا اور ج ب ، ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع ہیں۔ وہ خط جو ان میں دو خطوں کے نقطہ تقاطع کو دوسرے دو خطوں کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے ذواربعۃ الاضلاع کا ایک وتر ہے۔ اس لیے تین وتر ہوتے ہیں یعنی ف ق ، ا ج ، ب د (شکل دیکھو)

ج ب اور ب ا کو علی الترتیب محاور لا اور ما فرض کرو۔ فرض کرو کہ نقطوں ج ، ف ، ا ، ق کے محدود علی الترتیب

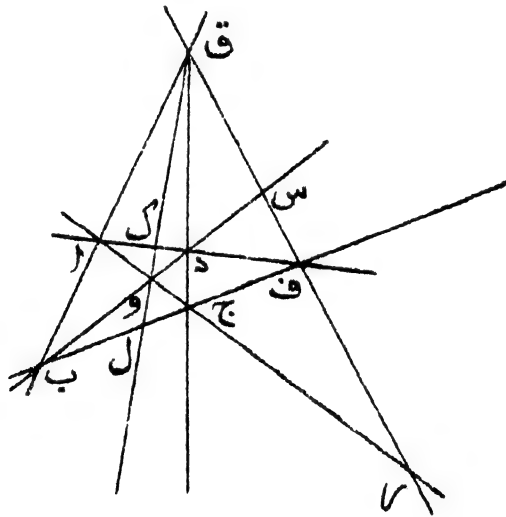
(لا،) (لا،) (لا،) اور (ما،) ہیں۔
اب ج ا اور ف ق کی مساواتیں

$$0 = 1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \quad ، \quad 0 = 1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}$$

ہیں۔ اس لیے ب س کی مساوات

$$0 = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right) \mu + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right) \mu$$

ہے۔



ا ف اور ج ق کی مساواتیں

$$0 = 1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \quad ، \quad 0 = 1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}$$

ہیں۔ اس لیے ب د کی مساوات

$$0 = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right) \mu - \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right) \mu$$

۱ لا + ۲ لا + ب = ۰ اور ۱ لا + ۲ لا + ما + ب = ۰
سے حاصل ہوتے ہیں موسیقی طور پر مزدوج ہوں گے اگر
۱ ب + ۲ ب = ۲ لا

دریچ

۶۰۔ تعریف۔ فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خط مستقیم پر

و ایک ثابت نقطہ ہے اور اسی خط پر نقطوں کے جوڑے ف'ف'،
ق'ق'، س'س'، وغیرہ ایسے ہیں کہ

و ف' = و ق' = و س' = ... = مستقل = ک
تب ہم کہتے ہیں کہ یہ نقطے دریچ میں ایک نظام بناتے ہیں اور نقطہ و اس
نظام کا مرکز ہے۔ ف' ق' جیسے دو نقطے ایک دوسرے کے مزدوج
کہلاتے ہیں۔ مرکز کا مزدوج نقطہ لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے۔

اگر ہر نقطہ مرکز کے اسی جانب ہو جس جانب اس کا مزدوج ہے
تو دو نقطے ک'ک'، مرکز کے مخالف جانبوں پر، ایسے موجود ہوں گے
کہ و ک' = و ک' = و ف' = و ف' ان نقطوں ک'ک' کو دوسرے
نقطے یا ماسکے کہا جاتا ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ جب یہ دو ماسکے دیے گئے ہوں تو دریچ پوری طرح
متعین ہو جاتا ہے۔

مزدوج نقطوں کے دو زوج معلوم ہوں تو بھی دریچ پوری طرح
متعین ہوتا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ ان نقطوں ۱، ۱ اور ب، ب (فرض کرو)
کے فاصلے کسی نقطہ سے جو اس خط مستقیم میں ہے جس میں دیے ہوئے

نقطے واقع ہیں 'ا' اور 'ب' ہیں۔ فرض کرو کہ درپیش کے مرکز کا فاصلہ اُسی نقطہ سے لا ہے۔ تب حسب ذیل رشتہ حاصل ہوتا ہے:

$$(ا - لا) (ا - لا) = (ب - لا) (ب - لا)$$

$$(ا + ا - ب - ب) (ا - لا) = (ا - لا) (ب - ب)$$

یا پس مرکز کا صرف ایک محل ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر $ا + ا = ب + ب$ یعنی اگر 'ا' اور 'ب' کا نقطہ وسطی ایک ہی ہو تو ان چار نقطوں سے جو درپیش متعین ہوگا اُس کا مرکز لاتنا ہی پر ہوگا اور اس کے بالعکس۔

اس طرح اگر نقطوں کے کوئی زوج 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ج'، 'ب'، 'ج' وغیرہ ایسے ہوں کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' وغیرہ کے نقاط وسطی منطبق ہوتے ہوں تو ان نقطوں سے درپیش کا وہ نظام حاصل ہوگا جس کا مرکز لاتنا ہی پر ہوگا۔

مرکز کے محل کو ہندسی طریقہ پر اسی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے کہ مزدوج نقطوں کے دو جوڑوں میں سے ایک ایک کو لے کر اس کے نقطوں میں سے گذرتا ہوا ایک دائرہ کھینچا جائے تو (اقلیدس مقالہ ۳ مسئلہ ۷) ان دائروں کا مشترک وتر اُس خط کو جس پر مزدوج نقطے واقع ہیں مطلوبہ مرکز میں قطع کرے گا۔

۶۱۔ اگر متعدد نقطے درپیش میں ہوں تو ان میں سے

کسی چار نقطوں کی چلیپی نسبت ان کے چار مزدوجوں کی چلیپی نسبت کے مساوی ہوگی۔

فرض کرو کہ کوئی چار نقطے 'ف'، 'ق'، 'س'، 'س' ہیں اور مرکز سے ان نقطوں کے فاصلے علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'ر'، 'س' ہیں اس لیے ان کے مزدوجوں کے

$$\frac{ف}{ق}، \frac{ق}{ر}، \frac{ر}{س}، \frac{س}{ف} \text{ ہوں گے۔ تب}$$

$$\left\{ \frac{ف}{ق} \frac{س}{ر} \right\} = \left\{ \frac{ق}{ر} \frac{س}{ف} \right\}$$

$$\frac{\left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{ف}\right) \left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{ر}\right)}{\left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{ف}\right) \left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{ر}\right)} = \{ف ق ر س\}$$

پس $\{ف ق ر س\} = \{ف ق ر س\}$ اس سے ہم اس امر کا امتحان کر سکتے ہیں کہ آیا کوئی چھ نقطے درپیش میں ہیں یا نہیں۔ کیونکہ ۱، ۲ اور ۳ سے حاصل شدہ درپیش میں ف، ق مزدوج نقطے ہونگے اگر

$$\{اب آ ف\} = \{آ ب ا ف\}$$

*۲۔ درپیش کے کوئی دو مزدوج نقطے اور اس کے دو اسکے ایک موسیقی سعت بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ درپیش کے دو اسکے گ، گ، ہیں اور مرکز وہ ہے۔
فرض کرو کہ گ، و = ج = و گ۔
تب و سے نقطوں گ، گ، کے فاصلے مساوات
لا - ج = ۰۔

کی اصلیں ہیں۔
نیز و سے مزدوج نقطوں کے کسی زوج کے فاصلے مساوات
لا + ۲ لا - ج = ۰۔

کی اصلیں ہیں۔
پس مسئلہ دفعہ ۵۸ سے فوراً ماخوذ ہوتا ہے۔

*۳۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ مساواتوں

$$۱) لا + ۲ لا + ب = ۰، ۲) لا + ۲ لا + ب = ۰،$$

$$۱۳ \text{ لا} + ۲ \text{ م} + ۱ \text{ ب} = ۰$$

سے حاصل شدہ نقطوں کے تین زوج درپیش میں ہوں۔

ان فاصلوں کا حاصل ضرب جو ہر زوج کے دو نقطے کسی نقطہ لا = د سے رکھتے ہیں ایک ہی ہونا چاہئے، فرض کرو کہ وہ لہ کے مساوی ہے۔

مساوات

(۴۱)

$$۱ (۱۳ - لا) + ۲ (۱۳ - د) + ۱ (۱۳ - ب) = ۰$$

کی اصلوں کا حاصل ضرب

$$(۱۳ - لا) (۱۳ - د) (۱۳ - ب)$$

ہے۔ پس لہ کی کسی قیمت کے لیے حاصل ہونا چاہئے

$$۱ (۱۳ - لا) - ۲ (۱۳ - د) + ۱ (۱۳ - ب) = ۰$$

$$۲ (۱۳ - لا) - ۱ (۱۳ - د) + ۲ (۱۳ - ب) = ۰$$

$$۱ (۱۳ - لا) - ۲ (۱۳ - د) + ۱ (۱۳ - ب) = ۰$$

د۱۔ لہ اور د کو سا قفا کرنے سے مطلوبہ شرط

$$۰ = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱۳ - لا & ۱۳ - د & ۱۳ - ب \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۶۴۔ دفعہ ماسبق سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ایک خط مستقیم پر

چھ نقطوں کو جو درپیش میں ہوں کسی نقطہ سے ملایا جائے تو اس طریقہ سے جو پنسل بنے گی وہ کسی دوسرے خط مستقیم سے ایسے چھ نقطوں میں منقطع ہوگی جو درپیش میں ہوں گے۔

سب سے اول یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر چھ خطوں کی کوئی پنسل کسی خط مستقیم ف ق سے نقطوں کے ایسے تین زوجوں میں قطع ہو جو درپیش میں

ہوں تو یہ نیپل ف ق کے متوازی کسی خط سے درپچ میں قطع ہوگی۔
اب فرض کرو کہ خطوط مستقیم کے تین زوج

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} = 0 \text{، وغیرہ}$$

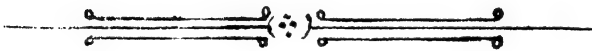
ہیں جہاں محور لا اس خط کے متوازی ہے جو خطوں کو نقطوں کے ایسے زوجوں
میں قطع کرتا ہے جو درپچ میں ہیں، اور محور ما کسی دوسرے خط مستقیم کے
متوازی ہے جو کوئی بھی ہو سکتا ہے۔

تب ہم جانتے ہیں کہ $1 \text{ لا} = 0$ ، خطوں کو درپچ میں قطع کریگا اور اسلئے

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ $1 \text{ لا} = 0$ ، خطوں کو نقطوں کے ایسے

تین زوجوں میں قطع کرے جو درپچ میں ہوں۔

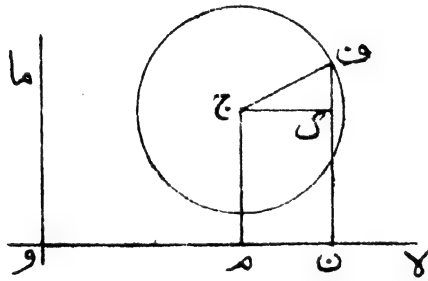


چوتھو باب

(۷۲)

دائرہ

۶۵۔ قائم محوروں کے حوالے سے دائرہ کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ف ہے
فرض کرو کہ ج کے محدود (د'ع) اور ف کے محدود (لا'ما) ہیں۔ فرض کرو کہ
دائرہ کا نصف قطر ہے۔ ج م اور ف ن کو و ما کے متوازی اور
ج ک کو و لا کے متوازی کیچھو (حسب شکل)۔ تب
ج ک' + ک ف' = ج ف'
ج ک = لا۔ د'ک ف' = ما۔ ع

لیکن

$$\text{مثلاً: (لا - د)} + \text{(ما - ع)} = \text{ا} \quad (۱) \dots\dots\dots$$

مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر دائرہ کا مرکز مبدا ہو تو د اور ع دونوں صفر ہوں گے اور دائرہ کی

مساوات

$$\text{لا} + \text{ما} = \text{ا} \quad (۲) \dots\dots\dots$$

ہوگی۔

مساوات (۱) لکھی جاسکتی ہے

$$\text{لا} + \text{ما} - ۲ \text{ د} - ۲ \text{ ع} + \text{ما} + \text{د} - \text{ا} = ۰$$

اس لیے کسی دائرہ کی مساوات شکل

$$\text{لا} + \text{ما} + ۲ \text{ گ} + \text{لا} + ۲ \text{ ف} + \text{ما} + \text{ج} = ۰ \quad (۳) \dots\dots\dots$$

کی ہوتی ہے جہاں گ، ف، ج مستقلات ہیں۔

اس کے بالعکس مساوات (۳) ایک دائرہ کی مساوات ہوگی۔ کیونکہ اس کو لکھا جاسکتا ہے

$$(\text{لا} + \text{گ}) + (\text{ما} + \text{ف}) = \text{گ} + \text{ف} - \text{ج}$$

اور اس مساوات سے ظاہر ہے کہ اس کے طریق پر کے کسی نقطہ سے نقطہ

(-گ، -ف) کا فاصلہ مستقل ہے اور یہ فاصلہ $\text{گ} + \text{ف} - \text{ج}$ کے مساوی

ہے۔ پس مساوات (۳) ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا نصف قطر

$\text{گ} + \text{ف} - \text{ج}$ ہے اور مرکز نقطہ (-گ، -ف) پر ہے۔

اگر $\text{گ} + \text{ف} - \text{ج} = ۰$ تو دائرہ کا نصف قطر صفر ہے اور دائرہ کو

ایسی صورت میں نقطہ دائرہ کہتے ہیں۔

اگر گ + ف = ج منفی ہو تو لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کر سکی، ایسی صورت میں دائرہ کو خیالی دائرہ کہتے ہیں۔ مندرجہ بالا بیان سے یہ واضح ہے کہ دوسرے درجہ کی کوئی مساوات ایک دائرہ کو تعبیر کرے گی بشرطیکہ (۱) لا اور ما کے سر مساوی ہوں اور (۲) کوئی رقم ایسی نہ ہو جس میں لا ما آئے۔

۶۶۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک دائرہ کی عام مساوات

$$لا + ما + ۲ گ + ۲ ف + ج = ۰$$

ہے۔ اس مساوات میں تین مستقلات ہیں۔ اگر ہم ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو تین دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے یا کوئی اور شرطیں پوری کرے تو ہم اس کی مساوات کو مندرجہ بالا شکل کی مساوات فرض کریں گے اور یہی ہوئی شرطوں کے ذریعہ زیر بحث دائرہ کے لیے مستقلات گ، ف، ج کی قیمتیں متعین کریں گے۔

مثال ۱۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو تین نقطوں (۱، ۰)، (۰، ۱)، (۰، ۱) میں سے گزرتا ہے۔

اور (۱، ۲) میں سے گزرتا ہے۔

[فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما + ۲ گ + ۲ ف + ج = ۰$$

ہے۔ اب چونکہ نقطہ (۱، ۰) دائرہ پر ہے اس لیے لا = ۰ اور ما = ۱ رکھنے سے مساوات پوری ہونی چاہئے

$$۰ + ۱ + ۲ + ۲ ف + ج = ۰$$

نیز (۰، ۱) دائرہ پر ہے اس لیے

$$۰ + ۰ + ۲ گ + ۲ + ج = ۰$$

اور (۱، ۲) دائرہ پر ہے اس لیے

$$۰ + ۱ + ۲ گ + ۲ + ۲ ف + ج = ۰$$

پس گ = ف = ۱ اور ج = ۱

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$لا + ما - لا - لا = ۱ + ما - لا$$

مثال ۲۔ اگر ایک دائرہ کے ایک قطر کے بیروں (ب کے محدد (لا، ما)، (لا، ما) ہوں تو دائرہ کی مساوات (لا - لا) (لا - لا) + (ما - ما) (ما - ما) = ۰ ہوگی۔
[وہ خط جو دائرہ پر کسی نقطہ ف (لا، ما) کو اسے ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ مس^۱ $\frac{ما - لا}{لا - لا}$ بناتا ہے، اور وہ خط جو ف کو ب سے ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ مس^۱ $\frac{ما - لا}{لا - لا}$ بناتا ہے۔ اب چونکہ خط ف ب

اور ف ب علی القوائم ہیں اس لیے

$$۰ = \frac{ما - لا}{لا - لا} \times \frac{ما - لا}{لا - لا} + ۱$$

$$یا (لا - لا) (لا - لا) + (ما - ما) (ما - ما) = ۰$$

مثال ۳۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز (۴، -۳) ہے اور نصف قطر ۵ ہے۔
جواب: لا + ما + لا + لا + ما = ۰

مثال ۴۔ اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات لا + ما - لا - لا = ۱۱ ہے۔

جواب: مرکز (۱، ۲) نصف قطر ۴

مثال ۵۔ اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات لا + ما + لا + لا - لا - لا = ۱۶ ہے۔

جواب: مرکز $(-\frac{۲}{۵}, \frac{۴}{۵})$ نصف قطر ۲

مثال ۶۔ نقطوں (۱، ۳)، (۲، ۱) اور (۱، ۱) میں سے گزرنیوالے

دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۵ لا + ۵ ما - ۱۱ لا - ۱۱ ما - ۱۲ = ۰

مثال ۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں (۰، ۰) (۱، ۰) (۰، ۱) (۱، ۱) اور (۰، ۱) میں سے گزرتا ہے۔ جواب: لا + ما - ۱ لا - ۱ ما = ۰

مثال ۸۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں (۱، ۰) (۰، ۱) (۱، ۱) (۰، ۱) اور (۰، ۱) میں سے گزرتا ہے۔ جواب: لا + ما + لا - ۱ ما - ۱ لا = ۰

۶۔ دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جبکہ محاورہ زاویہ سے پہلے

مائل ہوں۔

نقطہ (د، ع) سے نقطہ (لا، ما) کے فاصلہ کا مربع

(لا - د) + (ما - ع) + ۲ (لا - د) (ما - ع) جم سے (دفعہ ۴)

ہوگا۔ اس لیے اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز نقطہ (د، ع) پر اور

جس کا نصف قطر ہو

(لا - د) + (ما - ع) + ۲ (لا - د) (ما - ع) جم سے = ۰ (۱)

یا لا + ما + ۲ لا ما جم سے - ۲ لا (د + ع جم سے) - ۲ ما (ع + د جم سے)

+ د + ع + ۲ د ع جم سے - ۰ = ۰ (۲)

ہوگی۔

پس کسی دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاورہ شکل

لا + ما + ۲ لا ما جم سے + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ (۳)

کی ہوگی جہاں گ، ف، ج کسی مخصوص دائرہ کے لحاظ سے مستقلات ہیں

لیکن مختلف دائروں کے لیے مختلف ہیں۔

مساوات (۳) درست رہے گی اگر ہم اس کی طرفین کو کسی مستقل

عدد سے ضرب دیں تب اس کی شکل ہو جائے گی:

لا + ۲ لا ما جم سے + لا + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ (۴)

پس ایک دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاورہ دوسرے درجہ کی

ہوتی ہے اور (۱) لا اور ما کے سر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور (۲) لا ما اور لا کے سروں کی نسبت ۲ جم سہ ہوتی ہے جہاں سہ محوروں کا درمیانی زاویہ ہے۔

ہم اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کر سکتے ہیں جس کی مساوات
 $لا + ما + ۲ لا ما$ جم سہ + $۲ گ$ لا + $۲ ف$ ما + $ج = ۰$ ہے۔ کیونکہ یہ مساوات
 مساوات (لا - د) + (ما - ع) + $۲ (لا - د)$ (ما - ع) جم سہ - $۲ = ۰$ کے
 مماثل ہوگی اگر $د + ع$ جم سہ = $گ$ ، $ع + د$ جم سہ = $ف$ ، اور $د + ع + ۲$
 $۲ د$ جم سہ - $۲ = ج$ ۔ اس لیے جب $ا$ سہ = $ف$ جم سہ - $گ$ ، $ع$ جب $ا$ سہ
 = $گ$ جم سہ - $ف$ اور $ا$ جب $ا$ سہ = $ف + گ - ۲$ $۲ ف$ گ جم سہ
 - $ج$ جب $ا$ سہ۔

۶۸ - تعریف - فرض کرو کہ کسی منحنی پر ف اور ق دو نقطے لے (۷۶)

گئے ہیں اور فرض کرو کہ نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ف سے قریب
 اور قریب تر آتا ہے، تب خط ف ق کے انتہائی محل کو جبکہ ق حرکت
 کر کے ف تک آئے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جائے منحنی کا محاس نقطہ
 ف پر کہتے ہیں۔

وہ خط جو ف میں سے گذر کر محاس پر عمود ہو نقطہ ف پر منحنی کا عماد
 کہلاتا ہے۔

۶۹ - دائرہ لا + ما = ا کے کسی نقطہ پر کے محاس کی مساوات

معلوم کرنا۔ فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی دو نقطوں کے محدود لا، ما اور لا، ما ہیں۔

نقطہ (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گذر نیوالے قاطع کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ما - ما}{ما - ما} ،$$

ہے۔ لیکن چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

$$لا^۲ + ما^۲ = لا^۲ \text{ اور } لا^۲ + ما^۲ = لا^۲$$

اس لیے $لا^۲ - لا^۲ = ما^۲ - ما^۲$ (۲)۔

مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دینے سے

$$(۳) \dots\dots\dots (لا - لا)(لا + لا) = (ما - ما)(ما + ما)$$

اب فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) نقطہ (لا، ما) تک حرکت کرتا ہے

اور بالآخر اس پر منطبق ہوتا ہے، تب انتہا میں وتر نقطہ (لا، ما) پر ماس

بجای آتا ہے۔ پس ماس کی مساوات (۳) میں $لا = لا$ اور $ما = ما$ رکھنے سے

حاصل ہوتی ہے چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$۰ = (لا - لا) + (ما - ما)$$

$$یا \quad لا + ما = لا + ما$$

$$لا + ما = لا + ما$$

نقطہ (لا، ما) پر کے ماس کی مطلوبہ مساوات ہے۔

۴۔ اس دائرہ کے کسی نقطہ پر کے ماس کی مساوات معلوم

کرنا جس کی مساوات

$$لا + ما + گ + لا + ف + ج = ۰$$

ہے۔ دو نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

(۷)

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ما - ما}{ما - ما} ،$$

ہے۔ چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

$$لا + ما + گ + لا + ف + ما + ج = .$$

$$لا + ما + گ + لا + ف + ما + ج = .$$

۱. (لا - لا) (لا + لا + گ) = (ما - ما) (ما + ما + ف) ... (۲)

مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دو تو قاطع کی

مساوات

$$(لا - لا) (لا + لا + گ) = (ما - ما) (ما + ما + ف)$$

حاصل ہوگی۔

اس لیے (لا، ما) پر کے مماس کی مساوات

$$(لا - لا) (لا + گ) + (ما - ما) (ما + ف) = .$$

$$لا + لا + ما + گ + لا + ف + ما = لا + گ + لا + ف + ما$$

ہے۔

طرفین میں گ + لا + ف + ما + ج جمع کرو تو چونکہ (لا، ما) دائرہ پر

ہے اس لیے مماس کی مساوات ہو جاتی ہے

$$لا + لا + ما + گ + (لا + لا) + ف + (ما + ما) + ج = .$$

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نقطہ (لا، ما) پر کے مماس کی مساوات

دائرہ کی مساوات سے لا کو لا لائیں، ما کو ما لائیں، ۲ لا کو لا لائیں

میں، اور ۲ ما کو ما + ما میں بدلنے سے معلوم کیجا سکتی ہے۔

مثال ۱۔ دائرہ لا + ما = ۲۵ کے نقطہ (۴، ۳) پر کے مماس

کی مساوات ۳ لا + ۴ ما = ۲۵ ہے۔

مثال ۲۔ لا + ما = ۲۶ - لا - ۳ ما = ۲ کے نقطہ (۲، -۲) پر کے

مماس کی مساوات

$$۵۲ - لا - ۲ ما - (۲ + لا) ۳ - (۲ - ما) ۲ = ۲$$

$$۰ = ۱۰ + لا + ما$$

یا

ہے۔

مثال ۳۔ $لا + ما = ۱۶۹$ کے نقطوں $(۱۲، ۵)$ ، $(۱۲، ۵)$ کے
ماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ حماس نقطہ $(۴، ۱۴)$ پر علی التوا
مستطاع ہوتے ہیں۔

مثال ۴۔ $لا + ما = ۴ - لا - ما = ۴ + ما = ۰$ کے نقطوں $(۲، ۴)$

اور $(۲، ۴)$ پر کے حماس معلوم کرو۔ جواب: $لا = ۴$ اور $ما = ۴$

۱۴۔ ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔ (۷۸)

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما = ۱$$

ہے۔ اگر اس پر $(لا، ما)$ کوئی نقطہ ہے تو اس نقطہ پر حماس کی مساوات

$$لا + ما = ۱ \quad (۱)$$

ہے۔

اُس خط کی مساوات جو $(لا، ما)$ میں سے گذر کر (۱) پر عمودِ محسوب

دفعہ ۳۰

$$(لا - لا) (لا - ما) - (ما - ما) (لا - لا) = ۰$$

$$یا \quad لا - ما - ما - لا = ۰ \quad (۲)$$

ہے۔ یہ نقطہ $(لا، ما)$ پر عماد کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ دائرہ کے کسی نقطہ پر عماد

مبدأ میں سے گذرتا ہے یعنی دائرہ کے مرکز میں سے۔

۲۴۔ ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع

معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما = ۱ \quad (۱)$$

اور خط مستقیم کی مساوات

ما = م + لا + ج ، (۲)
ہے۔ ان نقطوں پر جو خط مستقیم اور دائرہ میں مشترک ہیں یہ دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں۔ خط پر کے نقطے مساوات ما = (م + لا + ج) کو پورا کرتے ہیں اور دائرہ پر کے نقطے مساوات ما = لا کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیے مشترک نقطوں کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے
(م + لا + ج) = لا - لا

یا لا (۱ + م) + م ج + لا ج - لا = (۳)
یہ ایک دو درجہ مساوات ہے اور ہر دو درجہ مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں، حقیقی اور مختلف، یا حقیقی اور مساوی، یا خیالی۔
پس لا کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے جواب میں ما کی دو قیمتیں (۲) (۴)
سے معلوم ہوتی ہیں۔ اس طرح پر خط مستقیم ایک دائرہ سے دو نقطوں پر ملتا ہے حقیقی اور مختلف، یا دو منطبق، یا دو خیالی نقطوں پر۔ خیالی نقطے وہ ہیں جنکے محدودوں میں سے ایک یا دونوں خیالی ہوں۔
خط مستقیم اور دائرہ کے خیالی نقاط تقاطع کو ہندسی طور پر تعبیر کرنا ناممکن ہے، لیکن ہم دیکھیں گے کہ خیالی نقطے اور خطوط اکثر اہم مفہوم کے حامل ہوتے ہیں اور ان پر غور کرنا ضروری ہے تاکہ ہم اپنے مسئلوں کو عام سے عام شکلوں میں بیان کر سکیں۔

مساوات (۳) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونگی اگر

$$(۱ + م) (ج - لا) = م ج$$

یعنی اگر
اگر لا کی دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو ما کی دو قیمتیں
بھی (۲) کی رو سے ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہئیں۔
اس لیے وہ دو نقطے جن پر دائرہ خط سے منقطع ہوتا ہے منطبق ہونگے

$$اگر ج = لا \sqrt{۱ + م}$$

پس خط $ما = م + لا + ا$ ، $دائرہ لا + ا = م + ا$ ، $دائرہ لا + ا = م + ا$ کو م کی تمام قیمتوں کے لیے مس کرے گا۔

چونکہ جذر $ما + ا$ کو کوئی ایک علامت دیا جاسکتی ہے اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ م کی ہر قیمت کے جواب میں دائرہ کے دو ماس ہوتے ہیں یعنی کسی دیے ہوئے خط کے متوازی دو ماس ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ $لا = ۷$ اور $ما = ۸$ ، دائرہ

$$لا + ا = ۱۲ - م - ۶ - لا - ۷ = ۰$$

کو مس کرتے ہیں۔ ماسوں کے نقاط ماس معلوم کرو۔ جواب: (۴، ۳) اور (۸، ۲)

مثال ۲۔ خط $لا + ا = ۵$ اور دائرہ $لا + ا = ۲۵$ کے تقاطع معلوم کرو۔

جواب: (۵، ۰) اور (۳، ۳)

مثال ۳۔ معلوم کرو کہ خط $لا + ا = ۳$ اور دائرہ $لا + ا = ۱۲$

$$لا + ا = ۱۲ - م - ۶ - لا - ۷ = ۰$$

کو کہاں قطع کرتا ہے۔ جواب: خط نقطہ (۱، ۱) پر مس کرتا ہے۔

۳۔ ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے

نقاط وسطی کا طریق معلوم کرنا۔

دائرہ کے مرکز کو مبدا اور محور لا کو وتروں کے متوازی لو۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ا = ۱۲ - م - ۶ - لا - ۷ = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ متوازی وتروں میں سے کسی ایک کی مساوات

$$ما - ج = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

(۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع کے لیے

$$لا + ج = ۱۲$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = c$$

چونکہ لاکہ یہ دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وتر کے نقطہ وسطی کا فاصلہ صفر ہے یعنی وتر کا وسطی نقطہ ہمیشہ محور ما پر رہتا ہے۔ یہ ج کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ اگر ج = ۱ تو لاکہ دونوں قیمتیں خیالی ہیں لیکن ان کا مجموعہ تاہم صفر ہے اور اسلئے وتر کا وسطی نقطہ پھر بھی محور ما پر رہتا ہے۔

پس ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے نقاط وسطی کا طریق مرکز میں سے گذرنے والا وہ خط مستقیم ہے جو وتروں پر عمود ہے۔ اس طریق کو اس خط کے اُس حصہ تک محدود فرض کرنے کی ضرورت نہیں ہے جو دائرہ کے اندر ہے۔

۴۔ دفعاتِ مابقی میں ہم نے دائرہ کے کوئی ہندسی خواص تسلیم نہیں کئے ہیں الا آنکہ اس کے کسی نقطہ سے مرکز کا فاصلہ مستقل رہتا ہے۔ اگر ہم ان مسئلوں کو مان لیں جو اقلیدس جلد ۳ میں ثابت کئے گئے ہیں تو دفعاتِ مابقی کے بعض نتیجے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ اُس دائرہ پر جس کی مساوات $لا + ما = ۱$ ہے کوئی نقطہ $(لا، ما)$ ہے تو اُس خط کی مساوات جو $(لا، ما)$ سے دائرہ کے مرکز تک

کھینچا گیا ہے $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۱} = ۰$ ہے اور $(لا، ما)$ میں سے گذرنے والے

عمودی خط کی مساوات (دفعہ ۳)

$$(لا - لا) (لا - لا) + (ما - ما) (ما - ما) = ۰$$

$$لا - لا + ما - ما = ۰$$

یا اور اقلیدس جلد ۳ سے یہ خط اُس نقطہ پر کا مماس ہے۔

پھر خط ما - م - لا - ج = ۰، دائرہ $لا + ما = ۱$ کو ممس کرے گا اگر (۸۱) خط کا عمودی فاصلہ دائرہ کے مرکز سے نصف قطر کے مساوی ہو، اس لیے شرط

$$c = \pm \sqrt{1 + m^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۷۵۔ کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو مماس کھینچے جاسکتے

ہیں اور یہ دو مماس حقیقی ہوں گے اگر یہ نقطہ دائرہ کے باہر ہو،
منطبق ہوں گے اگر نقطہ دائرہ پر ہو، اور خیالی ہوں گے اگر نقطہ
دائرہ کے اندر ہو۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ہے اور فرض کرو کہ کسی نقطہ کے محدد (ہ، ک) ہیں۔ فرض کرو کہ دائرہ
پر کے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہیں۔ تب (لا، ما) پر کے مماس کی
مساوات

$$لا لا + ما ما = ر^2$$

ہوگی۔ یہ مماس نقطہ (ہ، ک) میں سے گزرے گا اگر

$$ہ لا + ک ما = ر^2 \quad (۱) \dots \dots \dots$$

لیکن (لا، ما) دائرہ پر ہے اس لیے

$$لا لا + ما ما = ر^2 \quad (۲) \dots \dots \dots$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے لا اور ما کی وہ قیمتیں معلوم ہوں گی
جن پر کے مماس مخصوص نقطہ (ہ، ک) میں سے گزرتے ہیں۔ ما کی بجائے
(۲) میں اندراج کرو تو

$$لا = \frac{ر^2 - (ہ لا)}{ک}$$

$$لا (ہ + ک) - ۲ (ہ لا + ک ما) = ۰ \quad (۳) \dots \dots \dots$$

مساوات (۳) سے فصل حاصل ہوتے ہیں اور (۱) سے متناظر معین معلوم ہوتے ہیں۔ اب چونکہ مساوات (۳) ایک دو درجی مساوات ہے اس لیے دو نقطے ہیں جن پر کے ماس نقطہ (۵، ۶) میں سے گزرتے ہیں۔ مساوات (۳) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہونگی جو جب اسکے کہ

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (x - 1)^2 = 0$$

صفر سے بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنی بموجب اسکے کہ

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

صفر سے بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنی بموجب اس کے کہ نقطہ (۵، ۶) دائرہ کے باہر، دائرہ پر، یا دائرہ کے اندر ہو۔

مثالیں

(۸۲)

- ۱۔ ان نقطوں کے محد و معلوم کرو جہاں خط $x^2 + 2x + 1 = 0$ ، دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو قطع کرتا ہے۔ جواب: (۱، -۱) اور $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
- ۲۔ ثابت کرو کہ خط $x^2 + 2x + 1 = 0$ ، دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو مس کرتا ہے۔
- ۳۔ ثابت کرو کہ دائرے $x^2 + y^2 = 1$ اور $x^2 + y^2 = 4$ کو مس کرتے ہیں۔
- ۴۔ ثابت کرو کہ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور $x^2 + y^2 = 4$ کو محاور لا اور ماکوسس کرتا ہے۔
- ۵۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط $x = 0$ اور $y = 0$ کو مس کرتا ہے۔ جواب: $x^2 + y^2 = 1$
- ۶۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط $x = 0$ اور $y = 0$ کو مس کرتا ہے۔

جواب: $\lambda + \mu - \lambda + \mu + \lambda + \mu = 0$ یا $\lambda + \mu - \lambda + \mu + \lambda + \mu = 0$

۷۔ ثابت کرو کہ خط $\lambda = m(1 - \lambda) + 1 + \sqrt{1 + m^2}$ دائرہ $\lambda + \mu = 2$

۲ لا کو مس کرتا ہے خواہ m کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۸۔ دو خطوط کھینچے گئے ہیں جو علی الترتیب نقطوں $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$

میں سے گذرتے ہیں اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ θ بناتے ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔ جواب: دائرہ $\lambda + \mu = 2 \pm \sqrt{2}$ یا $\mu = 2 \pm \sqrt{2}$

۹۔ ایک دائرہ ایک دیے ہوئے خط کو مس کرتا ہے اور دوسرے

خط پر جو اول الذکر خط پر عمود ہے مستقل طول (2λ) قطع کرتا ہے۔ اس کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔ جواب: $\lambda = 2$ یا $\lambda = 1$

۱۰۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطوں $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$

سے اس پر کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۱۱۔ $\lambda + \mu = 2$ کے ان دو ماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور

λ کے ساتھ 90° کا زاویہ بناتے ہیں۔ جواب: $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$

۱۲۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو ایک مثلث میں جس کے ضلعوں کی مساواتیں

$$\lambda = 1, \mu = 2, \lambda + \mu = 5$$

ہیں کھینچا گیا ہے۔ جواب: $\lambda = 1, \mu = 2$ یا $\lambda = 2, \mu = 1$

۱۳۔ کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو ماس کھینچے گئے ہیں

اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ماسوں کے نقاط ماس کو

ملا تا ہے۔

فرض کرو کہ اس نقطہ کے محدد جس سے ماس کھینچے گئے ہیں (λ, μ)

ہیں۔ فرض کرو کہ نقاط تماس کے محدود $ہ$ ، $ک$ اور $ھ$ ، $ک$ ہیں اور دائرہ کی مساوات $لا + ما = لا' + ما'$ ہے۔

(۸۳)

ماسوں کی مساواتیں حسب دفعہ ۶۹

$$لا + ما - ک = لا' + ما' - ھ$$

$$لا + ھ + ما - ک = لا' + ھ + ما' - ھ$$

ہونگی۔ لیکن چونکہ یہ دونوں تماس نقطہ $(لا'، ما')$ میں سے گذرتے ہیں اس لیے یہ دونوں مساواتیں محدودوں $لا'، ما'$ سے پوری ہوتی ہیں اسلئے

$$لا + ھ + ما - ک = لا' + ھ + ما' - ھ \quad (۱)$$

$$لا + ھ + ما - ک = لا' + ھ + ما' - ھ \quad (۲)$$

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط $ھ$ ، $ک$ اور $ھ$ ، $ک$ اس خط مستقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

$$لا + لا' + ما - ما' = ھ - ھ \quad (۳)$$

ہے۔

پس (۳) اس خط مستقیم کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ $(لا'، ما')$ سے کیچنے ہوئے ماسوں کے نقاط تماس میں سے گذرتا ہے۔

اگر دائرہ کی مساوات $لا + ما + گ = لا' + ما' + ج = ھ$ ہو تو ہم اُسی طریقہ پر (دفعہ ۶۰ کے نتیجہ کو مانکر) ثابت کر سکتے ہیں کہ اس خط کی مساوات جو نقطہ $(لا'، ما')$ سے کیچنے ہوئے ماسوں کے نقاط تماس میں گذرتا ہے

$$لا + لا' + ما + ما' + گ + ف + (ما + لا) + ج = ھ$$

ہے۔

اگر نقطہ $(لا'، ما')$ دائرہ کے باہر ہو تو اس سے کیچنے ہوئے دو تماس حقیقی ہوں گے اور اس لیے محدود $ھ$ ، $ک$ اور $ھ$ ، $ک$ حقیقی ہوں گے لیکن اگر نقطہ $(لا'، ما')$ دائرہ کے اندر ہو تو یہ دو تماس خیالی ہوں گے لیکن اس صورت میں بھی وہ خط جس کی مساوات (۳) ہے حقیقی خط ہوگا جبکہ $لا$ اور $ما$ حقیقی ہوں۔ اس طرح ایک حقیقی خط ہوتا ہے جو دائرہ کے اندر و بی نقطہ

کھینچے ہوئے دو خیالی ماسوں کے خیالی تقابلہ تاس کو ملاتا ہے۔
تعریف۔ اگر کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے ماس کھینچے گئے ہوں
 اور ان ماسوں (خیالی یا حقیقی) کے نقاط تاس کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ
 ملایا جائے تو اس خط مستقیم کو دائرہ کے لحاظ سے اُس نقطہ کا قطبی کہتے ہیں۔
 ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو جن نقطوں (حقیقی یا خیالی) پر قطع کرتا ہے
 ان نقطوں پر کھینچے ہوئے ماسوں کے نقطہ تقاطع کو دائرہ کے لحاظ سے
 اُس خط کا قطب کہتے ہیں۔

۷۔ فرض کرو کہ کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو ماس ت ف
 ت ق ہیں۔ فرض کرو کہ ق، ف کی جانب حرکت کر کے بالآخر ف پر
 آکر منطبق ہوتا ہے تو ت بھی حرکت کر کے بالآخر ف پر آکر منطبق ہوگا اور
 ماس ت ف اور ت ق بالآخر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے
 اور وتر ف ق بھی منطبق ہوگا۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ت کا قطبی جبکہ
 ت دائرہ پر ہو اس نقطہ پر کے ماس پر منطبق ہوتا ہے۔



یہ دفعہ ۷ کے نتیجہ کے مطابق ہے۔ کیونکہ قطبی کی مساوات اُسی
 شکل کی ہے جو ماس کی مساوات کی ہے اور اس لیے ایک نقطہ کا قطبی
 جبکہ نقطہ دائرہ پر ہو اُس نقطہ پر کا ماس ہوتا ہے

۸۔ اگر ایک نقطہ ف کا قطبی، ق میں سے گزرے تو
 ق کا قطبی، ف میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ ف کے محدود (لا، ما) ہیں اور ق کے (لا، ما) فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات لا + ما = لا = ما ہے۔
(لا، ما) اور (لا، ما) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\text{لا} + \text{ما} - \text{لا} = \text{لا} \quad (۱)$$

$$\text{لا} + \text{ما} - \text{ما} = \text{لا} \quad (۲)$$

ہیں۔ اگر ق، ف کے قطبی پر ہے تو اس کے محدود مساوات (۱) کو پورا کرنا چاہئیں اس لیے

$$\text{لا} + \text{ما} - \text{لا} = \text{لا}$$

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ ف، خط (۲) پر ہو یعنی ق کے قطبی پر اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اگر ق، ایک ثابت خط مستقیم پر ہو اور ف اس خط کا قطب ہو تو ق کا قطبی، ف میں سے گزرنا چاہیے کیونکہ بموجب فرض ف کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے۔

اس کے بالعکس اگر کسی ثابت نقطہ ف میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا جائے اور ق اس خط کا قطب ہو تو چونکہ ف، ق کے قطبی پر ہے اس لیے نقطہ ق ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہونا چاہیے یعنی ف کے قطبی پر۔

اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ سر پر ملیں تو سر خط (۱۵) ف، ق کا قطب ہوگا۔

چونکہ سر، ف کے قطبی پر ہے اس لیے سر کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے، اسی طرح وہ ق میں سے بھی گزرتا ہے اور اس لیے اس کو خط ف، ق ہونا چاہیے۔

۷۹۔ دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کیلئے ہندسی عمل۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$x^2 = y^2 + z^2$$

ہے اور ف کوئی نقطہ ہے اور اس کے محدد لاء، مائیں۔
دائرہ کے لحاظ سے ف کے قطبی کی مساوات

$$(1) \dots\dots\dots x^2 = y^2 + z^2$$

ہے۔
اس خط کی مساوات جو دائرہ کے مرکز و اور ف کو ملاتا ہے

$$(2) \dots\dots\dots \frac{x}{a} = \frac{y}{b} - \frac{z}{c}$$

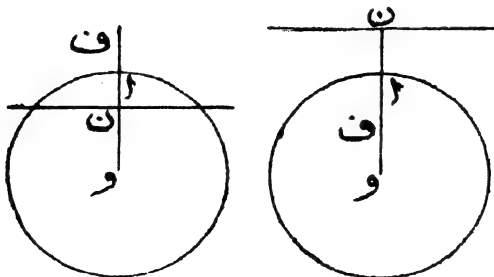
ہے۔
مساواتوں (۱) اور (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی اس خط پر عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملاتا ہے۔

اگر و سے قطبی پر عمود و ن ہو تو

$$(دفعہ ۳۱) \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \quad \text{نیز}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \quad \text{و ن} \times \text{و ف} = \frac{x}{a}$$



(۸۶) پس قطبی کو حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔
 وف کو بلاؤ اور فرض کرو کہ وہ دائرہ کو ۱ پر قطع کرتا ہے۔ خط وف پر
 ایک ایسا نقطہ ن لو کہ وف : و۱ = ۱ : و۲۔ ون - ن میں سے
 ایک خط وف پر عمود کھینچو۔

مثال ۱۔ دائرہ لا + ما = ۴ کے لحاظ سے حسب ذیل نقطوں کے
 قطبیوں کی مساواتیں لکھو :

$$(۱) (۳، ۲) \quad (۲) (۱، -۳) \quad (۳) (۱، -۱)$$

مثال ۲۔ $۲ - لا + ما = ۶$ کا قطب بلحاظ دائرہ
 $لا + ما = ۵$ ۔

کے معلوم کرو۔
 [اگر لا، ما قطب ہے تو دیا ہوا خط وہی ہے جو لا + ما = ۵ ہے۔
 اس لیے

$$\frac{لا}{۲} = \frac{ما}{۲} = \frac{۵}{۴}$$

اس لیے مطلوب قطب $(\frac{۵}{۲}, \frac{۵}{۲})$ ہے۔
 مثال ۳۔ حسب ذیل نقطوں کے قطب اس دائرہ کے لحاظ سے
 معلوم کرو جس کی مساوات لا + ما = ۳۵ ہے :-

$$(۱) ۴ لا + ما = ۷ \quad (۲) ۳ لا - ما = ۵ \quad (۳) لا + ما = ۱$$

جوابات : (۱) (۳۰، ۲۰) (۲) (۲۱، -۱۴) (۳) (۳۵، ۱) (ب)
 مثال ۴۔ ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جہاں خط لا = ۱ دائرہ لا + ما
 = ۴ کو قطع کرتا ہے۔ ان نقطوں پر کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ
 وہ نقطہ (۴، ۰) پر مستطیع ہوتے ہیں۔

جواب : (۱، ۳۱) (۱، -۳۱)

مثال ۵۔ ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جہاں خط لا + ما = ۲۵
 دائرہ لا + ما = ۵ کو قطع کرتا ہے اور ان نقطوں پر کے مماسوں کی مساواتیں

معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ مماس نقطہ (۶، ۸) پر متقاطع ہوتے ہیں۔ نقطہ (۶، ۸) کے قطبی کی مساوات بلحاظ اس دائرہ کے لکھو۔
 مثال ۶۔ اگر نقطہ (۸، ۸) کا قطبی بلحاظ دائرہ $۱ + ۲ = ۱$ کے دائرہ (۸، ۸) ہے۔
 $= ۱$ کو مس کرے تو ثابت کرو کہ (۸، ۸) اس منحنی پر ہے جس کی مساوات $۱ + ۲ = ۱$ ہے۔

۸۰۔ دائرہ کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے قطبی محدوغہ 'عہ' ہیں۔
 فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ۱ کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ ف کے قطبی محدوغہ (ر، طہ) ہیں۔ تب

$$ج ف = ۱ = ج' + و ف - ۲ و ج \times و ف ج و ف$$

لیکن ج ف = ۱ و ج = غہ و ف = ر زاویہ لا و ج = عہ اور
 زاویہ لا و ف = طہ۔ اس لیے

$$۱ = غہ + ر - ۲ ر غہ جم (طہ - عہ) \dots \dots (۱)$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر میدانہ دائرہ کے مرکز پر ہو تو غہ = ۱ اور اس لیے (۱) سے

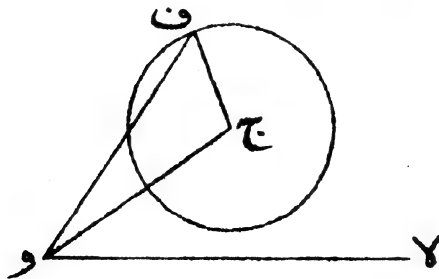
(۸۴)

$$۱ = ۲ ر جم (طہ - عہ) \dots \dots (۲)$$

اور اگر ابتدائی خط مرکز میں سے گزرے تو عہ صفر ہوگا اور مطلوبہ مساوات

$$۱ = ۲ ر جم طہ \dots \dots (۳)$$

ہوگی۔



مساویات (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر طہ کی کسی مخصوص قیمت کے متناظر کی دو قیمتیں رہ، رہ ہوں تو

اس طرح $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ کا انحصار طے نہیں ہے۔

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک خط مستقیم کھینچا جائے جو دائرے کو قطع کرے تو مقطوعات سے بنا ہوا مستطیل رقبہ میں مشتمل ہوتا ہے۔

(۴) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مبداء، دائرہ کے اندر ہو (اس صورت میں $\Delta > 1$) تو r اور r_0 مختلف العلالت ہونے چاہئیں اور اس لیے ان کو مختلف سمتوں میں کھینچنا چاہئے جیسا کہ ہندسی طور پر واضح ہے۔

علی القوا تم دائرے

۸۱۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دائرے

لا + ما + گ + لا + ف + ما + ج = . اور لا + ما + گ + لا + ف + ما + ج = .

ایک دوسرے کو علی القوا تم قطع کریں۔

ان دو دائروں کے مرکز علی الترتیب (-گ، -ف) اور (-گ، -ف) ہیں اور ان کے نصف قطروں کے مرتب علی الترتیب گ + ف، -ج، اور گ + ف، -ج ہیں۔

اب یہ دائرے علی القوائم متقاطع ہوں گے اگر مرکروں کے درمیانی فاصلہ کامربع نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ پس مطلوبہ شرط یہ ہے کہ

(گ-گ) + (ف-ف) + گ + ف + ج + گ + ف - ج

جو ۲ گ گم + ۲ ف ف - ج - ج = ۰
میں تحویل ہوتی ہے -

متبادل ثبوت :- دائروں کے ایک مشترک نقطہ (لا، ما) پر کے

ماسوں کی مساواتیں

$$لا، لا + ما، ما + گ، گ (لا + لا) + ف، ف (ما + ما) + ج، ج = ۰$$

$$اور لا، لا + ما، ما + گ، گ (لا + لا) + ف، ف (ما + ما) + ج، ج = ۰$$

ہیں - یہ ماس علی القوائم ہونگے اگر

$$(لا + گ) (لا + گم) + (ما + ف) (ما + فم) = ۰$$

$$یعنی لا + ما + لا (گ + گ) + ما (ف + ف) + گ (گ + گ) + ف (ف + ف) = ۰ \dots (۱)$$

لیکن چونکہ (لا، ما) دونوں دائروں پر ہے اس لیے

$$لا + ما + ما، گ + لا، لا + ۲ ف، ف + ما، ج = ۰ \dots (۲)$$

$$لا + ما + ما، گ + لا، لا + ۲ فم، فم + ما، ج = ۰ \dots (۳)$$

(۱) کو ۲ سے ضرب دو اور (۲) اور (۳) کے مجموعہ کو تفریق کر دو تو

$$۲ گ گم + ۲ ف ف - ج - ج = ۰$$

۸۲ - اس ماس کا طول معلوم کرنا جو ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دائرہ کا کھینچا گیا ہو -

فرض کرو کہ دیا ہوا نقطہ ت ہے اور دائرہ کا مرکز ج ہے - فرض کرو کہ ت سے دائرہ کے دو ماسوں میں سے ایک ت ف ہے - تب ہم جانتے ہیں کہ زاویہ ج ف ت قائمہ زاویہ ہے، اس لیے

$$ت ف = ج ت - ج ف \dots (۱)$$

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$(لا - ا) + (ما - ب) - ج = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

ہے اور فرض کرو کہ ت کے محدود لا، ما ہیں تو

$$ج ت = (لا - ا) + (ما - ب)$$

اس لیے (۱) کی رو سے

$$ت ف = (لا - ا) + (ما - ب) - ج = ۰ \dots \dots \dots (۳)$$

اس لیے مساوات (۲) کے دائیں جانبی رکن میں محدودوں لا، ما کو درج کرنے سے ت ف یعنی حاس کے طول کا مربع معلوم ہوتا ہے۔

(۸۹) پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $س = ۰$ ایک دائرہ کی مساوات ہو

(جہاں س کو اختصاراً لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج کی بجائے لکھا گیا ہے) اور س میں کسی نقطہ کے محدود درج کئے جائیں تو نتیجہ اُس حاس کے طول کے مربع کے مساوی ہوتا ہے جو اُس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو یا اُس مستطیل (اقلیدس جلد سوم مسئلہ ۳) کے رقبہ کے مساوی جس کے متصلہ اضلاع اُن وتروں کے مقطوع ہوں جو نقطہ میں سے کھینچے گئے ہوں۔ اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو تو مستطیل کا رقبہ منفی ہوگا اور حاس کا طول خیالی۔

اگر دائرہ کی مساوات

$$۱ لا + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

ہو تو کسی نقطہ سے حاس کے طول کا مربع معلوم کرنے کے لیے اول اسے تقسیم کرنا چاہئے اور پھر اُس نقطہ کے محدود درج کرنا چاہئے جس سے حاس کھینچا گیا ہے۔

حاسوں کے اُس زوج کی مساوات معلوم کرنا جو کسی نقطہ

سے دائرہ لا + ما = ۱ کے کھینچے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) سے کھینچے ہوئے حاس ت ف اور ت ق

ہیں۔

اب اگر ان میں سے ایک ماس پر کوئی نقطہ (λ^2, μ^2) ہو (فرض کرو کہ
ت ف پر) اور ف ق پر عمود ت لی اور μ^2 ماس پر کھینچے جائیں تو متشابہ
مثلثوں سے

ت ف : س ر ف = ت لی : س ر م (۱)
لیکن ف ق کی مساوات

$$\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2 = \mu^2$$

$$\frac{\text{ت لی}}{\text{س ر م}} = \frac{(\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2)}$$

اور دفعہ ۲ کی رو سے

$$\frac{\text{ت ف}}{\text{س ر ف}} = \frac{(\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2)}$$

اس لیے (۱) سے

$$(\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2) - (\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2) = (\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2) - (\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2)$$

اس لیے ماسوں میں سے کسی ایک کا کوئی نقطہ طریق

$$(\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2) - (\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2) = (\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2) - (\lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2)$$

پر ہے اور اس لیے یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

دو دائروں کی بنیادی محور

۸۳ — اگر ایک دائرہ کی مساوات

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda + 2\mu + 1 = 0 \dots\dots\dots (۱)$$

اور دوسرے دائرہ کی مساوات

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda + 2\mu + 1 = 0 \dots\dots\dots (۲)$$

ہو تو مساوات (۹۰)

لا + ما + گ لا + ف + ما + ج = لا + ما + گ لا + ف + ما + ج

(۳)

صرف کسی ایسے نقطے کے محدودوں سے پوری ہوگی جو (۱) اور نیز (۲) پر ہو۔
اس لیے مساوات (۳) ان نقطوں میں سے گزرنے والے طریق کو تعبیر
کرتی ہے جو دونوں دائروں میں مشترک ہیں۔

لیکن مساوات (۳)

۲ (گ - گ) لا + ۲ (ف - ف) ما + ج - ج = ۰ (۴)

میں تعمیل ہوتی ہے اور یہ مساوات درجہ اول کی ہے اور اس لیے ایک
خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پس مساوات (۳) یا (۴) ان نقطوں میں سے گزرنے والے
خط مستقیم کی مساوات ہے جو دائروں (۱) اور (۲) میں مشترک ہیں۔

اگر دو دائرے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کو حقیقی نقطوں میں قطع
نہ کریں تو بھی (۳) یا (۴) سے حاصل شدہ خط مستقیم تمام صورتوں میں حقیقی ہوگا
بشرطیکہ گ، ف، ج، گ، ف، ج حقیقی ہوں۔ اس طرح ہمیں ایک ایسے
حقیقی خط مستقیم کی مثال ملتی ہے جو دو دائروں کے خیالی تقاطع میں
سے گزرتا ہے۔

مساوات (۳) کا دوسرا ہندسی مفہوم بھی دیا جاسکتا ہے۔

اگر $0 =$ ایک دائرہ کی مساوات ہو جس میں لا کا سر ایک ہو
اور اگر کسی نقطہ کے محدود میں درج کئے جائیں تو نتیجہ اس ماس کے
مربع کے مساوی ہوگا جو اس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو (دفعہ ۸۲)۔
اب اگر خط مستقیم (۳) پر کسی نقطہ کے محدود لا، ما ہوں تو اس مساوات کی
دائیں جانب کا جملہ اس ماس کے مربع کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، ما)
سے دائرہ (۱) کا کھینچا گیا ہے اور بائیں جانب کا جملہ اس ماس کے مربع
کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، ما) سے دائرہ (۲) کا کھینچا گیا ہے۔

پس خط (۳) کے کسی نقطہ سے دو دائروں (۱) اور (۲) کے ماس

کھینچے جائیں تو یہ مماس ایک دوسرے کے مساوی ہوں گے۔
تعریف۔ وہ خط مستقیم جو دو دائروں کے نقاطِ تقاطع
 (حقیقی یا خیالی) میں سے کھینچا گیا ہو ان دائروں کا بنیادی محور
 کہلاتا ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ دو دائروں کے بنیادی محور کی یہ تعریف بھی
 ہو سکتی ہے کہ وہ ان نقطوں کا طریق ہے جن سے ان دو دائروں کے
 کھینچے ہوئے مماس طول میں مساوی ہوتے ہیں۔

ان دو دائروں کے مرکزوں کے محدود علی الترتیب گ۔ ف۔ ن
 اور گ۔ ف۔ ن ہیں اس لیے ان کو ملانے والے خط مستقیم کی مساوات

$$\frac{لا + گ}{گ - ف} = \frac{ما + ف}{ف - ن}$$

ہے جو (حسب دفعہ ۳۰) خط (۴) پر عمود ہے۔
 پس دو دائروں کا بنیادی محور ان کے مرکزوں کو ملانے والے
 خط پر عمود ہوتا ہے۔

۸۴۔ تین دائروں میں سے دو کے تین بنیادی محور
 ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر تین دائروں کی مساواتیں $س = س$ ، $س = س$ ، $س = س$ ہوں جن میں سے ہر ایک میں لا کا سر ایک ہو تو پہلے اور دوسرے کے
 بنیادی محور کی مساوات

$س - س = س$ ہے۔ دوسرے اور تیسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات
 $س - س = س$

ہے اور تیسرے اور پہلے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$$س - س = ۰$$

ہے۔ اب یہ ظاہر ہے کہ اگر ان میں سے دو مساواتیں کسی نقطہ کے محدود سے پوری ہوں تو تیسری مساوات بھی ان محدودوں سے پوری ہوگی۔ ان تین بنیادی محوروں کے نقطہ تقاطع کو دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

ہم محور دائرے

۸۵*۔ دائروں کے ایک نظام کی مساوات معلوم کرنا جنہیں

ہر زوج کا بنیادی محور وہی ہو۔

اگر مشترک بنیادی محور کو محور ما فرض کیا جائے تو نظام کے دائروں میں سے کسی دو کی مساوات (جبکہ اس کو معیاری شکل میں لکھا گیا ہو جس میں لاگاریٹم لگائی ہو) صرف لاگے سر میں مختلف ہو سکتی ہے۔ اس طرح دائروں کے نظام کی عام مساوات جبکہ ان دائروں میں سے کسی زوج کے بنیادی محور کی مساوات لا = ۰ ہو

$$لا + ما + ۲گ + ۲ف + ج = ۰$$

ہے جہاں ف اور ج تمام دائروں کے لیے وہی ہیں۔

اگر مبداء کو (۰، -ف) پر تبدیل کیا جائے تو مطلوبہ مساوات شکل

$$لا + ما + ۲گ + لا + ج = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

اختیار کرتی ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے اور گ مختلف دائروں کے لیے مختلف ہے۔

بنیادی محور دائروں کو حقیقی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج منفی ہو اور خیالی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج مثبت ہو۔

مساوات (۱) کو شکل

$$(لا + گ) + ۲ = ما - ج$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ پس اگر گ کو \pm راج کے مساوی لیا جائے تو دائرہ نقطوں (راج، ۰) میں سے ایک میں تحویل ہوگا۔

ان نقطہ دائروں کو ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے کہا جاتا ہے۔

جب ج مثبت ہوتا ہے یعنی جب دائرہ خود خیالی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے حقیقی ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس جب دائرے حقیقی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں۔ دفعہ ۸۱ میں معلوم شدہ شرط سے یہ فوراً مستنبط ہوتا ہے کہ مساواتوں

$$لا + ۲ + ما - ج = ۰$$

$$لا + ۲ + ما - ج = ۰$$

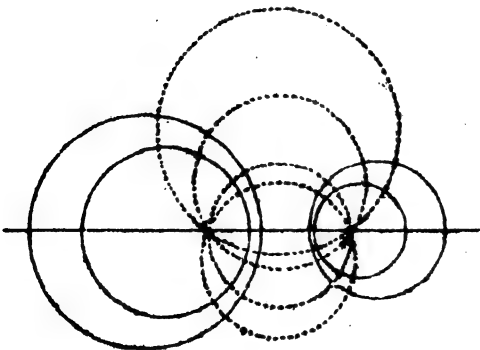
اور

سے تعبیر شدہ ہم محور دائروں کے دو نظامات جہاں ج تمام دائروں کیلئے وہی ہے ایسے ہیں کہ ایک نظام کا کوئی دائرہ دوسرے نظام کے تمام دائروں کو علی القوالم قطع کرتا ہے۔

یہ دو علی القوالم نظامات ایسے ہیں کہ ایک نظام کے مشترک نقطے دوسرے نظام کے انتہائی نقطے ہیں۔

شکل ذیل میں

(۹۳)



دائروں کے ایک
نظام کو پورے
خطوں سے اور
دوسرے نظام کو
نقطہ دار خطوں سے
تعبیر کیا گیا ہے۔

۸۶ *۔ اگر دو دائروں کی مساواتیں $S = .$ اور $S' = .$ ہوں تو مساوات $S = .$ لے $S' = .$ کی تمام قیمتوں کیلئے ان تمام دائروں کو تعبیر کرے گی جو $S = .$ اور $S' = .$ کے مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

اگر $S = .$ اور $S' = .$ علی الترتیب

$(1) \dots\dots\dots (1) \dots\dots\dots$ $S = .$ $S' = .$

$(2) \dots\dots\dots (2) \dots\dots\dots$ $S = .$ $S' = .$

ہوں تو مساوات $S = .$ لے $S' = .$

$(3) \dots\dots\dots (3) \dots\dots\dots$ $S = .$ $S' = .$

$(4) \dots\dots\dots (4) \dots\dots\dots$ $S = .$ $S' = .$

ہوگی۔ اب مساوات (۳) سرکھا ایک دائرہ کی مساوات ہے خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔

نیز اگر کسی نقطہ کے محدود (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں تو وہ (۳) کو بھی پورا کریں گے۔

پس $S = .$ لے $S' = .$ کی کسی قیمت کے لیے ایک ایسے

دائرہ کی مساوات ہے جو $S = .$ لے $S' = .$ کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

لہ کو مناسب قیمت دیکر دائرہ (۳) کو کسی دوسرے نقطہ میں سے

گذرا جاسکتا ہے، اس لیے $S = .$ لے $S' = .$ سے وہ تمام دائرے تعبیر ہوتے ہیں جو $S = .$ اور $S' = .$ کے نقاط تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔

مساوات $S = .$ لے $S' = .$ کا ہندسی مفہوم قابل غور ہے۔

اس نقطہ سے جس کے محدود مساوات $S = .$ لے $S' = .$ کو پورا کرتے ہیں

دائروں $S = .$ اور $S' = .$ کے تماس کھینچو تو دفعہ ۸۲ سے معلوم ہوگا

کہ $MS =$ کے MS کا مربع، $MS =$ کے MS کے مربع کا لہ گنا ہے۔
اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اُس نقطہ کا طریق جو اس طرح حرکت کرے کہ اس سے
دو دیے ہوئے دائروں کے MS ایک مستقل نسبت میں ہوں
ایک ہم محور دائرہ ہوتا ہے۔

۸۷۔ اگر دو دائروں کے مرکز O و O' اور نصف قطر r و r' ہوں تو
وہ دو نقطے جو خط OO' کو داغلا اور غار جائزیت $1:1$ میں تقسیم کرتے
ہیں ان دو دائروں کے مشابہت کے مرکز کہلاتے ہیں۔
مشابہت کے مرکزوں کے خواص پر بحث کرنے کا بہترین طریقہ
ہندسی طریقہ ہے۔

ان میں سے اہم ترین خواص یہ ہیں (۱) دو دائروں کے مشترک
ماسوں میں سے دو، مشابہت کے ہر مرکز میں سے گزرتے ہیں،
(۲) دو دائروں کے مشابہت کے ایک مرکز میں سے گزرنے والا
کوئی خط مستقیم ان دو دائروں سے متشابہا منقطع ہوتا ہے۔

مشابہت

۱۔ اُس MS کا طول معلوم کرو جو نقطہ $(2, 5)$ سے دائرہ $LA + MA$
-۲-۳-۱- کا کھینچا گیا ہے۔

نیز ان ماسوں کا طول معلوم کرو جو نقطہ $(4, 1)$ سے دائرہ

$$MA + MA' - 3 - LA - 4 = 0$$

جواب: $3, 2, 3$

کے کھینچے گئے ہیں۔

۲۔ نقطوں $(3, 1)$ ، $(4, 2)$ اور $(1, 1)$ میں سے گزرنیوالے
دائرہ کی مساوات معلوم کرو اور مبادا میں سے گزرنے والے تمام دایروں کے

تقطوعات کے مستقل متطیل کی قیمت معلوم کرو۔ جواب: $\frac{1}{5}$
 ۳۔ دائروں $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ + ل^۴ = ۷$ اور $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۲$ ۔
 ۱۔ کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: $ل + ل^۲ = ۲$ ۔
 ۴۔ دائروں $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ + ل^۴ = ۷$ اور $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۲$ ۔
 ۱۔ کا بنیادی محور معلوم کرو۔ جواب: $ل + ل^۲ = ۲$ ۔

(۹۵) ۵۔ دائروں $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ + ل^۴ = ۷$ اور $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۲$ ۔
 ۱۔ کا بنیادی محور اور مشترک وتر کا طول معلوم کرو۔

جواب: $ل = ۱$ ۔
 { $\frac{1}{4} (۱ + ل)$ } $\frac{1}{4} (۱ + ل)$ $\frac{1}{4} (۱ + ل)$

۶۔ ثابت کرو کہ تین دائرے
 $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۱۲$ اور $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۱۲$
 اور $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۱۲$
 ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۷۔ تین دائروں
 $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۹$ اور $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۹$
 اور $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۹$

کا بنیادی مرکز معلوم کرو۔ جواب: $(۱ - ۲)$
 ۸۔ دائروں

$ل^۱ = ۱$ اور $(ل - ۱) + (ل - ۱) = ۳$
 کے مشترک مماس معلوم کرو۔

[خط $ل + ل^۲ + ل^۳ = ۱$ ۔ دونوں دائروں کو مس کرے گا اگر
 $ل^۱ = ۱$ اور $(ل + ل^۲ + ل^۳) = ۱$]

پس $ل^۱ = ۱$ اور $(ل + ل^۲ + ل^۳) = ۱$
 اگر $ل + ل^۲ + ل^۳ = ۱$ تو $(ل + ل^۲ + ل^۳) = ۱$ اور اس لیے

$$م = ۰ \text{ یا } ۳ + ل = ۴ = ۰$$

پس جب $م = ۰$ تول $ن = ۰$ اور مساوات $۱ + ل = ۰$ ہے۔

لیکن جب $۳ + ل = ۴$ تو $۳ + م = ۵$ اور مساوات $۴ + ل = ۵$ ہے۔

پھر اگر $۳ + م + ل = ۴$ تول $۰ = ۳ + ل$ یا $۳ = م$

پس جب $ل = ۰$ تو $م = ۳$ اور مساوات $۱ = ۰$ ہے۔

لیکن جب $۳ + ل = ۴$ تو $۴ + م = ۵$ اور مساوات $۳ + ل = ۴$

$$۵ = ۰ \text{ ہے۔} [$$

۹۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو دائروں

$$لا + ما = ۴ \text{ اور } (لا - ۳) + ما = ۱$$

دونوں کو مس کرتے ہیں۔ نیز مشابہت کے مرکزوں کے محدود معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } ۳ + لا \pm ۲ = ۸ - ما \text{ اور } لا \pm ۱ = ۵ - ما = ۰$$

$$(۰, ۴) \text{ اور } (۸, ۰)$$

۱۰۔ اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ $لا + ما = ۶$ کے تماس کا طول اس

ماس کا دو چند ہو جو نقطہ (ف، گ) سے دائرہ $لا + ما = ۳ + لا + ۳ = ۶$ کا ہے تو

$$۲ + گ + ۴ + ف = ۲ = ۰$$

۱۱۔ اگر کسی نقطہ سے دائرہ $لا + ما = ۲$ کے تماس کا طول اس ماس

کے طول کا تین گنا ہو جو اسی نقطہ سے دائرہ $لا + ما = ۴$ کا ہے تو ثابت کرو کہ

یہ نقطہ دائرہ

$$۴ + لا + ۴ = ۱۸ - ما$$

پر ہونا چاہئے۔

۱۲۔ اس دائرہ کی مساحات معلوم کرو جو دائروں $لا + ما = ۲$

$۳ + لا + ۳ = ۶$ اور $لا + ما = ۳ + لا + ۳ = ۶$ کے نقاط تقاطع میں سے اور نقطہ

(۲، ۱) میں سے گذرتا ہے۔

$$\text{جواب: } لا + ما + ۴ = ۵ = ۰$$

۱۳۔ ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو $لا + ما = ۴$ اور $لا + ما$

۲- لا- ۲+ ما+ ۲= کے نقاط تقاطع میں سے گزرے اور خط لا+ ۲+ ما= کو مس کرے۔
جواب: لا+ ۲+ ما= لا- ۲+ ما= ۰۔

(۹۶)

۸۸۔ حسب ذیل مثالوں میں بعض اہم ہیں۔
(۱) ہم غور دائروں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے کسی ثابت نقطہ کے قطبی ایک دوسرے ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور نظام کے انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی تمام دائروں کے لیے وہی ہے۔
دائروں کا نظام مساوات

$$لا+ ۲+ ما+ ۲+ ج= ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے (دفعہ ۸۵)۔
نظام کے انتہائی نقطے (± ج، ۰) ہیں۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ کے محدود (ف، گ) ہیں۔ تب (۱) کے لحاظ سے قطبی کی مساوات

$$ف+ لا+ گ+ ما+ ۲+ (لا+ ف)+ ج= ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

ہوگی۔

۱ کی قیمت خواہ کچھ بھی ہو خط مستقیم (۲) ہمیشہ اُس نقطہ میں سے گزرے گا جو ف+ لا+ گ+ ما+ ج= ۰ اور لا+ ف= ۰ سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ف= ± ج اور گ= ۰ تو مساوات (۲) ف (لا+ ف) ہے

$$+ (لا+ ف)= ۰ \text{ میں تحویل ہوتی ہے اور اس لئے } لا+ ف= ۰ \text{۔}$$

پس انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی وہ خط ہے جو دوسرے انتہائی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور مینادی محور کے متوازی ہے۔

(۲) اگر ب ج کوئی مثلث ہو اور ایک دائرہ کے لحاظ سے تین نقطوں کے قطبیوں سے مثلث (ب ج بنے چنانچہ ب ج، ج کا قطبی ہے، ج کا قطبی ہے اور ب ج کا قطبی ہے تو تین خطوط مستقیم (ب ج، ب ج، ج ج ایک نقطہ پر ملیں گے۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

۲ + ۲ = ۲
ہے اور فرض کرو کہ نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محدود علی الترتیب لآ، مآ اور لآ، مآ اور لآ، مآ ہیں۔

(ب) تین خطوط مستقیم ب'ج'، ج'ا'، (آ) ب' کی مساواتیں

- (۲) ۲ = ۲
(۳) ۲ = ۲
(۴) ۲ = ۲ اور

ہیں۔

(۱) (۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والا ایک خط ہے اور اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۳۳)

$$لاآ + مآ - لآ = لاآ + مآ - لآ$$

میں شامل ہے۔ لیکن یہ خط 'ا' میں سے بھی گزرتا ہے جس کے محدود (لا، مآ) ہیں۔

اس لیے ہم لہ کو مساوات

$$لاآ + مآ - لآ = لاآ + مآ - لآ$$

سے معلوم کرتے ہیں۔

پس 'ا' کی مساوات

$$(لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ) = (لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ)$$

$$(۵) \dots\dots\dots (لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ) = (لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ)$$

ہے۔

دوسری مساواتیں متشاکل ہونے کی وجہ سے لکھ لی جاسکتی ہیں۔ چنانچہ

وہ ہو چکی

(۹۶)

$$(لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ) = (لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ)$$

$$(۶) \dots\dots\dots (لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ) = (لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ)$$

$$(لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ) = (لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ)$$

$$(۷) \dots\dots\dots (لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ) = (لاآ + مآ - لآ) (لاآ + مآ - لآ)$$

چونکہ یو تین مساواتیں (۵)، (۶) اور (۷) باہم جمع کرنے پر متماثلًا معدوم ہوتی ہیں اس لیے ان مساواتوں سے بغیر شدہ خطوط (ا، ب، ج) اور ج ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں (دفعہ ۳۴)۔

(۳) دو دیے ہوئے دائروں کے نقاط تقاطع میں سے ایک وہ ہے اور وہیں سے گزرنے والا کوئی خط ان دائروں کو مرکز علی الترتیب ف و ق پر قطع کرتا ہے۔ ف ق کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

و کو مبدأ و قرار دو اور فرض کرو کہ دائروں کی مساواتیں (دفعہ ۸)۔

$r = ۲$ اجم (ط - ع) اور $r = ۲$ بجم (ط - ہ)۔

ہیں۔

تب ط کی کسی مخصوص قیمت کے لیے

و ف $= ۲$ اجم (ط - ع) (۱)

و ق $= ۲$ بجم (ط - ہ) (۲)

اگر س، ف ق کا وسطی نقطہ ہے تو

$و س = \frac{۱}{۲} (و ف + و ق)$

$\therefore و س = \frac{۱}{۲} اجم (ط - ع) + بجم (ط - ہ)$

\therefore س کا طریق

$r = اجم (ط - ع) + بجم (ط - ہ)$

$= اجم (ط - ع) + بجم (ط - ہ) + اجم (ط - ع) + بجم (ط - ہ)$

سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے یہ طریق وہ دائرہ ہے جس کی مساوات

$r = اجم (ط - ہ)$

ہے جہاں ا اور ب مساواتوں

$اجم ب = اجم ع + بجم ہ$ ، $اجب ب = اجم ع + بجم ہ$

سے معلوم ہوتے ہیں۔

(۴) اگر ایک مثلث ا ب ج کے حاکم دائرہ پر کے کسی نقطہ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے پائیں ایک خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔

نقطہ و کو مبداء اور اس میں سے گزرنے والے قطر کو ابتدائی خط لو۔ تب
دائرہ کی مساوات $r = ۱۲$ جم ط ہوگی۔
فرض کرو کہ نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے زاویہ علی الترتیب 'ع'، 'ب'، 'ج' ہیں
خط 'ب' ج وہ خط ہے جو (۱۲ جم ب، 'ب') اور (۱۲ جم ج، 'ج') کو ملاتا
ہے۔ 'ب' ج کی قطعی مساوات معلوم کرنے کے لیے عام شکل $ع = رجم ط - فم$
لو (دفعہ ۴۵) اور 'ب' اور 'ج' کے محدود درج کرو۔ اس طرح 'ع' اور 'ف' کو معلوم
کرنے کے لیے دو مساواتیں حاصل ہونگی یہ مساواتیں

$$ع = ۱۲ (جم ب) (جم ب - ف) - فم$$

$$ع = ۱۲ (جم ج) (جم ج - ف) - فم$$

اور ہونگی۔ پس $ف = ب + ج$ اور $ع = ۱۲ (جم ب + جم ج) - فم$ ۔ اس لیے 'ب' ج کی
مساوات (۹۸)

$$۱۲ (جم ب + جم ج) = رجم ط - فم \dots \dots (۱)$$

ہے۔

اسی طرح 'ج' اور 'ا' کی مساواتیں علی الترتیب

$$۱۲ (جم ج + جم ع) = رجم ط - فم \dots \dots (۲)$$

$$۱۲ (جم ع + جم ب) = رجم ط - فم \dots \dots (۳)$$

ہونگی۔

نقطوں (۱)، (۲)، (۳) پر نقطہ و سے عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے
پائین کے محدود علی الترتیب (۱۲ جم ب، جم ج، 'ب' + 'ج')، (۱۲ جم ج، جم ع، 'ج' + 'ع')،
(۱۲ جم ع، جم ب، 'ع' + 'ب') ہوں گے۔ یہ تین نقطے سب کے سب اس خط پر ہیں جس کی مساوات
 $۱۲ (جم ع + جم ب) = رجم ط - فم \dots \dots (۴)$

ہے۔

عمودوں کے پائین میں سے گزرنے والے اس خط کو مثلث کے لحاظ سے
نقطہ و کا خط پائین کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائرہ پر دو سرانقطہ د ہے اور اس کا زاویہ محدود نہ ہے۔

چار نقطوں ا، ب، ج، د میں سے تین تین کو چار طریقوں سے لیا جاسکتا ہے اور اس طرح چار مثلثوں کے جواب میں و کے چار خطوط پائین حاصل ہوں گے۔ ہم نے ان میں سے ایک خط پائین کی مساوات معلوم کی ہے یعنی مساوات (۴)۔ دیگر تین کی مساواتیں تشاکل سے لکھ لی جاسکتی ہیں چنانچہ یہ مساواتیں

$$12 \text{ جم} \text{ بھ جم} \text{ ضہ} = \text{رجم} (\text{طہ} - \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ}) \dots\dots\dots (5)$$

$$12 \text{ جم} \text{ جھ جم} \text{ عہ} = \text{رجم} (\text{طہ} - \text{جہ} - \text{ضہ} - \text{عہ}) \dots\dots\dots (6)$$

اور

$$12 \text{ جم} \text{ ضہ جم} \text{ عہ جم} \text{ بہ} = \text{رجم} (\text{طہ} - \text{ضہ} - \text{عہ} - \text{بہ}) \dots\dots\dots (7)$$

ہوں گی۔

خطوں (۴)، (۵)، (۶) اور (۷) پر نقطہ و سے عمودوں کے پائین کے
 محدد (۲) ۱ جم عہ جم بہ جم جہ، عہ + بہ + جہ، وغیرہ ہوں گے۔ یہ چار نقطے سب کے
 سب اس خط پر ہیں جس کی مساوات
 ۲ ۱ جم عہ جم بہ جم جہ جم ضہ = ۱ جم (طہ - عہ - بہ - جہ - ضہ)

۴۔ - مریجا اس مسئلہ کی توسیع کیجا سکتی ہے۔
(۵) خطوط مستقیم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ کے درمیانی زاویوں کی
تخفیف کرنے والے خطوں کی مساواتیں معلوم کرنا۔

دیے ہوئے خطوط مستقیم اور کسی دائرہ لا^۱ + لا^۲ لا^۳ لا^۴ لا^۵ لا^۶ لا^۷ لا^۸ لا^۹ لا^{۱۰} لا^{۱۱} لا^{۱۲} لا^{۱۳} لا^{۱۴} لا^{۱۵} لا^{۱۶} لا^{۱۷} لا^{۱۸} لا^{۱۹} لا^{۲۰} لا^{۲۱} لا^{۲۲} لا^{۲۳} لا^{۲۴} لا^{۲۵} لا^{۲۶} لا^{۲۷} لا^{۲۸} لا^{۲۹} لا^{۳۰} لا^{۳۱} لا^{۳۲} لا^{۳۳} لا^{۳۴} لا^{۳۵} لا^{۳۶} لا^{۳۷} لا^{۳۸} لا^{۳۹} لا^{۴۰} لا^{۴۱} لا^{۴۲} لا^{۴۳} لا^{۴۴} لا^{۴۵} لا^{۴۶} لا^{۴۷} لا^{۴۸} لا^{۴۹} لا^{۵۰} لا^{۵۱} لا^{۵۲} لا^{۵۳} لا^{۵۴} لا^{۵۵} لا^{۵۶} لا^{۵۷} لا^{۵۸} لا^{۵۹} لا^{۶۰} لا^{۶۱} لا^{۶۲} لا^{۶۳} لا^{۶۴} لا^{۶۵} لا^{۶۶} لا^{۶۷} لا^{۶۸} لا^{۶۹} لا^{۷۰} لا^{۷۱} لا^{۷۲} لا^{۷۳} لا^{۷۴} لا^{۷۵} لا^{۷۶} لا^{۷۷} لا^{۷۸} لا^{۷۹} لا^{۸۰} لا^{۸۱} لا^{۸۲} لا^{۸۳} لا^{۸۴} لا^{۸۵} لا^{۸۶} لا^{۸۷} لا^{۸۸} لا^{۸۹} لا^{۹۰} لا^{۹۱} لا^{۹۲} لا^{۹۳} لا^{۹۴} لا^{۹۵} لا^{۹۶} لا^{۹۷} لا^{۹۸} لا^{۹۹} لا^{۱۰۰} لا^{۱۰۱} لا^{۱۰۲} لا^{۱۰۳} لا^{۱۰۴} لا^{۱۰۵} لا^{۱۰۶} لا^{۱۰۷} لا^{۱۰۸} لا^{۱۰۹} لا^{۱۱۰} لا^{۱۱۱} لا^{۱۱۲} لا^{۱۱۳} لا^{۱۱۴} لا^{۱۱۵} لا^{۱۱۶} لا^{۱۱۷} لا^{۱۱۸} لا^{۱۱۹} لا^{۱۲۰} لا^{۱۲۱} لا^{۱۲۲} لا^{۱۲۳} لا^{۱۲۴} لا^{۱۲۵} لا^{۱۲۶} لا^{۱۲۷} لا^{۱۲۸} لا^{۱۲۹} لا^{۱۳۰} لا^{۱۳۱} لا^{۱۳۲} لا^{۱۳۳} لا^{۱۳۴} لا^{۱۳۵} لا^{۱۳۶} لا^{۱۳۷} لا^{۱۳۸} لا^{۱۳۹} لا^{۱۴۰} لا^{۱۴۱} لا^{۱۴۲} لا^{۱۴۳} لا^{۱۴۴} لا^{۱۴۵} لا^{۱۴۶} لا^{۱۴۷} لا^{۱۴۸} لا^{۱۴۹} لا^{۱۵۰} لا^{۱۵۱} لا^{۱۵۲} لا^{۱۵۳} لا^{۱۵۴} لا^{۱۵۵} لا^{۱۵۶} لا^{۱۵۷} لا^{۱۵۸} لا^{۱۵۹} لا^{۱۶۰} لا^{۱۶۱} لا^{۱۶۲} لا^{۱۶۳} لا^{۱۶۴} لا^{۱۶۵} لا^{۱۶۶} لا^{۱۶۷} لا^{۱۶۸} لا^{۱۶۹} لا^{۱۷۰} لا^{۱۷۱} لا^{۱۷۲} لا^{۱۷۳} لا^{۱۷۴} لا^{۱۷۵} لا^{۱۷۶} لا^{۱۷۷} لا^{۱۷۸} لا^{۱۷۹} لا^{۱۸۰} لا^{۱۸۱} لا^{۱۸۲} لا^{۱۸۳} لا^{۱۸۴} لا^{۱۸۵} لا^{۱۸۶} لا^{۱۸۷} لا^{۱۸۸} لا^{۱۸۹} لا^{۱۹۰} لا^{۱۹۱} لا^{۱۹۲} لا^{۱۹۳} لا^{۱۹۴} لا^{۱۹۵} لا^{۱۹۶} لا^{۱۹۷} لا^{۱۹۸} لا^{۱۹۹} لا^{۲۰۰} لا^{۲۰۱} لا^{۲۰۲} لا^{۲۰۳} لا^{۲۰۴} لا^{۲۰۵} لا^{۲۰۶} لا^{۲۰۷} لا^{۲۰۸} لا^{۲۰۹} لا^{۲۱۰} لا^{۲۱۱} لا^{۲۱۲} لا^{۲۱۳} لا^{۲۱۴} لا^{۲۱۵} لا^{۲۱۶} لا^{۲۱۷} لا^{۲۱۸} لا^{۲۱۹} لا^{۲۲۰} لا^{۲۲۱} لا^{۲۲۲} لا^{۲۲۳} لا^{۲۲۴} لا^{۲۲۵} لا^{۲۲۶} لا^{۲۲۷} لا^{۲۲۸} لا^{۲۲۹} لا^{۲۳۰} لا^{۲۳۱} لا^{۲۳۲} لا^{۲۳۳} لا^{۲۳۴} لا^{۲۳۵} لا^{۲۳۶} لا^{۲۳۷} لا^{۲۳۸} لا^{۲۳۹} لا^{۲۴۰} لا^{۲۴۱} لا^{۲۴۲} لا^{۲۴۳} لا^{۲۴۴} لا^{۲۴۵} لا^{۲۴۶} لا^{۲۴۷} لا^{۲۴۸} لا^{۲۴۹} لا^{۲۵۰} لا^{۲۵۱} لا^{۲۵۲} لا^{۲۵۳} لا^{۲۵۴} لا^{۲۵۵} لا^{۲۵۶} لا^{۲۵۷} لا^{۲۵۸} لا^{۲۵۹} لا^{۲۶۰} لا^{۲۶۱} لا^{۲۶۲} لا^{۲۶۳} لا^{۲۶۴} لا^{۲۶۵} لا^{۲۶۶} لا^{۲۶۷} لا^{۲۶۸} لا^{۲۶۹} لا^{۲۷۰} لا^{۲۷۱} لا^{۲۷۲} لا^{۲۷۳} لا^{۲۷۴} لا^{۲۷۵} لا^{۲۷۶} لا^{۲۷۷} لا^{۲۷۸} لا^{۲۷۹} لا^{۲۸۰} لا^{۲۸۱} لا^{۲۸۲} لا^{۲۸۳} لا^{۲۸۴} لا^{۲۸۵} لا^{۲۸۶} لا^{۲۸۷} لا^{۲۸۸} لا^{۲۸۹} لا^{۲۹۰} لا^{۲۹۱} لا^{۲۹۲} لا^{۲۹۳} لا^{۲۹۴} لا^{۲۹۵} لا^{۲۹۶} لا^{۲۹۷} لا^{۲۹۸} لا^{۲۹۹} لا^{۳۰۰} لا^{۳۰۱} لا^{۳۰۲} لا^{۳۰۳} لا^{۳۰۴} لا^{۳۰۵} لا^{۳۰۶} لا^{۳۰۷} لا^{۳۰۸} لا^{۳۰۹} لا^{۳۱۰} لا^{۳۱۱} لا^{۳۱۲} لا^{۳۱۳} لا^{۳۱۴} لا^{۳۱۵} لا^{۳۱۶} لا^{۳۱۷} لا^{۳۱۸} لا^{۳۱۹} لا^{۳۲۰} لا^{۳۲۱} لا^{۳۲۲} لا^{۳۲۳} لا^{۳۲۴} لا^{۳۲۵} لا^{۳۲۶} لا^{۳۲۷} لا^{۳۲۸} لا^{۳۲۹} لا^{۳۳۰} لا^۳

اب صریحاً $1 \leq a + b \leq 2$ (۱) سے گزرتا ہے اور (۱) سے دو متوازی خطوط مستقیم
تعبیر ہوتے ہیں جو

سے تبیین شدہ خطوط مستقیم کے توازی ہیں بشرطیکہ (۲) کا دائیں جانبی رکن ایکہ فاضل

(۹۹)

مربع ہو جس کے لیے یہ شرط ہے کہ

$$(۱+ل) (ل+ب) - (ل+ل+جم) = ۰ \dots (۳)$$

مزید بریں جب شرط (۳) پوری ہوتی ہے تو (۲) سے تعبیر نہ منطبق خطوط

زوج

$$= \{ (۱+ل) (ل+لا) + (ل+ل+جم) \}$$

$$= \{ (ل+ل+جم) (ل+لا) + (ل+ب) \}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

پس مطلوبہ ناصفوں میں سے ایک

$$= (لا+لا+ل+ل+جم)$$

$$= (لا+ب+ل+ل+جم)$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ل، دو درجی (۳) کی ایک اصل ہے۔

ان آخری دو مساواتوں سے ل کو ساقط کرنے سے ناصفوں کی مطلوبہ

مساوات حاصل ہوتی ہے یعنی

$$(لا+لا+ل+ل+جم) - (لا+ب+ل+ل+جم) = ۰$$

یعنی $(لا+ل+جم) - (لا+ب+ل+ل+جم) = ۰$ (دیکھو دفعہ ۳۹)

(۶) چار دائروں کے مرکز (ب، ج، د، ا) ہیں اور ان میں سے ہر دائرہ

ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ ان کے مستوی میں کسی نقطہ سے

ان چار دائروں کے محاسوں کے مربع $م'، م'، م'، م'$ ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$م' (ب+ج-د) + م' (ج+د-ا) + م' (د+ا-ب) - م' (ا+ب-ج) = ۰$$

اُس نقطہ کو جس سے محاس کھینچے گئے ہیں بمبادی قرار دو اور فرض کرو کہ دائرہ

$$لا+لا+ل+ل+جم = ۰$$

دائروں

لا + ما - ۲ گ - لا - ۲ ف - ما + م = ۰ وغیرہ
سے علی القوائم منقطع ہوتا ہے۔

تب
گ + گ + ف - ف - ج - م = ۰
گ + گ + ف - ف - ج - م = ۰ وغیرہ
اس لیے

$$= \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

کیونکہ (۱) نقطہ (گ، ف) ہے وغیرہ۔
(۲) اگر ایک دائرہ پر کوئی چار نقطے (ا، ب، ج، د) ہوں اور دائرہ کے
مستوی میں و کوئی نقطہ ہو تو

$$وا \times ب ج د - وب \times ج د ا + وج \times د ا ب - ود \times ا ب ج = ۰$$

بطلموس کا مسئلہ اخذ کرو۔

و کو مبدا، قرار دو اور فرض کرو کہ نقطہ (ا) کے محدد (لا، ما) ہیں وغیرہ۔

دائرہ ب ج د

$$= \begin{vmatrix} لا + ما & ۱ & ۱ & ۱ \\ لا + ما & ۱ & ۱ & ۱ \\ لا + ما & ۱ & ۱ & ۱ \\ لا + ما & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

(۱۰۰) ہے - اگر یہ دائرہ نقطہ (لام، ما) میں سے گزرے تو

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

یہ $۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱$ د - $۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱$ ج د + $۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱$ د ا ب

- $۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱$ ج =
و کے تمام مقامات کے لیے یہ درست ہے - اس لیے اگر دائرہ
ا ب ج د کے مستوی میں کوئی چار نقطے 'ف' 'ق' 'س' ہوں تو

ف $(۱ \times ۱ - ۱ \times ۱ - ۱ \times ۱ + ۱ \times ۱)$ ج - $۱ \times ۱ - ۱ \times ۱ - ۱ \times ۱ + ۱ \times ۱$ د =
ق $(۱ \times ۱ - ۱ \times ۱ - ۱ \times ۱ + ۱ \times ۱)$ ج + $۱ \times ۱ - ۱ \times ۱ - ۱ \times ۱ + ۱ \times ۱$ د = وغیرہ
پس 'د' 'س' 'ق' 'ف' کو ساقل کرنے پر

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

جہاں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ایک دائرہ پر ہیں اور 'ف' 'ق' 'س' 'س'
دائرہ کے مستوی میں کوئی چار نقطے ہیں

اب فرض کرو کہ 'ف' 'ا' 'ب' 'ج' ہوتا ہے 'ق' 'ب' 'س' پر منطبق

ہوتا ہے، وغیرہ تو

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}^1 & \text{ب}^1 & \text{ج}^1 & \text{د}^1 \\ \text{ب}^2 & \text{ج}^2 & \text{د}^2 & \text{ا}^2 \\ \text{ج}^3 & \text{د}^3 & \text{ا}^3 & \text{ب}^3 \\ \text{د}^4 & \text{ا}^4 & \text{ب}^4 & \text{ج}^4 \end{vmatrix}$$

یہ (ا ب × ج د ± ج ا × د ب ± د ا × ب ج) =

اور یہ اظہار س کا مسئلہ ہے۔

(۸) اگر دائروں ب ج د، ج د ا، د ا ب، ا ب ج کے مرکز و، و، و، و، و اور نصف قطر ر، ر، ر، ر، ر ہوں جہاں ا، ب، ج، د، ایک مستوی میں کوئی چار نقطے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$(ا و - ر) (ب و - ر) + (ج و - ر) (د و - ر) = (د و - ر) (ا و - ر)$$

دائرہ ب ج د

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ہے۔ اب

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (ا و - ر)$$

(۱۰۱) پس $\chi (1^2 - 2^2) = 0$ بشرطیکہ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی اگر

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

چوتھے باب پر مثالیں

۱۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے ایک ثابت خطِ مستقیم سے اس کا عمودی فاصلہ ثابت کرو کہ یہ نقطہ ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔

۲۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مربع کے چار ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۳۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ثابت نقطوں سے اسکے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۔ ۱ اور ۲ دو ثابت نقطے ہیں اور نقطہ ف اس طرح حرکت کرتا ہے کہ $ف = ن \times ف ب$ ۔ ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک دائرہ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ن کی مختلف قیمتوں کے لیے جو دائرے حاصل ہوتے ہیں سب کے سب ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۵۔ ایک نقطہ کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے قاعدے سے اس کے فاصلہ کا مربع اُس مستطیل کے مساوی ہوتا ہے جو مثلث کے دیگر ضلعوں سے اس کے فاصلوں سے بنتا ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ خطوط $۲ + ۲ = ۲$ اور $۲ + ۲ = ۲$ سے بننے والے مثلث کے حاطہ دائرہ کی مساوات
 $۵۰ + ۱۹ - ۱۱ = ۵۰$

۷۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا قطر دائروں

کا مشترک وتر ہے۔
 $۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۱ + ۳ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۲ + ۳ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲$

۸۔ اُن خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خط $۲ + ۲ = ۳$ اور (۱۰۲) دائرہ $۲ + ۲ = ۲$ کے نقاط تقاطع کو مبداء سے ملاتے ہیں اور ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کے علی التواء ہیں۔

۹۔ ایک ثابت نقطہ و سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت خط مستقیم سے نقطہ ف پر ملتا ہے۔ اگر خط پر ایک ایسا نقطہ ق لیا جائے کہ مستطیل وق \times وف مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔
 ۱۰۔ ایک ثابت نقطہ و سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت

دائرہ سے ف پر ملتا ہے اور خط پر ایک ایسا نقطہ ق لیا گیا ہے کہ مستطیل وق \times وف مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۱۱۔ چار خطوط مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب $۲ + ۲ = ۲$ اور $۲ + ۲ = ۲$ ۔ ثابت کرو کہ اس

ذو اربعۃ الاضلاع کے تین وتروں کے سرے (۱-۱) اور (۲-۲) (۱۲) اور (۱۳) اور (۱۴) اور (۱۵) اور (۱۶) ہیں۔ اس سے ثابت کرو کہ وہ تین دائرے جن کے قطر یہ وتر ہیں ہم محور ہیں۔

[بنیادی محور ۲ لا + ما - ۱۱ = ۰ ہے۔]

۱۲۔ ایک ذواربۃ الاضلاع کے ضلعوں کی مساواتیں علی الترتیب
ما - ۱ = ۰، لا - ما + ۱ = ۰، لا + ۵ - ما - ۱۱ = ۰، اور ۳ لا + ما - ۱۳ = ۰ ہیں۔ ان
دائرہ کی مساواتیں معلوم کرو جو اس ذواربۃ الاضلاع کے وتروں کو قطر مانکر
کھینچے گئے ہوں اور ثابت کرو کہ یہ دائرے ہم محور ہیں۔

[بنیادی محور ۲ لا + ما - ۸ = ۰ ہے]

۱۳۔ ثابت کرو کہ دو دیے ہوئے دائروں کی مساواتیں ہمیشہ شکل

$$لا + ما + ۱ لا + ب = ۰، لا + ما + ۱ لا + ب = ۰$$

میں لکھی جاسکتی ہیں اور یہ کہ ان میں سے ایک دائرہ دوسرے کے اندر ہوگا اگر
لا + ب اور ب دونوں مثبت ہوں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلے ان

فاصلوں کے متناسب ہوتے ہیں جو ان نقطوں میں سے ہر ایک کے دوسرے
کے قطبی سے ہیں۔

۱۵۔ اگر دو دیے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کو ملائیوا

خط پر اس کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر کے
کسی نقطہ سے دیے ہوئے دائروں کے مماس متناظر نصف قطروں کی نسبت
میں ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک ایسے نقطہ کا لوق معلوم کرو کہ اس سے دو ہم مرکز دائروں کے

مماس ان کے نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہوں۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ دائروں لا + ما + ۲ لا = ۰، اور لا + ما - ۲ لا = ۰
کے مشترک مماس ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

۱۸۔ خط لا = ج دائرہ لا + ما + ۲ گ لا - ب = ۲۔ کو نقطوں ف' ف' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر (ب، ۰)، (۰، ب) سے ف' ف' پر کے تماس پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب 'ا' گ کی تمام قیمتوں کے لیے 'ج' کے مساوی ہے۔

۱۹۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک منظم کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۲۰۔ ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور و میں سے گذرنے والے دو خطوط مستقیم کو جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں نقاط ف' ق' پر قطع کرتا ہے اور خط ف' ق' ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۱۔ نقاط (ا، ع) اور (ب، ی) کو ملانے والے خط کو قطر مانکر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کی قطبی مساوات

$$r = z \{ (ا جم - ط - ع) + ب جم (ط - ی) + ا ب جم (ع - ی) \} =$$

۲۲۔ اس دائرہ اور خط مستقیم کے نقاط تقاطع پر رکی قیمتیں معلوم کر نیکی مساوات معلوم کرو جن کی مساواتیں علی الترتیب

$$r = ۲ ا جم ط - اور ر جم (ط - ی) = ع$$

ہیں۔ ع کی قیمت متعین کرو جبکہ خط مستقیم ایک تماس ہو جائے۔

۲۳۔ ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں

$$۳ا - ۴ما = ۰، ۷لا - ۲ما = ۰، اور ۵لا - ۱۲ما - ۳۶ = ۰$$

ہیں۔ اس کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد معلوم کرو۔

۲۴۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے قطبی لمحاظ دو دیے ہوئے دائروں کے ایک دوسرے کے ساتھ معلومہ زاویہ بنائیں۔

(۱۰۴)

۲۵۔ دو دائروں کے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ سے ان دائروں کے تماس کھینچے گئے ہیں اور وہ خطوط جو نقاط تماس کو دائروں کے مرکوزوں سے ملاتے ہیں خارج کئے گئے ہیں تاکہ وہ ایک دوسرے سے ملیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۶۔ اگر وہ چار نقطے جن میں دو دائرے
 $\text{لا} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = 0$ ، $\text{لا} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = 0$
 خطوط مستقیم

سے منقطع ہوتے ہیں ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\begin{array}{c|c|c} 1 - \text{لا} & \text{ب} - \text{ب} & \text{ج} - \text{ج} \\ \hline \text{لا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{لا} & \text{ب} & \text{ج} \end{array} = 0$$

۲۷۔ دو ثابت نقطوں میں سے دائروں کا ایک نظام کھینچا گیا ہے اور ایک دیئے ہوئے خط مستقیم کے متوازی ان دائروں کے تماس کھینچے گئے ہیں۔ نقاط تماس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۸۔ اگر تین ہم مرکز دائروں کے مرکز 'لا'، 'ب'، 'ج' ہوں اور کسی نقطہ سے ان کے تماس 'م'، 'م'، 'م' ہوں تو رشتہ

$$\text{ب ج م} + \text{ج لا م} + \text{لا ب م} = 0$$

کو ثابت کرو۔

۲۹۔ اگر کسی نقطہ سے تین دیئے ہوئے دائروں کے تماس طول میں 'م'، 'م'، 'م' ہوں جہاں دائروں کے مرکز ایک ہی خط مستقیم میں نہیں ہیں تو ثابت کرو کہ کوئی دائرہ یا کوئی خط مستقیم شکل

$$\text{لا م} + \text{ب م} + \text{ج م} = 0$$

کی ایک مساوات سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

خطوط مستقیم کے لیے 'ا'، 'ب'، 'ج' کے درمیان کون سا رشتہ درست رہتا ہے۔
۳۔ ایک دائرہ تین دیے ہوئے دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۳۱۔ خط $\frac{لا}{ھ} + \frac{با}{ج} - ۱ = ۰$ کے قطبوں کا طریق جبکہ قطب ان دائروں کے لمبا ہے۔ لیے گئے ہوں جو قائم محوروں کو مس کرتے ہیں مساواتوں
(ھ - لا - ک) (ما - ک لا) + ھک (ھ ± ک) (لا ± ما) = ۰ سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک کے علی القوائم ہوتے ہیں۔
۳۳۔ اگر دو دائرے علی القوائم متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے مشترک قطر پر نقطوں کے جوڑوں کی لامتناہی تعداد معلوم کی جاسکتی ہے ایسے کہ ان میں سے کسی ایک نقطہ کا قطبی لمبا ایک دائرہ کے وہی ہو جو دوسرے نقطہ کا قطبی لمبا دو دوسرے دائرہ کے ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقطوں کے کسی ایسے زوج کا درمیانی فاصلہ دو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے ایک پر قائمہ زاویہ بناتا ہے۔

۳۴۔ اگر دو دائروں کی مساواتیں جن کے نصف قطر 'ا'، 'ب' ہیں س = ۰ ہوں تو دائرے

$$\frac{س}{ا} + \frac{س}{ب} = ۰$$

علی القوائم متقاطع ہوں گے۔
۳۵۔ دو باہم علی القوائم خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جن میں سے ہر ایک دو دائروں

$$(لا - ا) + (ا - ب) = ۰، (لا + ا) + (ا - ب) = ۰$$

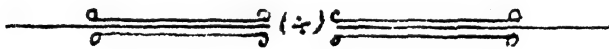
میں سے ایک کو مس کرے۔ نیز ثابت کرو کہ ان خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کے
 ناصف ہمیشہ دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتے ہیں۔
 ۳۶۔ ایک مثلث کے راس علی الترتیب (۰.۰)، (۲۸.۲۰) اور (۶۳.۰۶)
 ہیں۔ ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ کی مساوات

$$۲۲ + ۱۵۹ - ۱۱۵۶ + ۳۰۲۴ = ۰$$

ہے اور اندرونی دائرہ کی مساوات

$$۲ + ۱۱۸ - ۱۱۹۰ + ۲۰۲۵ = ۰$$

ثابت کرو کہ یہ دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔



متفرق امثلہ (۱)

(۱۰۶)

۱۔ ثابت کرو کہ مبدا، اُس مثلث کے اندر ہے جس کے راس (۱، ۲) اور (۲، ۳) ہیں۔

۲۔ ایک مربع کا ایک راس نقطہ (۳، ۴) پر ہے اور ایک وتر خط ۳ لا

+ ۴ = ۲۰ پر ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز $(\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$ ہے اور وہ دو راس جو دیے ہوئے وتر پر ہیں $(\frac{16}{5}, \frac{19}{5})$ اور $(\frac{13}{5}, \frac{17}{5})$ ہیں۔

۳۔ ایک دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو نقطہ (۰، ۰) میں سے

گذرتا ہے اور خط لا = ج سے طول ۲ قطع کرتا ہے۔

جواب: $۲ + ۲ = ج + لا$

۴۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۳ ہے اور جو

دائرہ لا + لا = ۴ - ۲ - ۱۲ = کو داخلاً نقطہ (۱، ۱) پر مس کرتا ہے۔

جواب: $۵ + لا = ۵ - لا - ۱۳ = ۳۲ = ۰$

۵۔ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے ضلع اُن تین خطوں پر ہیں جنکی

مساواتیں

$$لا - لا = ۱ + لا، لا + لا = ۰، اور لا - لا = ۳ + لا = ۰$$

جواب: $\frac{۲۵}{۸}$

ہیں۔

۶۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو ۳ لا + ۲ لا = ۱ اور لا + لا = ۳ =

کے نقطہ تقاطع کو ۳ لا + ۲ لا = ۱ اور لا + لا = ۵ = کے نقطہ

تقاطع سے ملتا ہے۔ جواب: $۲ + لا + ما + ۳ = ۰$ ۔
 ۷۔ ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۵ ہے اور جو دائرہ
 $لا + ما - ۲ - لا - ۲ = ۲۰$ کو خارجاً نقطہ (۵، ۵) پر مس کرتا ہے۔
 جواب: $لا + ما - ۲ - لا - ۱۸ - لا - ۱۶ + ما + ۱۲ = ۰$ ۔
 ۸۔ اس مثلث کے حائط دائرہ اور اندرونی دائرہ کی مساواتیں معلوم
 کرو جو تین خطوں $لا + ما + ۳ = ۱۲$ سے بننا ہے اور ثابت کرو کہ دائرہ کا
 بنیادی محور $لا + ما + ۱ = ۰$ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو نقطہ (۳، ۴) میں سے گزرتے ہیں اور خط
 $لا + ما - ۱۰ = ۰$ کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں $لا - ۳ - لا - ۵ + ما + ۱۱ = ۰$ اور
 $لا + ما - ۳ - لا - ۲۴ = ۰$ ہیں۔

۱۰۔ ان دو خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط
 $لا - ۲ - لا - لا - ما - لا + لا + لا - ۱۲ - ما - ۳۵ = ۰$

(۱۰۷)

کے ساتھ ایک ایسا متوازی الاضلاع بنائیں جس کے وتر مبدایہ متقاطع ہوں۔
 جواب: $لا - لا - لا - لا - ما - لا - لا - ۱۲ - ما - ۳۵ = ۰$ ۔
 ۱۱۔ اگر نقطہ (۰، ۰) سے دائرہ $لا + ما + ۲ + لا + ۲ + ف + ما + ج = ۰$ ۔
 کے ماس وف، وقی ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ وف قی کی مساوات
 $لا + ما + گ + لا + ف + ما = ۰$ ہے۔

۱۲۔ ان دو ماسوں کی مساوات معلوم کرو جو مبداء سے دائرہ
 $لا + ما + ۱۰ + (لا + ما) + ۴۰ = ۰$

کے کھینچے جاسکتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرو

جواب: مس $\frac{۱}{۳}$

۱۳۔ اس متطیل کے وتر کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوط
 $(لا - ۳) + ب + ما = ۰$ اور $(لا - ۴) + ب + ما = ۰$ ۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ چار نقطے (۱م، ۱) (۱م، ۲) (۱م، ۳) (۱م، ۴) اور (۱م، ۵) ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اگر $۱م = ۱$

۲۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

۱ب + ۲ب + ۳ب + ۴ب + ۵ب (۱ب - ۲ب) (۱ب - ۳ب) (۱ب - ۴ب) (۱ب - ۵ب) = ۰
دو خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبدا سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

۲۲۔ اس مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے اضلاع مساوی

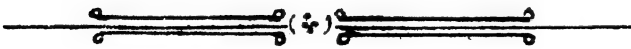
$$(۱ + ۲) - ۳ = ۰ \text{ اور } (۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵) = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ دو دائروں ۱ب + ۲ب - ۳ج - ۴ا - ۵ = ۰ اور ۱ب + ۲ب - ۳ج - ۴ا - ۵ = ۰ کے نقاط تقاطع ان کے مرکز اور محدودوں کا مبدا ایک دائرہ پر ہیں۔

۲۴۔ ۱ب + ۲ب - ۳ج - ۴ا - ۵ = ۰ اور ۱ب + ۲ب - ۳ج - ۴ا - ۵ = ۰ کے مشترک مماس معلوم کرو۔

جواب: ۱ = ۱، ۲ = ۲، ۳ = ۳، ۴ = ۴، ۵ = ۵ اور ۱ب - ۲ب - ۳ج - ۴ا - ۵ = ۰



پانچواں باب

قطع مکانی

(۱۰۹)

۸۹۔ تعریفیں۔ مخروطی تراش یا مخروطی ایسے نقطہ کا مرکز

ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط مستقیم سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے۔ ثابت نقطہ کو ماسکہ، ثابت خط مستقیم کو مرتب اور مستقل نسبت کو خروج المرکز کہتے ہیں۔

آئندہ یہ ثابت کیا جائے گا کہ اگر ایک قائم مستدیر مخروط کو کسی مستوی سے قطع کیا جائے تو تمام صورتوں میں ایک مخروطی تراش اوپر کی تعریف کی بموجب حاصل ہوگی۔ چنانچہ اولاً ان معینوں کے خواص کو مخروط کی تراش سمجھ کر ہی معلوم کیا گیا تھا۔

اب ہم ان میں سے سادہ ترین منحنی کی مساوات معلوم کریں گے اور اس کے چند خواص پر بحث کریں گے۔ یہ منحنی وہ ہے جس میں خروج المرکز اکائی کے مساوی ہوتا ہے۔ اس کو قطع مکانی یا صرف مکانی کہتے ہیں۔

۹۰۔ مکانی کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ س ما سکہ اور ما مامرتب ہے۔ س و ما مامپر
عمود کشینجو اور فرض کرو کہ و س = ۱۲ فرض کرو کہ و س محور لا ہے
اور و ما محور ما۔

فرض کرو کہ منحنی پر کوئی نقطہ N ہے اور اس کے محدود (لا، ما) ہیں۔
محوروں پر N 'ن' (حسب شکل) اور M 'ن' کو ملاؤ۔

تب بموجب تعریف $n = n$

اس لیے $n م = م س ن = ن ل + س ل$

جئے۔ $7(12-0) + 6 = 84$

تو مساوات (۱) ہو جائے گی (دفعہ ۴۹)

$$\begin{aligned} (۲) \dots\dots\dots ۱۴ = ۱۴ \text{ لا} \dots\dots\dots \\ \text{ماسکہ نقطہ (۱۴)} \text{ ہے اور مرتب خط} \\ ۱۴ = ۱ + ۰ \end{aligned}$$

ہے۔ نیز

$$س = ن = و = ۱ + ۱ = ۱ + ۱$$

۹۱۔ چونکہ مکانی کی مساوات $۱۴ = ۱۴$ لا ہے اور ۱۴ ایک مثبت مقدار ہے اس لیے ۱۴ کو ہمیشہ مثبت ہونا چاہیے اور اس لیے منحنی کلاً محور لا کی مثبت جانب واقع ہوگا۔

لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے مربعاً ماسکہ کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار مساوی ہیں لیکن ایک مثبت ہے اور دوسری منفی۔ اس لیے منحنی کے تمام وتر جو محور لا پر عمود ہوں اس سے تقییف ہوتے ہیں اور منحنی کے وہ حصے جو محور ماسکہ کی مثبت اور منفی جانبوں پر ہیں ہر لحاظ سے مساوی ہیں۔

جب ۱۴ بڑھتا ہے تو ماسکہ بھی بڑھتا ہے اور لا اور ماسکہ کے بڑھنے پر کوئی حد نہیں ہے اس لیے محور لا کی مثبت جانب منحنی کی کوئی حد نہیں ہے۔ وہ خط جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب پر عمود ہے مکانی کا محور کہلاتا ہے۔

وہ وتر جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور محور پر عمود ہے وتر خاص کہلاتا ہے۔ دفعہ ۹۰ کی شکل میں $س = ف = ک = و = ۱۲$ اس لیے وتر خاص کا کل طول ۱۴ ہے۔

۹۲۔ ہم معلوم کر چکے ہیں کہ مکانی پر تمام نقطوں کے لیے $۱۴ = ۱۴$ ۔ منحنی کے اندر تمام نقطوں کے لیے $۱۴ = ۱۴$ لا منفی ہے۔ کیونکہ اگر ق کوئی ایسا نقطہ ہو اور ق میں سے محور کے عمود وار ایک خط کھینچا جائے جو منحنی سے نقطہ ف پر ملے اور محور سے نقطہ ل پر توقن کی نسبت محور سے قریب ہو گا اور اس لیے $ل > ق$ ۔ لیکن $ن$ منحنی پر

اس لیے ل ن - ۴ ل ۱ x ل =۔ اور اس لیے ل ق - ۴ ل ۱ x ل
منفی ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منحنی کے باہر تمام نقطوں کے لیے
۴ - ۴ ل لا مثبت ہے۔

پس اگر ایک مکانی کی مساوات ۴ - ۴ ل لا =۔ ہو اور اگر ہم اس
مساوات کی دائیں جانبی رکن میں کسی نقطہ کے محدود درج کریں تو نتیجہ مثبت
ہوگا اگر نقطہ منحنی کے باہر ہے، منفی ہوگا اگر نقطہ منحنی کے اندر ہے، اور صفر
ہوگا اگر نقطہ منحنی پر ہے۔

۹۳ - ان نقطوں کے محدود جو خط مستقیم ۴ = ۴ ل لا + ج اور قطع مکانی
۴ = ۴ ل لا میں مشترک ہیں ان دونوں مساواتوں کو پورا کرنے چاہئیں۔
پس مشترک نقطہ پر رشتہ

(۱۱۲)

$$(م + لا + ج) = ۴ ل لا + ج \dots \dots \dots (۱)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے مشترک نقطوں کے فیصلے مساوات (۱) سے حاصل
ہوتے ہیں جس کو شکل

$$م + لا + ج = ۴ ل لا + ج \dots \dots \dots (۲)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

اب چونکہ مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اس لیے ہم دیکھتے
ہیں کہ ہر خط مستقیم ایک مکانی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جو حقیقی، منطبق، یا
خیالی ہو سکتے ہیں۔

جب 'م' بہت چھوٹا ہو تو مساوات (۲) کی ایک اصل بہت بڑی ہوگی
اور جب 'م' صفر کے مساوی ہو تو ایک اصل لا انتہا بڑی ہوگی۔ اس لیے
ہر وہ خط مستقیم جو مکانی کے محور کے متوازی ہو مکانی سے ایسے دو نقطوں
میں گاجن میں سے ایک محدود فاصلہ پر ہوگا اور دوسرا اس سے لامتناہی فاصلہ پر

۹۴ - وہ شرط معلوم کرو کہ خط ۴ = ۴ ل لا + ج، مکانی ۴ - ۴ ل لا =۔

کو مس کرے۔

حسب دفعہ سابق اُن نقطوں کے فضلے جو خط مستقیم اور مکانی میں مشترک ہیں مساوات

$$(م + لا ج) = ۲ = ۱ لا$$

$$یعنی م + لا + (۲ م ج - لا ج) = ۲ ج$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر خط حماس ہے یعنی اگر وہ مکانی کو دو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے تو مساوات کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہئیں۔ اسکے لیے شرط ہے

$$۲ م ج = (۲ م ج - لا ج) = ۱ لا$$

جو م ج = ۱ یا ج = $\frac{1}{م}$ میں تحویل ہوتی ہے۔

پس خواہ م کچھ بھی ہو خط

$$ما = م + لا + \frac{1}{م}$$

مکانی ما = ۲ لا کو مس کرے گا۔

مثال ۱۔ خط ما = لا + ۲ مکانی ما = ۲ لا = کو مس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ خط ما = لا + $\frac{1}{4}$ مکانی ما = ۲ لا = کو مس کرتا ہے۔

۹۵۔ اُس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ایک

مکانی پر کے دو دے ہوئے نقطوں میں سے گزرے

نیز اس کے کسی نقطہ پر حماس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مکانی کی مساوات

$$ما = ۲ لا$$

ہے اور فرض کرو کہ اس پر دو نقطوں کے محمد (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

مساوات (ما، ما) (ما، ما) = ما - لا - لا (۱)

کو مختصر کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔ اگر اس میں لا = لا اور ما = ما درج کیا جائے تو دائیں جانبی رکن تنہا معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن اس وجہ سے معدوم ہوتا ہے کہ (لا، ما) مکافی پر ہے۔

اس لیے نقطہ (لا، ما) خط مستقیم (۱) پر ہے اور اسی طرح نقطہ (لا، ما) بھی اس خط پر ہے۔

پس مطلوبہ خط کی مساوات (۱) ہے اور یہ مساوات

ما (ما + ما) - لا - لا - ما - لا (۲)

میں تحویل ہوتی ہے۔

(لا، ما) پر ماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۲) میں

صرف ما = ما درج کرنا ہوگا چنانچہ مطلوبہ مساوات

۲ ما - لا - لا - ما - لا - لا = ۰

ہے یا چونکہ

ما - لا = لا (لا + لا) (۳)

دوسرا ثبوت :- (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرنے والے

خط کی مساوات [حسب دفعہ ۲۴]

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & ما & لا \\ 1 & ما & لا \\ 1 & ما & لا \end{vmatrix}$$

ہے اور اس لیے

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

اس آخری مقطع کو پھیلاؤ اور ما۔ ما سے تقسیم کرو، تب حسب سابق وتر کی

مساوات

$$= (۱ + ۱) - (۱ - ۱) = ۱$$

حاصل ہوگی۔

نتیجہ صریح :- نقطہ (۰، ۰) پر ماس لا = ۰ ہے یعنی اس پر کما

ماس محور کے عمود وار ہوتا ہے۔

۹۶۔ ہم نے دو مختلف طریقوں (دفعات ۹۴ اور ۹۵) سے مکانی کے ماس کی مساوات کی دو شکلیں حاصل کی ہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل کو دوسری سے انڈیکس کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ فرض کرو کہ ہم جانتے ہیں کہ (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات

$$۱۲ = (لا + لا)$$

$$= ۱۲ + لا = ۱۲$$

ہے۔ تب

اگر یہ وہی خط ہو جو مساوات

$$۱۲ = م + لا$$

سے حاصل ہوتا ہے تو

$$۱۲ = م + لا$$

اس لیے م ج = لا، جیسا کہ دفعہ ۹۴ میں حاصل ہوا تھا۔ سوالات کے حل کرنے میں ماس کی مساوات کی وہ شکل لینی چاہیے جو سہولت بخش معلوم ہو۔

مثال ۱۔ ایک مکانی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا معین ان ماسوں کے نقطہ تماس کے معینوں کا وسط حسابی ہوتا ہے۔

نقاط (لا، ما) اور (لا، ما) پر ماسوں کی مساواتیں

$$ما = لا + \frac{1}{2}$$

$$ما = لا + \frac{1}{2}$$

تفریق سے ان کے مشترک نقطہ کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$ما - لا = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

تب معلوم ہو گا کہ $ما = لا + \frac{1}{2}$ ایک مکانی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جبکہ ماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں۔

فرض کرو کہ دو ماسوں کی مساواتیں

$$ما = لا + \frac{1}{م} \quad (۱)$$

$$ما = لا + \frac{1}{م} \quad (۲)$$

ہیں۔ یہ ماس چونکہ علی القوائم ہیں اس لیے $م = م = ۱$ ۔ پس دوسری مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$ما = لا + \frac{1}{م} \quad (۳)$$

ان کا مشترک نقطہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف (۳) کو (۱) میں سے تفریق کرنا ہو گا چنانچہ

(۱۱۵)

$$0 = لا + \frac{1}{م} - (ما + \frac{1}{م})$$

$$۰ = ۱ + لا$$

اور اس لیے

پس مطلوبہ طریق کی مساوات $لا + ۱ = ۰$ ہے اور یہ (بموجب دفعہ ۹۰) مرتب کی مساوات ہے۔

۹۷۔ ایک مکانی کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔

مکانی ما^۱۔ $۱۲ = لا$ کے نقطہ (لا، ما) پر حماس کی مساوات (دفعہ ۹۵)

$$ما، ۱۲ = (لا + لا) ' \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔

عماد وہ خط ہے جو (لا، ما) میں سے گزرتا ہے اور حماس پر عمود ہے۔ اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۳۰)

$$(ما - ما) ۱۲ + (لا - لا) = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

چونکہ $۱۲ = لا$ اس لیے اوپر کی مساوات کو شکل

$$۸ (ما - ما) + (ما، ۱۲ - لا - لا) = ۰ \dots \dots \dots (۳)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس کو لکھ سکتے ہیں

$$ما = لا + ما + \frac{ما}{۱۲} \dots \dots \dots (۴)$$

$$اگر ہم م = - \frac{ما}{۱۲} رکھیں تو ما = - ۱۲ م اور \frac{ما}{۱۲} = - ۱ م$$

اس لیے مساوات (۴) ہو جاتی ہے

$$ما = م لا - ۱۲ م - ۱ م \dots \dots \dots (۵)$$

عماد کی مساوات کی یہ شکل بعض اوقات مفید ہوتی ہے۔

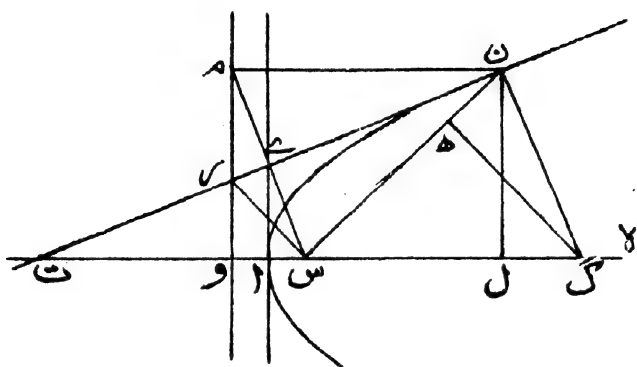
۹۸۔ اب ہم مکانی کے چند ہندسی خواص ثابت کریں گے۔

فرض کرو کہ نقطہ ن پر کا محاس مرتب سے م پر اور محور سے ت پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ ن سے محور پر اور مرتب پر عمود ن ل اور ن ہر میں فرض کرو کہ ن پر کا عماد ن گ، محور سے گ پر ملتا ہے۔

تب اگر ن کے محدود لا، ما ہوں تو نیر کے ماس کی مساوات

$$[95 \text{ دفعه}] (1) \dots\dots\dots (11+11) 12 = 166$$

ہوگی۔



یہ ماس محور سے جہاں ملتا ہے وہاں $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ ؛ اور اس نقطہ پر (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\cdot = v + v$$

تالہ ال..... (عہ)

مساوی ہیں۔

اس لیے زاویہ کا $س$ $ن$ = زاویہ کا $م$ $ن$ = ایک زاویہ قائمہ۔ (ضہ)
پھر چونکہ ہر نقطہ $(-، ۱، ۱)$ ہے اور $س$ نقطہ $(۱، ۰)$ ہے اس لیے
خط $س$ $م$ کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{۱ + لا}{۱۲} = \frac{۱ - ما}{۱۱}$$

ہے۔ یہ صرف کا نقطہ $ن$ پر کے $ماس$ پر جو مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے
عمود ہے

۱۱۔ $س$ $م$ $ن$ $ت$ پر عمود ہے، (صہ)
چونکہ $س$ $م$ $ن$ $ت$ پر عمود ہے اور $ن$ $ت$ زاویہ $س$ $ن$ $م$ (۱۱۴)
کی تفسیف کرتا ہے اس لیے وہ $س$ $م$ کی تفسیف کرے گا۔ پس اگر $س$ $م$
اور $ن$ $ت$ کا نقطہ تقاطع $م$ ہو تو $س$ $م$ = $م$ $ن$ ۔ لیکن
 $س$ $ن$ = ۱ ۔ اس لیے ۱ $و$ $م$ کے متوازی ہے اور اس لیے
وہ مکانی کے $راس$ پر $ماس$ ہے۔ پس وہ خط جو مکانی کے $ماسک$ میں
سے گذرے اور کسی $ماس$ $ن$ $ت$ پر عمود ہو اس $ماس$ سے

اس پر کے $ماس$ پر ملتا ہے۔
ہم اس آخری مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر ثابت کر سکتے ہیں:-
فرض کرو کہ مکانی کے کسی $ماس$ کی مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{۱}{م} + لا = ما$$

ہے۔ اس خط کی مساوات جو $ماسک$ $(۱، ۰)$ میں سے گذرے اور (۳) پر عمود ہو

$$ما = - \frac{۱}{م} (لا - ۱)$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{۱}{م} + \frac{لا}{م} = ما$$

یا

ہے۔

خطوط (۳) اور (۴) سرکجا وہاں ملتے ہیں جہاں لا = ۰۔

نقطہ ن (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات

$$۱۲ (ما - لا) + ما (لا - لا) = ۰$$

ہے [دفعہ ۹]۔

نقطہ گ پر ما = ۰ اور اس لیے

$$۱۲ (لا - لا) + ما (لا - لا) = ۰$$

$$۱۲ (لا - لا) = (گ - ل) ل$$

$$۱۲ (لا - لا) = ل (گ - ل) \quad (نہ)$$

مثالیں

۱۔ مکانی ما - ۲ = ۴ لا = ۰ کے وتر خاص کے سروں پر کے ماسوں کی

اور عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ جواب: لا ± ما + ۱ = ۰

$$۱۳ ± لا ± ما = ۰$$

۲۔ وہ نقطے معلوم کرو جہاں خط ما = ۳ لا - ۱، مکانی ما - ۲ = ۴ لا = ۰۔

کو قطع کرتا ہے۔ جواب: (۱، ۱۲) (۱/۹، ۲/۳)

۳۔ ثابت کرو کہ مکانی ما - ۲ = ۴ لا = ۰ کے نقطہ (لا، ما) پر کا ماس

مکانی کے نقطہ (۱/۱، ۲/۱) پر کے ماس پر عمود ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ خط ما = ۲ لا + ۱/۲، مکانی ما - ۲ = ۴ لا = ۰ کو

منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

ثابت کرو کہ وہ ۲۰ لا + ۲۰ ما = ۱ کو بھی منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

- ۵۔ ایک خط مستقیم، $لا + ما = ۲$ اور $ما = ۸$ لا دونوں کو مس کرتا ہے۔
 ثابت کرو کہ اس کی مساوات $ما = (لا + ۱۲) \pm$ ہے۔
 ۶۔ ثابت کرو کہ خط $لا + ما = ۱۳$ ، منحنی
 $لا - ۷ - لا - ۸ - ما + ۱۴ = ۰$

کو مس کرتا ہے۔

- ۷۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا + ۲ + لا + ۲ = ما$ ، ایک مکانی کو
 تعبیر کرتی ہے جس کا اس نقطہ $(۲، ۲)$ پر ہے اور جس کا وتر خاص ۲ ہے
 اور جس کا محور محور $ما$ کے متوازی ہے۔
 ۸۔ ثابت کرو کہ وہ تمام مکانی جن کے محور محور $ما$ کے متوازی ہیں شکل
 $لا + ۲ + لا + ۲ = ما + ج = ۰$

کی مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

- ۹۔ حسب ذیل مکافیوں میں سے ہر ایک کے راس کے محدود وتر خاص کا
 طول معلوم کرو۔

$$(۱) \quad ما = ۱۰ + لا$$

$$(۲) \quad لا - ۲ = ما$$

$$(۳) \quad (۲ - ما) = ۵ (لا + ما)$$

$$(۴) \quad لا + ۱۲ = ما$$

$$\text{جواب: } (۱) \quad (۲ - ما) = ۵ (لا + ما)$$

$$(۲) \quad (۲ - ما) = ۵ (لا + ما)$$

$$(۳) \quad (۲ - ما) = ۵ (لا + ما)$$

$$(۴) \quad (۲ - ما) = ۵ (لا + ما)$$

- ۱۰۔ مثال ۹ کے مکافیوں میں سے ہر ایک کے ماسک کے محدود وتر خاص کی
 مساوات معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } (۱) \quad (۲ - ما) = ۵ (لا + ما)$$

$$(۲) \quad (۲ - ما) = ۵ (لا + ما)$$

$$(۳) \quad (۲ - ما) = ۵ (لا + ما)$$

$$(۴) \quad (۲ - ما) = ۵ (لا + ما)$$

- ۱۱۔ اس مکانی کی مساوات لکھو جس کا ماسک میدا پر ہے اور جس کا مرتب

خط $لا - ما = ۱$ ہے ثابت کرو کہ خط $ما = ۲ - لا$ اس مکانی کو مس کرتا ہے۔

۱۲۔ اگر ایک مکانی کے محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے کوئی وتر و ن کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ن اور پ کے مَعینوں کا مستطیل، رقبہ میں مستقل ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ فصول کا مائل ضرب مستقل ہوگا۔

۱۳۔ ماسوں $م = لا + \frac{1}{م}$ اور $ما = \frac{1}{لا} + \frac{1}{م}$ کے نقطہ تقاطع کے عدد معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طرِ لوق ایک خط مستقیم ہے جبکہ م مستقل ہو۔ نیز ثابت کرو کہ اگر $م + ۱ = ۰$ تو یہ خط مرتب ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ م کی تمام قیمتوں کے لیے خط $ما = م(لا + ۱) + \frac{1}{م}$ ، مکانی $ما^۲ = ۲(لا + ۱)$ کو مس کرے گا۔ (۱۱۹)

۱۵۔ دو خطوط مستقیم باہم علی القوائم ہیں اور ان میں سے ایک، مکانی $ما^۲ = ۲(لا + ۱)$ کو مس کرتا ہے اور دوسرا، $ما^۲ = ۲(لا + ۱)$ کو۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع خط $لا + ۱ = ۰$ پر ہوگا۔

۱۶۔ اگر ایک مکانی کے کسی ماس پر محور پر کے دو نقطوں سے جو ماسک سے مساوی فاصلوں پر ہوں عمود کھینچے جائیں تو ان کے مربعوں کا فرق مستقل ہوگا۔

۱۷۔ دو خطوط مستقیم اف اور اق کو ایک مکانی کے راس میں سے ایک دوسرے کے علی القوائم کھینچا گیا ہے اور یہ خطوط منہی سے نقطوں ف اور ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط ف ق محور کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

۱۸۔ اگر دائرہ $لا + ما + (لا + ب + ما + ج) = ۰$ ، مکانی $ما^۲ = ۲(لا + ۱)$ کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ان نقطوں کے معینوں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا۔ [۱۶ سے ضرب دو اور $ما^۲$ لاکے بجائے $ما$ درج کرو۔ تب معین

مساوات

$$ما^۲ + ۱۶ + ما^۲ + ۱۶ + ما^۲ + ۱۶ + ب + ما + ۱۶ + ج = ۰$$

سے مائل ہوں گے۔ ان چار معینوں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ مساوات میں $ما$ کی رقم نہیں ہے]

۱۹۔ اگر مکانی $ما^۲ = ۲(لا + ۱)$ کا ماس محور سے ت پر اور ا پر کے

ماس سے ما پر ملے اور تپیل ت ا ماق کی تکمیل کی جائے تو ثابت کرو کہ ق کا
 طریق مکانی $ما + لا = ۰$ ہے۔

۲۰۔ اگر ایک مکانی پر تین نقطے 'ف' 'ق' 'س' ہوں جن کے محدود
 سلسلہ ہندسیہ میں ہیں تو ثابت کرو کہ 'ف' 'س' پر کے ماس 'ق' کے معین پر ملے گی۔
 ۲۱۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو مکانی $ما - م - لا = ۰$ میں بنایا

کیا ہو

$$\frac{1}{2} (ما - م) (ما - م) (ما - م)$$

ہے جہاں $ما$ ، $م$ ، $ما$ ، 'راسوں کے معین ہیں۔

۹۹۔ کسی نقطہ سے ایک مکانی پر دو ماس کھینچے جاسکتے ہیں جو
 حقیقی، منطبق، یا خیالی ہونگے بموجب اس کے کہ نقطہ 'مکانی
 کے باہر' اس کے اوپر' یا اس کے اندر ہو۔

وہ خط جس کی مساوات

$$ما = م + لا + \frac{1}{م} \dots \dots \dots (۱)$$

ہے مکانی $ما = م + لا$ کو مس کرے گا خواہ $م$ کی قیمت کچھ بھی ہو (دفعہ ۹۳)۔

(۱۲۰) خط (۱) مخصوص نقطہ (لا، ما) میں سے گزرے گا اگر

$$ما = م + لا + \frac{1}{م}$$

یعنی اگر $ما - لا - م + ما + لا = ۰$ (۲)۔

مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اور اس سے مکانی
 کے ان ماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے
 ہیں۔ لیکن چونکہ کسی دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے

کسی نقطہ (لا، ما) میں سے دو ماس گزریں گے۔

(۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں گی بموجب اس کے کہ
 لا۔ ۱۲ لا مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنی [دفعہ ۹۲] بموجب اسکے کہ
 (لا، ما) مکانی کے باہر، مکانی کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

۱۰۰۔ اس خط کی مساوات معلوم کرنا جو ان دو ماسوں کے

نقاط تماس میں سے گزرے جو کسی نقطہ سے ایک مکانی پر

کھینچے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ (لا، ما) اس نقطہ کے محدود ہیں جس سے ماس کھینچے گئے ہیں۔
 فرض کرو کہ ماسوں کے نقاط تماس کے محدود (ہ، ک) اور (ہ، تھ)

ہیں۔

(ہ، ک) اور (ہ، تھ) پر کے ماسوں کی مساواتیں

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + ہ)$$

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + ہ)$$

ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ (لا، ما) ان دو خطوں پر ہے۔

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + ہ) \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + ہ) \dots \dots \dots (۲)$$

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط (ہ، ک)
 اور (ہ، تھ) اس خط استقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

$$\text{ما} = ۱۲ (لا + لا) \dots \dots \dots (۳)$$

ہے۔

پس (۳) اس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ (لا، ما) سے
 کھینچے ہوئے ماسوں کے نقاط تماس میں سے گزرتا ہے۔

اگر کسی نقطہ n سے ایک مکانی کے تماس کیجئے جائیں تو ان کے نقاط تماس کو ملانے والے خط کو ہم مکانی کے لحاظ سے نقطہ n کا قطبی کہیں گے۔
[دفعہ ۶، دیکھو]۔

۱۰۱۔ اگر ایک مکانی کے لحاظ سے نقطہ f کا قطبی، نقطہ q میں سے گزرے تو نقطہ q کا قطبی، f میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ f کے محدد (l_a ، m_a) ہیں اور q کے (l_q ، m_q)۔
مکانی $m_a = 1, 2$ کے لحاظ سے نقطہ f کے قطبی کی سادہ

$$m_a = 1, 2 \quad (l_a + l_q)$$

ہے۔ اگر یہ خط نقطہ (l_q ، m_q) میں سے گزرتا ہے تو حاصل ہونا چاہیے

$$m_a = 1, 2 \quad (l_a + l_q)$$

اس نتیجہ کے تشاکل سے ظاہر ہے کہ یہ وہ شرط بھی ہے کہ q کا قطبی، f میں سے گزرے۔

ٹھیک اسی طریقہ پر جو دفعہ ۸، میں اختیار کیا گیا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر دو نقطوں f اور q کے قطبی نقطہ s پر ملیں تو s ، خط f کا قطب ہوگا۔

ماسکہ (۱) کا قطبی $l_a + 1 = 1$ ہے اور اس لیے ماسکہ کا قطبی مرتب۔

اگر مرتب پر کوئی نقطہ q ہو تو q ، ماسکہ میں سے قطبی پر ہوگا اور اس لیے q کا قطبی، s میں سے گزرے گا۔ پس مرتب پر کے کسی نقطہ سے ایک مکانی کے تماس کیجئے جائیں تو نقاط تماس کو ملانے والا خط ماسکہ میں سے گزرے گا۔

۱۰۲۔ مکانی کے متوازی و تروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جو مکانی کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

مکانی $ما^۲ - لا^۲ = ۰$ پر کے دو نقطوں (لا، ما) اور (لام، مام) کو ملائیو گے
خط کی مساوات [دفعہ ۹۵ (۳)]

$$(۱) \quad (ما + مام) - (لا + لام) = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اب اگر خط (۱) مکانی کے محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو

$$(۲) \quad \dots \dots \dots \frac{لا^۲}{ما + مام} = \text{مس طہ}$$

لیکن اگر اس وتر کے وسطی نقطہ کے محدود (لا، ما) ہوں تو

$$لا^۲ = لا + لام، ما^۲ = ما + مام$$

$$\text{اس لیے (۲) سے مس طہ} = \frac{لا^۲}{ما} \quad (۱۲۲)$$

$$(۳) \quad \dots \dots \dots ما^۲ = لا + لام \text{ مس طہ}$$

اس لیے ماستقل ہے تا آنکہ طہ مستقل ہو۔

پس مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی
نقطوں کا طریق، مکانی کے محور کے متوازی ایک خط مستقیم ہے۔

دوسرا ثبوت: خط $ما = م + لا + ج$ ، مکانی $ما^۲ = لا^۲$ کو وہاں قطع

کرتا ہے جہاں $لا^۲ = م + ما + ج$ اس لیے اگر وتر کے نقطہ وسطی کا معین
ما ہو تو ج کی تمام قیمتوں کے لیے $ما = \frac{لا^۲}{م}$

تعریف۔ کسی مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے

وسطی نقطوں کے طریق کو مخروطی کا قطر کہتے ہیں اور قطربن وتروں کی تنصیف
کرتا ہے ان کو قطر کے معین کہتے ہیں۔

ہم دفعہ ۹۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ مکانی کا کوئی قطر اس سے صرف ایک

نقطہ پر ملتا ہے جن کا فاصلہ اس سے محدود ہوتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں قطر منحنی کو قطع کرتا ہے قطر کا سیرا کہلاتا ہے۔

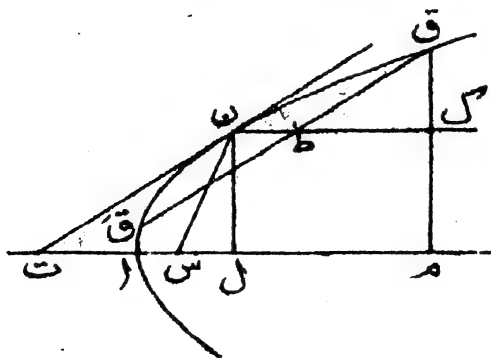
۱۰۳۔ ایک قطر کے سرے پر کا ماس اُن وتروں کے متوازی ہوتا ہے جنکی وہ تنصیف کرتا ہے۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطے سب کے سب ایک قطر پر واقع ہوتے ہیں۔ پس متوازی تماس یعنی اُس متوازی وتر پر غور کرنے سے جو منحنی کو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ متوازی وتروں کے نظام کا قطر اُس تماس کے نقطہ تماس میں سے گذرتا ہے جو وتروں کے متوازی ہے۔

۱۰۴۔ مکافی کی مساوات معلوم کرنا جبکہ کسی قطر اور اس کے
سیرے کے تماس کو محور قرار دیا جائے۔

فرض کرو کہ قطر کا سِران ہے اور فرض کرو کہ ن پر کا ماس محور کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ تب

ل ن = ۱۲ و مم طه [دفعه ۱۰۲ (۳)]



$$\therefore ۱ل = \frac{۱ن}{۱م} = ۱مم ط$$

فرض کرو کہ نئے محوروں کے حوالے سے ق کے محدود (لا، ما) ہیں۔
ق م کو مکانی کے محور پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ 'قطن ط کو ک پر
قطع کرتا ہے۔

$$\text{تب } ۱مق = ۱لن + ۱کق = ۱مم ط + ۱ماجب ط \dots (۱)$$

$$۱م = ۱ل + ۱ل = ۱ل + ۱نط + ۱طک$$

$$۱م = ۱مم ط + ۱لا + ۱ماجم ط \dots (۲)$$

$$\text{لیکن } ۱م = ۱م \times ۱م = ۱م$$

اس لیے (۱) اور (۲) سے

$$(۱م + ۱ماجب ط) = ۱م (۱مم ط + ۱لا + ۱ماجم ط)$$

$$\text{یا } ۱ماجب ط = ۱لا \dots (۳)$$

$$\text{لیکن } ۱ل = ۱مم ط، \text{ ایسے سے } ۱ن = ۱ + ۱ل = \frac{۱}{۱جب ط}$$

$$\text{اس لیے } ۱ن کی بجائے ۱ یا \frac{۱}{۱جب ط} \text{ رکھنے سے منحنی کی مساوات}$$

$$۱م = ۱لا \dots (۴)$$

ہے۔
یہ مشاہدہ طلب ہے کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے مساوات
۱م = ۱لا کی شکل

(۱ل + ۱م + ۱ن) + ۱ل + ۱لا + ۱م + ۱ن = ۰
ہوگی (دیکھو تیسرا باب) اور اس لیے کسی مکانی کی مساوات میں جو خواہ کسی
محوروں کے حوالے سے ہو دوسرے درجہ کی رقیں ایک کامل مربع
بناتی ہیں۔

اس کے بالعکس شکل

$$(ل + لا + م + ن) + (ل + لا + م + ن) = .$$

کی کوئی مساوات جس میں دوسرے درجہ کی رقبے ایک کامل مربع بناتی ہیں ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی کے کسی نقطہ سے خط $ل + لا + م + ن = .$ پر کا عمود ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو اسی نقطہ سے $ل + لا + م + ن = .$ پر ٹھینچا گیا ہو اور اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ان خطوں کو لا اور ما کے نئے محور قرار دیا جائے تو منحنی کی مساوات کی شکل $ما^2 = ۴ لا$ ہو جاتی ہے۔

اس طرح مساوات $(ل + لا + م + ن) + (ل + لا + م + ن) = .$

ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ایک قطر $لا + م + ن = .$ ہے اور اس کے سرے پر کا ماس $ل + لا + م + ن = .$ ہے۔

۱۰۵۔ اگر ایک مکانی کی مساوات کسی قطر اور اس ماس کے حوالے سے جو قطر کے سرے پر ٹھینچا گیا ہو $ما^2 = ۴ لا$ ہو تو خط $ما = م + لا + \frac{۱}{۴}م$ کی تمام قیمتوں کے لیے اس کا ایک ماس ہو گا، کسی نقطہ $(لا، ما)$ پر کے

ماس کی مساوات $ما^2 = ۴ لا$ ہو گی، مکانی کے لحاظ سے نقطہ $(لا، ما)$ کے قطبی کی مساوات $ما^2 = ۴ لا$ ہو گی، اور خط $ما = م + لا + \frac{۱}{۴}م$ کے متوازی دتروں کے وسطی نقطوں کا طریق $ما = \frac{۱}{۴}م$ ہو گا۔

ان مسئلوں کے لیے نئی تحقیق کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ دفعات

۹۴، ۹۵، ۱۰۰، اور ۱۰۲ برابر درست رہتے ہیں خواہ محاور علی القوا کم ہوں یا نہ ہوں۔

(۱) مکانی کے دو محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جبکہ محاس ایک دوسرے کے ساتھ ایک دیا ہو زاویہ بنائیں۔

خط $MA = M + LA + \frac{1}{M}$ مکانی $MA^2 = M + LA =$ کا محاس ہے خواہ M کی قیمت کچھ ہی ہو [دفعہ ۹۴]۔

اگر (LA, M) کو معلومہ فرض کیا جائے تو اس مساوات سے ان محاسوں کی سمتیں معلوم ہوں گی جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ چنانچہ سمتوں کو معلوم کرنے کے لیے مساوات ہوگی

$$M^2 - LA - M + MA = 0 \quad (125)$$

اور اگر اس دو درجی مساوات کی اصلیں M_1 اور M_2 ہوں تو

$$M_1 + M_2 = LA \quad \text{اور} \quad M_1 M_2 = \frac{1}{LA}$$

$$\frac{M_1^2 - LA - M_1}{M_1} = \frac{M_2^2 - LA - M_2}{M_2} = (M_1 - M_2)$$

لیکن اگر دو محاس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ θ بنائیں تو

$$\cos \theta = \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2 + 1}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{M_1^2 - LA - M_1}{M_1^2 + 1} = \frac{M_2^2 - LA - M_2}{M_2^2 + 1}$$

اس لیے مطلوبہ طریق کی مساوات

$$MA^2 - LA - (M + LA) = \cos^2 \theta$$

ہے۔
(۲) اس عمود کے پائین کا طریق معلوم کرنا جو ایک ثابت نقطہ سے مکانی کے کسی محاس پر کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ مکانی کی مساوات $MA^2 = M + LA =$ ہے اور ثابت نقطہ کے

محد (م'ک) ہیں۔

مکانی کے کسی ماس کی مساوات

$$م = لا + \frac{1}{م} \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اس خط کی مساوات جو (م'ک) میں سے گذرتا ہے اور خط (۱) پر عمود ہے

$$م - ک = -\frac{1}{م} (لا - م) \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

طریق کو معلوم کرنے کے لیے م کو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساتھ کرتا ہوگا۔ چنانچہ (۲) کی رو سے

$$م = -\frac{لا - م}{م - ک}$$

اور اس لیے (۱) میں درج کرنے سے

$$م + \frac{لا - م}{م - ک} = لا + \frac{1}{م - ک}$$

$$یا \quad م (م - ک) (لا - م) + (لا - م) (م - ک) = (م - ک) \dots \dots \dots (۳)$$

اس لیے طریق تیسرے درجہ کا ایک منحنی ہے۔

(۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ و خود ہمیشہ طریق پر رہتا ہے۔ اگر نقطہ

و مکانی کے باہر ہو تو اس سے کوئی شکل پیدا نہیں ہوتی کیونکہ ایسی صورت

میں و میں سے دو حقیقی ماس کھینچے جاسکتے ہیں اور و سے ان ماسوں پر

عمود کھینچے جائیں تو ان کا پائین خود نقطہ و ہوگا۔ جب نقطہ و مکانی کے

اندر ہوتا ہے تو و سے کھینچے ہوئے ماس خیالی ہوتے ہیں اور اس لیے و

سے ان پر کھینچے ہوئے عمود بھی خیالی ہوتے ہیں لیکن وہ سب نقطہ و میں سے

گذرتے ہیں اور اس لیے و طریق پر ایک نقطہ ہے۔

اگر $ھ = ۱$ تو $ک = ۰$ یعنی جب و مکانی کے ماسک پر ہوتا ہے تو

(۱۲۶) مساوات (۳) تحویل ہو کر $\{ \lambda^2 + (-\lambda - 1) \} = 0$ ہو جاتی ہے اور اس لیے کہی،

نقطہ دائرہ $MA + (LA - A) = 0$ اور خط مستقیم $LA = 0$ میں تحویل ہوتا ہے۔

(۳) اُس مثلث کا مرکز عمودی جو مکافی کے تین ماسوں

سے بنے مرتبہ میر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مثلث کے اضلاع کی مساواتیں

$$\frac{1}{\frac{1}{m}} + \frac{1}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{\frac{1}{m}} \quad \frac{1}{\frac{1}{m}} + \frac{1}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{\frac{1}{m}} \quad \frac{1}{\frac{1}{m}} + \frac{1}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{\frac{1}{m}}$$

ہے مکانی ما^۲۔ لا^۲ = لا^۲ کا ایک عماد ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔
 اگر نقطہ (لا^۲، ما^۲) کو معلومہ فرض کیا جائے تو مساوات (۱) سے ان
 عمادوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو اس نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔
 اگر (۱) کی اصلیں م^۱، م^۲، م^۳ ہوں تو

$$م^۱، م^۲، م^۳ = -\frac{ما}{لا} \dots \dots \dots (۲)$$

لیکن اگر عمادوں میں سے دو (فرض کرو وہ جو م^۱، م^۲ سے حاصل ہوتے ہیں) علی القوا^۱م ہوں تو

$$م^۱، م^۲ = -۱ \text{ اور اس لیے } (۲) \text{ سے } م^۳ = -\frac{ما}{لا}$$

لیکن م^۳ (۱) کی ایک اصل ہے

$$ما = \frac{لا}{لا} - ما^۲ - \frac{لا}{لا} = \frac{ما^۳}{لا}$$

اس طرح ما^۲ = لا (لا - لا^۳)، مطلوبہ طریق کی مساوات ہے۔

۱۰۶۔ ”ہم عماد“ نقطے۔ مکانی ما^۲۔ لا^۲ = لا^۲ کے کسی نقطہ

(لا^۲، ما^۲) پر کے عماد کی مساوات

$$۱۲ (ما - ما) + ما (لا - لا) = ۰ \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اگر خط (۱) نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرے تو

$$۸ (ک - ما) + ما (ھ - ما) = ۰ \dots \dots (۲)$$

مساوات (۲) سے ان نقطوں کے معین حاصل ہوتے ہیں جن پر کے
 عماد مخصوص نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں۔ یہ مساوات
 ایک کعبی مساوات ہے اور اس لیے کسی نقطہ میں سے مکانی کے تین
 عماد (جن میں سے کم از کم ایک حقیقی ہونا چاہیے) کھینچے جا سکتے ہیں۔
 چونکہ مساوات (۲) میں ما کی کوئی رقم شامل نہیں ہے اس لیے

اگر اس کی اصلیں $ما، ما، ما$ ہوں تو

اب ہم جانتے ہیں کہ مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے لیے ان میں سے کسی وتر کے سروں پر کے دو معینوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ [دفعہ ۱۰۲]۔ اس لیے ان نقطوں پر کے عماد ایک ثابت نقطہ کے عماد پر ملتے ہیں جس کے معین کو عمادوں کے معینوں کے مجموعہ میں جمع کرنے پر صفر حاصل ہوتا ہے۔

پس ان عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق جو ایک مکانی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے سروں پر کھینچے گئے ہوں ایک خط مستقیم ہے جو منحنی کا ایک عماد ہے۔
اگر 'ق' سر پر کے عماد (ہ، ک) پر ہیں تو 'ق' سر کے معین مساوات

$$ما + ۱۴ + ۱۲ - ۱۷ = ۸ - ۱۸ + ک = ۰ \dots (۴)$$

کی اصلیں ہیں۔
اب فرض کرو کہ دائرہ 'ق' سر

لا + ما + ۲ + گ لا + ۲ ف + ما + ج = ۰ ہے۔ ۱۶ سے ضرب دو اور ۳ لا کی بجائے ما رکھو تو دائرہ اور مکانی کے نقاط تقاطع کے معین مساوات

$$ما + ۱۶ + ۱۸ + گ + ۳۲ + ف + ۱۶ + ج = ۰ \dots (۵)$$

کی اصلیں ہیں۔

پس $ما + ما + ما + ما = ۰$ ۔ لیکن (۴) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطوں 'ق' سر کے لیے $ما + ما + ما = ۰$ ۔
اس لیے $ما = ۰$ اور اس لیے دائرہ 'ق' سر (ہ، ک) کی تمام

قیمتوں کے لیے مکانی کے اس میں سے گذرتا ہے۔
(۱۲۸) پس ج = ۱۰ اور پھر (۴) سے 'ف' 'ق' 'م' کے معین مساوات
 $۱۸ + ۱۲ (گ + ۱۲) + ۳۲ = ۰$ (۶)
کی اصلیں ہیں۔

(۴) اور (۶) کا مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ
گ = - (۱۲ + ۱۲) اور ۴ = - ک
اس طرح وہ دائرہ جو ان تین نقطوں میں سے گذرتا ہے جن پر کہ
عماد نقطہ (۴) میں سے گذرتے ہیں
 $۱۸ + ۱۲ - (۱۲ + ۱۲) - ۱۲ = ۰$

ہے۔
۱۰۔ مکانی ۱۸ - ۱۲ = ۰ پر کے کسی نقطہ کے دونوں محدودوں کو ایک
متغیر کی رقوم میں بیان کرنا اکثر مفید ہوتا ہے۔
سادہ ترین طریقہ لاگو ما کی رقوم میں بیان کرنے کا ہے۔

نقطہ $(\frac{۱۸}{۱۲}, ۱۲)$ صریحاً ۱۸ - ۱۲ = ۰ پر ہے اور اگر اس کو
نقطہ ۱۸ کہا جائے تو ہم نے حسب ذیل مساواتیں علی الترتیب (۱) وتر
۱۸ کے لیے (۲) ۱۸ پر کے ماس کے لیے (۳) ۱۸ اور ۱۲ پر کے
ماسوں کے نقطہ تقاطع کے لیے معلوم کی ہیں:

$$(۱) ۱۸ (۱۸ + ۱۲) - ۱۲ = ۰$$

$$(۲) ۱۸ - ۱۲ = ۰$$

$$(۳) ۱۸ = ۱۲ + ۱۲$$

دوسرا طریقہ جو اکثر استعمال کیا جاتا ہے $۱۸ = ۱۲$ اور $۱۲ = ۱۸$
رکھنے کا ہے۔

نقطہ $(۱۲, ۱۲)$ صریحاً ۱۸ - ۱۲ = ۰ پر ہے اور اگر اس کو
نقطہ ۱۸ کہا جائے تو ہم وتر ۱۸، ۱۲ وغیرہ کی مساواتیں دفعہ ۹۵ وغیرہ کے

طریقہ پر معلوم کر سکتے ہیں (یا اوپر کی مساواتوں میں $ما$ کی بجائے ۲ $لا$ $ع$ درج کر کے)۔ چنانچہ یہ مساواتیں

$$(۱) ما (ع + ۲) - ۲ لا - ۲ ع = ۰$$

$$(۲) ما ع - لا - ۲ ع = ۰$$

$$(۳) لا = ۲ ع + ۲ اور ما = ۲ (ع + ۲)$$

ہیں۔ **مثال ۱**۔ اگر ایک دائرہ کا قطر ایک مکانی کا ایسا وتر ہو جس کے سروں کے معینوں کا فرق وتر خاص کے طول کا دوگنا ہے تو ثابت کرو کہ دائرہ مکانی کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ وتر کے سرے $ما$ ، $م$ ہیں تو $ما \sim م = ۸$ ۔

دائرہ کی مساوات [دفعہ ۶۶ مثال ۲]

$$(۱) (ما - م) + (لا - لا) = ۰$$

ہے۔ یہ دائرہ مکانی کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کے معین

$$۱۶ (ما - م) + (ما - م) = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح دوسرے دو نقاط تقاطع کے معین مساوات

$$۱۶ (ما + م) + (ما + م) = ۰$$

$$یعنی ما + م (ما + م) + ما + م = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس آخری مساوات کی اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$(ما + م) = ۴ ما + م + ۶۳$$

$$(ما - م) = ۸$$

یعنی اگر

مثال ۲۔ مکافیوں $ما - م = ۸$ اور $لا - م = ۸$ میں سے

کسی ایک میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد گنی جاسکتی ہے جن کے ضلع دوسرے مکانی کو مس کریں۔

فرض کرو کہ $MA^2 - MA \cdot LA = 0$ پر کوئی تین نقطے MA ، MA ، MA ہیں ایسے کہ خطوط MA ، MA اور MA MA میں سے ہر ایک مکانی LA - MA MA کو مس کر سکے۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ خط MA ، MA بھی اس مکانی کو مس کرتا ہے۔ MA ، MA کو ملانے والا خط

$$MA (MA + MA) - MA \cdot LA - MA \cdot MA = 0$$

ہے۔ یہ خط دوسرے مکانی کو مس کرتا ہے اور اس لیے مساوات

$$(MA + MA) LA - 16 \cdot MA - MA \cdot MA = 0$$

کی اصلیں مساوی ہیں اور اس لیے

$$MA \cdot MA (MA + MA) + 16 \cdot MA = 0 \dots (1)$$

$$MA \cdot MA (MA + MA) + 16 \cdot MA = 0 \dots (2)$$

تفہیق کرنے اور $MA (MA - MA)$ سے تقسیم کرنے پر جہاں $MA (MA - MA)$ صفر نہیں ہے حاصل ہوتا ہے

$$MA + MA + MA = 0 \dots (3)$$

ما کو (۱) اور (۳) سے ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$MA \cdot MA (MA + MA) + 16 \cdot MA = 0$$

جس سے ثابت ہے کہ MA ، MA کو ملانے والا خط بھی LA - MA MA کو مس کرتا ہے۔

مثال ۳ - مکانی $MA^2 - MA \cdot LA = 0$ میں کھینچے ہوئے مساوی الاضلاع

مثلثوں کے مرکزوں کا طریق مکانی $MA^2 - MA \cdot LA = 0$ - MA MA ہے۔

متساوی الاضلاع مثلث میں مرکز ہندسی مرکز عمودی پر منطبق ہوتا ہے۔

اب اس مثلث کا مرکز ہندسی جس کے راس نقطے MA ، MA ، MA ہیں

$$۳ \text{ لا} = ۱ \text{ ع} - ۲ \text{ ع} - (۱ \text{ ع} - ۲ \text{ ع}) = ۱ \text{ ع} - ۲ \text{ ع} - ۱ \text{ ع} + ۲ \text{ ع} = ۰$$

اور
۳ ما = ۱ ع - ۲ ع
سے معلوم ہوتا ہے۔

ثلث کے عمودوں میں سے دو مساواتوں

$$۰ = (۱ \text{ ع} - ۲ \text{ ع}) + (۱ \text{ ع} + ۲ \text{ ع}) - (۱ \text{ ع} - ۲ \text{ ع}) = ۰$$

$$۰ = (۱ \text{ ع} - ۲ \text{ ع}) + (۱ \text{ ع} + ۲ \text{ ع}) - (۱ \text{ ع} - ۲ \text{ ع}) = ۰$$

سے معلوم ہوتے ہیں۔

تفریق کرنے پر

(۱۳)

$$۰ = ۱ \text{ ع} + ۱ \text{ لا} + ۱ \text{ ع} - ۲ \text{ ع} = ۰$$

پس چونکہ مرکز ہندسی اور مرکز عمودی منطبق ہوتے ہیں اس لیے

$$۳ \text{ لا} = ۱ \text{ ع} - ۲ \text{ ع} + ۱ \text{ لا} + ۱ \text{ ع} = ۰$$

مثال ۴۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱، ۲، ۳ لا = ۱، ۲، ۳ ع کو مس کرتے

ہیں اور اس کے دو اس ما = ۲ ب (لا + ج) = ۰ پر ہیں۔ تیسرے اس کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ تین ماس

$$۱ \text{ ع} - ۱ \text{ لا} - ۱ \text{ ع} = ۰ \quad (۱)$$

$$۲ \text{ ع} - ۲ \text{ لا} - ۲ \text{ ع} = ۰ \quad (۲)$$

$$۳ \text{ ع} - ۳ \text{ لا} - ۳ \text{ ع} = ۰ \quad (۳)$$

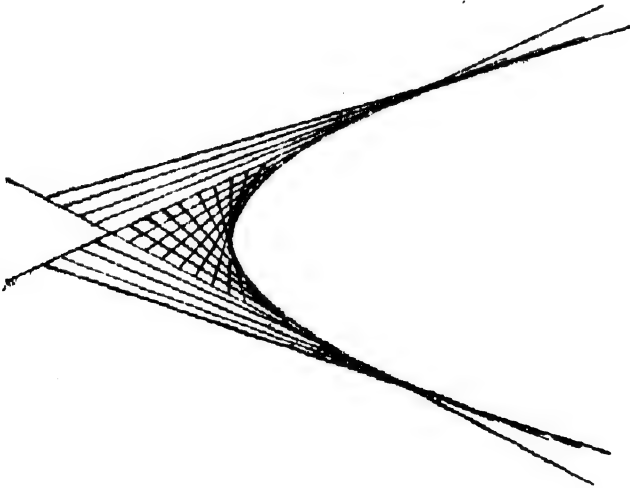
اور
تین مثلث کے تین اس

(۱۳۱)

کر سکتا ہے۔ اس منحنی کو متحرک نقطہ کا طریق کہتے ہیں۔
اسی طرح اگر ایک خط مستقیم کی مساوات کے دو مستقلوں میں کوئی
رشتہ ہو تو خط ہر طرح حرکت کرنے میں آزاد نہیں ہوگا لیکن وہ ایسے لا تعداد
عمل اختیار کر سکتا ہے جو سب کے سب ایک خاص منحنی کے مماس ہونگے۔
اس منحنی کو متحرک خط کا لغاف کہتے ہیں۔

مثلاً اگر مساوات $l + m - a = 0$ کے مستقلوں l اور m میں
رشتہ $l^2 + m^2 = a^2$ ہو تو خط مستقیم $l + m - a = 0$ اس طرح حرکت
کرے گا کہ نقطہ $(0,0)$ سے اس کا عمودی فاصلہ ہمیشہ a کے مساوی ہوگا
اور اس لیے یہ خط اپنے تمام ممکن محلوں میں دائرہ $l^2 + m^2 = a^2$ کو مس کرنا
چاہیے۔

حسب ذیل شکل میں ایک خط مستقیم کے مختلف محل دکھائے گئے
ہیں جو محوروں پر ایسے مقطوعے قطع کرتا ہے جن کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔



اب اگر t اور t' کسی منحنی کے دو متصلہ مماس ہوں

اور اگر ماس ت ق بتدریج ت ف کی طرف حرکت کر کے بالآخر
ت ف پر منطبق ہو جائے تو ماسوں کا نقطہ تقاطع 'نقطہ ف' کے
قریب اور قریب تر حرکت کرے گا اور بالآخر اس پر اگر منطبق ہو جائیگا۔
اس طرح دو منطبق ماسوں کا نقطہ تقاطع اس منحنی پر ہوتا ہے جس کو سب
ماس مس کرتے ہیں۔ نیز وہ دو ماس جو کسی نقطہ سے ایک منحنی کے کھینچے
جائیں منطبق ہوں گے اگر نقطہ منحنی پر ہو۔



اب خطوط مستقیم کے اس نظام پر غور کرو جو مساوات

$$\frac{لا}{ھ} + \frac{ما}{ل-ھ} = ۱ \text{ یا } ھ^۲ + ھ(ما-لا-ل) + ل^۲ = ۰ \quad (۱)$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ل مستقل ہے۔

چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے ھ کی دو قیمتیں 'لا اور ما' کی کسی معلومہ قیمتوں کے جواب میں حاصل ہوں گی۔ اس طرح کسی دے ہوئے نقطہ میں سے نظام کے دو خطوط مستقیم کھینچے جاسکتے ہیں۔ جب یہ دو خطوط منطبق ہوتے ہیں تو نقطہ (لا، ما) کو اس منحنی پر ہونا چاہیے جس کو تمام خطوط مس کرتے ہیں۔

پس اس منحنی کی مساوات جس کو نظام کے تمام خطوط مس کرتے ہیں یہ شرط لکھ لینے سے حاصل ہوگی کہ دو درجی (۱) کی دو اصلیں مساوی ہوں۔ اب (۱) کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$۲ل = لا = (ما-لا-ل)^۲ \quad (۲)$$

جو [دفعہ ۱۰۴] ایک مکانی کی مساوات ہے -
یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے کہ مکانی (۲) محوروں کو نقطوں
(ل'، ل) اور (ل'، ل) پر مس کرتا ہے -
اس طرح وہ تمام خطوط جو صفحہ (۱۸۶) کی شکل میں کیچے گئے ہیں ایک
مکانی کو مس کرتے ہیں -

مثال ۱ - خط مستقیم $ما = م لا + \frac{1}{م}$ کا لاف معلوم کرو -
مساوات کو لکھا جاسکتا ہے

(۱۳۳)

$ما - م لا = \frac{1}{م}$ (۱)
چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے لا اور ما کی کسی معلومہ قیمتوں کے
جواب میں م کی دو قیمتیں ہیں - پس نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے
گزرتے ہیں - جب م کی دو قیمتیں مساوی ہوتی ہیں تو خطوط منطبق ہوتے ہیں اور
(لا، ما) مطلوبہ لاف پر ہوتا ہے -
اب وہ شرط کہ (۱) کی دو اصلیں مساوی ہوں یہ ہے کہ
 $ما - م لا = \frac{1}{م}$

اور یہ مطلوبہ لاف ہے -

مثال ۲ - خط $لا لاجم طه + ب ما جب طه + ج =$ کا لاف معلوم کرو -
اس مساوات کو لکھا جاسکتا ہے

$$لا (لاجم طه - جب طه) + ۲ ب ما جب طه + ج (جم طه + جب طه) =$$

$$یا لا + ج + ۲ ب ما + (ج - لا) ت =$$

جہاں $ت = مس \frac{طه}{م}$ -

اس طرح نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں - یہ
خطوط منطبق ہوں گے اگر
(لا + ج) (ج - لا) - ب ما =

اس لیے لفاف ہے $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ج^۱$
 مثال (۳)۔ $خط ل + ل + م + م + ا = ۰$ کالفاف شرط $ل^۱ + ل^۲ + م^۱ + ج^۱ = ۰$ کے ساتھ معلوم کرو۔

$$ل + ل + م + م + ا = ۰ \text{ اور } ل^۱ + ل^۲ + م^۱ + ج^۱ = ۰ \text{ سے}$$

$$ل^۱ + ل^۲ + م^۱ + ج^۱ = ۰ \text{ (ل + ل + م + م + ا) = ۰}$$

ل کی دو قیمتوں سے نظام کے ان دو خطوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔

یہ دو خطوط منطبق ہوں گے اگر $ل$ کا مندرجہ صدر دو درجہ دو مساوی اصلیں رکھے جس کے لیے یہ شرط ہے کہ

$$(ل + ج + ل) = (ج + ل) = ج^۱ لا$$

$$\text{اس لیے مطلوبہ طریق } \frac{لا}{ل} + \frac{ما}{م} + \frac{ا}{ج} = ۰ \text{ ہے۔}$$

مثال (۴)۔ مکانی ما۔ لا۔ م کے کسی نقطہ ن کا معین ن ل ہے، مکانی کا اس ہے اور مستطیل ل ن م کی تکمیل کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ م ل کالفاف $لا + ل + م + ا = ۰$ ہے۔

مثال (۵)۔ ثابت کرو کہ اگر ان مقطعوں کا مجموعہ جو ایک متحرک خط محوروں پر قطع کرتا ہے مستقل رہے تو خط ایک مکانی کو لف کرے گا۔

مثال (۶)۔ ایک خط مستقیم کالفاف معلوم کرو جو محوروں کو علی الترتیب (۱۳۳) ف، ق، پ، راس طرح قطع کرتا ہے کہ مثلث و ف ق کا رقبہ مستقل رہتا ہے۔

مثال ۷۔ ایک مکانی کے ایسے وتر کالفاف جس کے سروں پر کے معینوں کا فرق مستقل رہے مساوی مکانی ہوتا ہے۔

مثال ۸۔ ایک مکانی کے وترن ق، ن م مساوی خطوط مستقیم کے

متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ ق مساوی مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۹۔ ایک کثیر الاضلاع کو ایک مکانی میں بنایا گیا ہے اور اس کثیر الاضلاع کے تمام اضلاع Δ ایک کے معلومہ خطوط مستقیم کے متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر اضلاع کی تعداد جفت ہے تو باقی ضلع بھی ایک ثابت خط مستقیم کے متوازی ہوگا لیکن اگر اضلاع کی تعداد طاق ہے تو باقی ضلع ایک مکانی کو لف کرے گا۔

مثال ۱۰۔ اگر دو ثابت نقطوں سے ایک متحرک خط پر عمود کھینچے جائیں اور ان عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ایک مکانی کو لف کرے گا۔

مثال ۱۱۔ مکانی Δ ۔ Δ لا = کے کسی نقطہ ن پر کا عمود محور کو گ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو گ میں سے گزرتا ہے اور ن پر کے ماس کے متوازی ہے ہم ماسکی مکانی Δ ۔ Δ لا = کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۲۔ ثابت کرو کہ ایک خط ف ق کا لف جو ایک مکانی کے کسی نقطہ ف میں سے اس طرح کھینچا گیا ہو کہ ف میں سے گزرنے والا قطر ف ق اور ف پر کے ماس کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے دوسرا مکانی مثال ۱۳۔ ایک دائرہ کے ایک وتر کا نقطہ وسطی ایک ثابت خط مستقیم پر ہے۔ ثابت کرو کہ یہ وتر ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۴۔ ایک مکانی کا ایک متغیر ماس ایک ثابت ماس کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو ن میں سے گزرتا ہے اور متغیر ماس پر عمود ہے ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۵۔ ایک دے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خط ن ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دے ہوئے مکانی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق کا لف ایک دوسرا مکانی ہے۔

مثال ۱۶۔ ایک دے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خط ن ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دے ہوئے مکانی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پر

عمود ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک دوسرا مکانی ہے۔

مثال ۱۷۔ ایک خط کا لفاف معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر دو نقطوں (۱، ۰) (۰، ۱) سے اس خط پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں مربعوں کا مجموعہ ۲ ج کے مساوی ہوتا ہے۔

جواب: $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$

مثال ۱۸۔ ثابت کرو کہ وہ خط مستقیم جو دو دے ہوئے دائروں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ وتر مساوی ہیں ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۹۔ و ما دو ثابت خط ہیں اور (۱) میں سے گزرتا ہے و ما کو علی الترتیب (۱۳۵)

نقطہ ہے۔ کوئی دائرہ جو و اور (۱) میں سے گزرتا ہے و ما کو علی الترتیب ف ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق ایک ثابت مکانی کا مماس ہے۔

مثال ۲۰۔ ایک خط جو نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور (مکانی م۱۔ ۱۴ = ۰ کے لحاظ سے) نقطہ ن کے قطبی پر عمود ہے ثابت نقطہ (ع، ی) میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا قطبی مکانی

(لا - ۱۲ + ع) = م۱ + ۲ = م۱

کو لف کرتا ہے۔

مثال ۲۱۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کا قطبی جبکہ دائرہ دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے دو مکانیوں

میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتا ہے۔

مثال ۲۲۔ ایک خط مستقیم دو دے ہوئے خطوط و ما کو نقطوں ف ق پر قطع کرتا ہے اور ف ق کا نقطہ وسطی ایک دے ہوئے خط پر ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۲۳۔ ف ق اور ف س مکانی م۱۔ ۱۴ = ۰ کے وتر ہیں جو م۱ = کو علی الترتیب نقطوں (ج، ۰) (ج، ۰) پر قطع کرتیں

ثابت کرو کہ ق س مکانی (ج + ج) = م۱ + ۲ = ۱۶ ج، ج لا کو لف کرتا ہے

مثال ۲۴۔ $MA = 2$ و LA کا ایک وتر متوازی ماسکی وتر کے طول کا گنا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر، مکانی $MA = 2$ و $(LA + LA)$ کو مس کرتا ہے جہاں $L = 1$ (۱-ک)۔

مثال ۲۵۔ مکانی $MA = 2$ و $LA = 1$ کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد، خط $MA = 1$ کے پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث 'ف' 'ق' 'س' کے اضلاع مکانی $LA = 2$ ۔ ک $MA = 1$ کو مس کرتے ہیں۔

پانچویں باب مثالیں

۱۔ ایک مکانی کے لحاظ سے ایک نقطہ و کے قطبی پر نقطہ و سے عمود کھینچا گیا ہے جو قطبی سے نقطہ م پر ملتا ہے اور محور کو گ پر قطع کرتا ہے۔ قطبی، محور کو ت پر قطع کرتا ہے اور و میں سے گزرنے والا محض منحنی کون ت پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقاط 'ت'، 'ف'، 'م'، 'گ'، 'ن' سب کے سب ایک دائرہ پر ہیں جس کا مرکز س ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ دو مکانی $MA = 1$ و $LA = 1$ ب م ایک دوسرے کو

زاویہ

$$\frac{1}{3} \text{ و } \frac{1}{3} \text{ ب م س} \\ \frac{1}{3} \text{ و } \frac{1}{3} \text{ ب م س} \\ (1 \text{ و } 1 \text{ ب م س})$$

پر قطع کریں گے۔

۳۔ اگر ایک مکانی کا ایک ماسکی وتر ن س ق ہو اور ن ا مرتب سے م پر ملے تو ثابت کرو کہ م ق مکانی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۴۔ ثابت کرو کہ اگر مکانی پر کے دو نقطوں کے معین ایک مستقل نسبت میں ہوں تو ان نقطوں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک

(۱۳۲)

مکانی ہے۔

۵۔ نقطہ ن سے مکانی ما۔ ۱۴ لا = ۰ کے دو تماس کھینچے گئے ہیں اور یہ تماس محور لا کے ساتھ زاویے ط^۱ ط^۲ بناتے ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو (۱) جبکہ مس ط^۱ + مس ط^۲ مستقل ہو اور (۲) جبکہ مس ط^۱ + مس ط^۲ مستقل ہو۔

۶۔ ایک مکانی کے ان دو تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جو ایک دوسرے کے ساتھ ۵۴° کا زاویہ بناتے ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مکانی کے دو تماس کسی ثابت تماس پر ایک مستقل طول قطع کریں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دوسرا مساوی مکانی ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک مکانی کے دو تماس جو علی الترتیب محور اور مرتب کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں لیکن علی القوام نہیں ہیں وتر تقاطع متقاطع ہوتے ہیں۔

۹۔ ایک مکانی کے وتر خاص پر کے کسی نقطہ سے اس کے سرور کے تماسوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو ان عمودوں کے پائین کو ملاتا ہے مکانی کو مس کرتا ہے۔

۱۰۔ اگر خط لا + لا = ۰ پر کے ایک نقطہ سے مکانی ما۔ لا = ۰ پر تماس کھینچے جائیں تو ان کے وتر تماس کے محاذی راس پر ایک قائمہ لویہ بنے گا۔

۱۱۔ ایک مکانی کے لحاظ سے ت کے قطبی پر ت سے عمود مت لکھنا لیا ہے جو محور سے صریح ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ت ل ت در مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکانی ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ اگر ت ل : ت در مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکانی ہوگا۔

۱۲۔ دو مساوی مکایوں کے محور متوازی ہیں اور ان کے راسوں پر کا تماس مشترک ہے۔ خطوط مستقیم کسی ایک محور کے متوازی

کیونچے گئے ہیں۔ ثابت کر دو کہ مستحقین کے درمیان ان غلطی کے جو حصے منقطع ہوتے ہیں ان کے نقاط وسطی کا طریق ایک مساوی مسکنی ہے۔

۱۳۔ دو مکافی ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور ان کے محور متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان مکافیوں کے دو نقطوں پر کے تماس ان کے مشترک تماس پر متقاطع ہوں تو ان کے نقاط تماس کو ملانے والا خط محور کے متوازی ہوگا۔

(144)

۱۴۔ دو مکانیوں کا محور وہی ہے۔ ایک مکانی کے نقطوں سے دوسرے مکانی کے تماس تکینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے مکانی کے وتر تماس کے وسطی نقطے ایک ثابت مکانی پر واقع ہوتے ہیں۔

۱۵۔ ایک مکانی کا ایک دتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔
ثابت کرو کہ دتر کے نقطہ وسطی کا طریق ایک مکانی ہے۔

۱۶۔ ایک وترن \hat{N} کا نقطہ وسطی ایک ثابت خط مستقیم پر ہے جو ایک مکانی گیسے محور پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ وتر کے قطب کا طریق دومہ مکانی ہے۔

۱۰۔ اگر ایک مکانی کے جس کا راس ۱ ہے دو ماس سے ق اور ت ق ہوں اور اگر خطوط ۱ ف، ۱ ت، ۱ ق (محدودہ بہ ضرورت) مرتب کو علی الترتیب ف، ت، اور ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ف ت ق۔

۱۸۔ اگر کسی نقطہ میں سے ایک مکانی لاقطر کسی دوسرے نقطہ پر لے اور اس دوتر کے سروں پر کے تماس قطر سے قی، قی پر ملیں تو ثابیت کر کے

۱۹۔ ایک مثلث کا راس ثابت ہے، قاعدہ کا طول مستقل ہے، اور قاعدہ ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کے مائلہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکافہ ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ دائرہ

$$= \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{5} r^5$$

کے لحاظ سے دائرہ

$$لَا + مآ - ۲۱ لا - ۳۱ =$$

پر کے کسی نقطہ کا قطبی مکانی

$$مآ + ۳۱ لا =$$

کو مس کرے گا۔

۲۱ — ن میں ن ایک مکانی کا ایک ماسکی وتر ہے، ن

کا نقطہ وسطی ط ہے اور ط و، ن ن پر عمود ہے اور محور کو و پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ س ن اور س ن کے درمیان س و اور ط و حسابی اور ہندسی اوسط ہیں۔

۲۲ — ایک مکانی کے تین ماسکی وتر ف، ق، س ق

س میں رہیں، ق س اس قطر سے جو ف میں سے گزرتا ہے (پر ملتا ہے) س ف اس قطر سے جو ق میں سے گزرتا ہے ج پر ملتا ہے، اور ف ق اس قطر سے جو ر میں سے گزرتا ہے ج پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ تین نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک خط مستقیم پر ہیں جو س میں سے گزرتا ہے۔

۲۳ — ایک مکانی کے متوازی وتروں کے نظام میں سے ایک

وتر ن ہے اور ن پر و ایک ایسا نقطہ ہے کہ مستطیل ن و

و ن مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک مکانی ہے۔

۲۴ — ایک مکانی کے نقطہ و میں سے گزرنے والے قطر پر دو نقطہ

ن، ن لئے گئے ہیں ایسے کہ و ن و ن مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ

اگر نقاط ن، ن سے مکانی کے ماس کھینچے جائیں تو ماسوں کے چار نقاط تقاطع دو ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں گے جو و پر کے ماس کے متوازی اور اس سے مساوی فاصلہ پر واقع ہوں گے۔

۲۵ — اگر ایک ذوا ربعة الاضلاع ایک مکانی کے گرد کھینچا جائے

تو اس کے وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا خط مکانی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۲۶۔ اگر ایک مکانی کے ایک ماسکی وتر پر کسی نقطہ سے دو حماس کھینچے جائیں تو یہ حماس ان حماسوں کے ساتھ مساوی میلان رکھیں گے جو ماسکی وتر کے سروں پر کھینچے گئے ہوں۔

۲۷۔ اگر ایک مکانی کے دو حماس ایک ثابت خط مستقیم کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو ثابت کرو کہ وتر حماس ایک ثابت نقطہ میں سے گزرنا چاہئے۔

۲۸۔ دو مکانی ایک مشترک حماس رکھتے ہیں اور ان کے محور حجاب سمتوں میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان میں سے ایک مکانی کے وتر دوسرے کو مس کرتے ہوئے کھینچے جائیں تو ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک دوسرا مکانی ہوگا۔

۲۹۔ ایک مکانی کے ایسے وتر کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو جسکے محاذی راس پر قائمہ زاویہ بنے۔

۳۰۔ مکانی ۲، ۳، ۴ کے عماد وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق

$$\frac{2}{12} + \frac{3}{12} = 12 - 11 = 1$$

۳۱۔ ایک مکانی کا ایک وتر ف ق ہے جو ف پر عماد ہے، اق کو راس ۱ سے کھینچا گیا ہے اور ف میں سے ایک خط، اق کے متوازی کھینچا گیا ہے جو محور سے کا پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس ف کے ماسکی فاصلہ کا دگنا ہے۔

۳۲۔ ایک مکانی کے متوازی وتر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان وتروں کے سروں پر کھینچے ہوئے حماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے، نیز عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق بھی ایک خط مستقیم ہے اور وتروں کی مختلف سمتوں کے لیے ان دو خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک مکانی ہے۔

۳۳۔ اگر ایک مکانی کے دو نقطوں پر کے عماد متضمنی پر تقاطع ہوں تو ان نقطوں کو ملانے والا خط محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔

۳۴۔ اگر ایک مکانی کے دو نقطوں پر کے عماد محور کے ساتھ زاویوں طہ، فیہ مائل ہوں اور سس طہ مس فہ = ۲ تو ثابت کرو کہ وہ مکانی پر قطع ہوں گے۔

۳۵۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو ایسے عماد کھینچے جاسکیں کہ محور کے ساتھ ان کے زاویے متکملہ ہوں ایک مکانی ہوگا۔

۳۶۔ ایک نقطہ ن سے مکانی کے عماد کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے دو عماد ایک دے ہوئے خط کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مکانی ہے۔

۳۷۔ ایک مکانی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملتا ہے ن گ کو ۵ تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ گ ۵ = ۱/۲ ن گ۔ ثابت کرو کہ نقطہ ھ میں سے گزرنے والے مکانی کے دوسرے دو عماد ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۳۸۔ ایک مکانی کے تین نقطوں ف، ق، س پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ س ن + س ق + س س + س ۱ = ۲

۳۹۔ ایک مکانی کے کوئی تین عماس مستقل رقبہ کا ایک مثلث بنائیں گے اگر محور کے ساتھ ان میلانوں کے عماس کسی دے ہوئے سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

۴۰۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو ایک مکانی کے تین عمادوں سے بنتا ہے

$$\frac{1}{2} (m_1 - m_2)(m_2 - m_3)(m_3 - m_1) (m_1 + m_2 + m_3)$$

۴۱۔ اگر ایک مکانی کا ایک عماس دو دے ہوئے متوازی خطوط مستقیم کو ف، ق پر قطع کرے تو ف، ق سے منحنی کے دوسرے دو عماسوں کے نقطہ تقاطع

کا طریق ایک مکانی ہوگا۔

۴۲۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث ایک مکانی کے گرد کھینچا جا تو ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مثلث کے کسی راس سے ماسکے تک کھینچے جاتیں مقابل کے ضلع کے نقطہ تماس میں سے گزریں گے۔

۴۳۔ $MA = 2$ اور $(LA + ج)$ پر کے کسی نقطہ سے $MA = ۴$ والا کے تماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط تماس پر اس مکانی کے عماد ایک ثابت خط مستقیم پر تقاطع ہوتے ہیں۔

۴۴۔ مکانی $MA = ۴$ والا کے ثابت نقطہ $(LA, ۴)$ میں سے وتر کھینچے گئے ہیں جو علی القوائم ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے دوسرے سروں کو ملانے والا خط ثابت نقطہ $(LA, ۴)$ میں سے گزرتا ہے۔ (۴۰)

۴۵۔ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک مکانی کا کوئی وتر کھینچا جائے اور وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دوسرا مکانی ہے۔

۴۶۔ اگر ایک نقطہ سے مکانی $MA = ۴$ والا کے تین عماد محور کو ایسے نقطوں پر قطع کریں جن کے فاصلے راس سے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ منحنی $MA = ۲$ اور $(LA, ۲)$ پر واقع ہے۔

۴۷۔ $MA = ۴$ والا کے عماد وتروں کے قطبوں کا طریق $(LA, ۲)$ ہے۔

۴۸۔ ایک مکانی کے کسی دو ماسکی وٹروں کو قطر مان کر دو دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مشترک وتر مکانی کے راس میں سے گزرتا ہے۔

۴۹۔ ایک دیے ہوئے مکانی کے دو تماس محور کے ساتھ ایسے زاوے بناتے ہیں کہ ان کے نصفوں کے ماسوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم ماسکی مکانی ہے۔

۵۰۔ اگر وہ دائرہ جو ایک مکانی کے وتر MA پر اس کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو مکانی کو مرکز نقطوں سے اس پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ MA کا

اور اس میں مکافی کے محور پر ایک مستقل طول قطع کرتے ہیں۔

۵۱۔ اگر ف، ق، س پر کے عماد نقطہ و پر تلیں اور ف، ق، س میں سے خلوط ف، ق، ق، س، س، کھینچے جائیں جو محور کے ساتھ مہی زاویے بنائیں جو ف، ق، و، س، و، علی الترتیب بناتے ہیں تو ثابت کر دو کہ ف، ق، ق، س، س، دوسرے نقطہ و میں سے گزرتے ہیں اور خط و، و کے قطبی برعمود ہے۔

۵۲۔ ایک مکانی کے عماد جو ف، ق، مرا پر کھینچے گئے ہیں نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $ف \times وق \times و = مرا \times ول \times و$ جہاں ول اور و مرا نقطہ و سے مکانی کے تماس ہیں اور مرا و وتر خاص کا طول ہے۔

۵۳۔ اگر ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ سے جہاں خط مستقیم ایک مکافی کے محور پر عمود ہے مکافی کے عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ اُس مثلث کے ضلعوں کے مربعوں کا مجموعہ جو ان عمادوں سے پائینوں کو ملانے سے بنتا ہے مستقل ہے۔

۵۴۔ ایک مکافی کے تین تماسوں سے ایک مثلث (ب ج بنایا گیا ہے، اور د سہرا مثلث د ع ف ان نقطوں کو ملانے سے بنایا گیا ہے جن پر دو نقاط تماس میں سے گزرنے والا وتر، تیسرے نقطہ تماس میں سے گزرنے والے قطر کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ د ع ف کے وسطی نقطے ا، ب، ج ہیں۔

۵۵۔ اگر ایک مثلث (ب ج کو ایک مکانی میں کھینچا گیا ہو اور (ب ج وہ مثلث ہو جو مثلث (ب ج کے ضلعوں کے متوازی تین مساوی سے بنا ہے تو ثابت کرو کہ (ب ج کے ضلع (ب ج کے متناظر ضلعوں کے جا رگنا ہوں گے۔

۵۶۔ اگر چار خطوط مستقیم ایک مکانی کوس کر میں تو ثابت کرو کہ ان میں سے دو کے نقطہ تقاطع اور دیگر دو کے نقطہ تقاطع کے فصلوں کے مربعوں کا حاصل ضرب چار نقاط تماس کے فصلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۵۷۔ ت سے ایک مکانی کے ماس ت ف اور ت ق ہیں اور کسی دوسرے ماس پر ف، ت، ق سے عمود طول میں علی الترتیب ع، ع، ع، ع ہیں۔ ثابت کرو کہ ع، ع، ع = ع، ع۔

۵۸۔ و سے ایک مکانی کے ماس و ا اور و ب ہیں اور متناظر عماد ا ف، ب ف ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ایک ثابت خط پر واقع ہو جو محور پر عمود ہے تو و ایک مکانی کو مرسم کرے گا۔ و کا طریق معلوم کرو اگر ف ایک ثابت قطر پر واقع ہو۔

۵۹۔ مکانی ما^۲ - ۱۴ = ۱۱۔ کے نقطہ ف پر عماد ا ف لگ ہے جہاں لگ محور پر ہے۔ لگ ف کو باہر وار نقطہ ق تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ف ق = لگ ف۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکانی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ف اور ق جن مکافوں پر واقع ہیں ان کے نقطوں ف اور ق پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق

$$ما^۲ - ۱۴ = ۱۱ + ۱۶ = ۲۷۔$$

۶۰۔ مکانی ما^۲ - ۱۴ = ۱۱۔ کا ایک وتر ثابت نقطہ (ع، ب) میں سے گذرتا ہے اور اس کے ہر سرے میں سے ایک خط مستقیم دوسرے سرے پر کے ماس کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان دو خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق مکانی

$$ما^۲ - ۶ = ۱۴ = ۱۱ - ۱۳ = ۳۔$$

۶۱۔ اگر ما^۲ - ۱۴ = ۱۱۔ کے نقطوں ف، ق، م پر کے عماد نقطہ (ع، ب) پر ملیں تو مثلث ف ق م کا مرکز عمودی (ع - ۱۶ - ۲) ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ ف ق م کا مرکز ہندی $\left\{ \frac{۲}{۳} (ع - ۱۲) ، ۰ \right\}$ ہے۔

۶۲۔ کسی نقطہ (ع، ب) سے مکانی ما^۲ - ۱۴ = ۱۱۔ کے تین عماد کھینچے

گئے ہیں اور ان کے پائینوں پر حماس کھینچ گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کے راسوں کے محدود جوان حماسوں سے بنے مساواتوں

$$\text{لا} + \text{لا} (\text{ع} - ۱۲) - ۱ = ۲ = ۰$$

$$\text{لا} - ۱ + \text{لا} (\text{ع} - ۱۲) + ۱ = ۲ = ۰$$

 سے حاصل ہوتے ہیں۔

۶۳۔ ایک مکانی پر کوئی تین نقطے 'ف'، 'ق'، 'س' ہیں۔ 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے گزرنے والے قطروں 'ف'، 'ق'، 'س'، 'س'، 'ف'، 'س'، 'ق'، 'س'، 'ف'، 'ق'، 'س' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق'، 'س'، 'ف'، 'ق'، 'س'، 'ف'، 'ق'، 'س'، 'ف'، 'ق'، 'س' پر ملتے ہیں۔
 ۶۴۔ ایک مکانی کے نقطہ 'ف' پر کا عماد محور کو گ پر قطع کرتا ہے اور 'ق'، 'س' پر کے عماد، 'ف'، 'ق' کے نقطہ وسطی میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق'، 'س'، 'ف' کے پائیں میں سے گزرتا ہے۔

۶۵۔ ایک مکانی کے نقطہ 'ف' سے مکانی کے دو عماد کھینچ گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمادوں اور 'ف' میں سے گزرنے والے قطر گئے درمیانی زاویوں کے ناصف اور 'ف' پر کا عماد ایک مستقیم پسل بناتے ہیں۔
 ۶۶۔ نقطہ (۱۳، ۰) میں سے گزرنے والا کوئی خط مکانی 'لا'، 'لا' = ۰ کو نقطوں 'ف'، 'ق' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جو 'ف'، 'ق' اور 'لا' میں سے گزرتا ہے مکانی کو مس کرتا ہے۔

۶۷۔ 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ہم نقطہ ہیں اور 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے گزرنے والے قطر سے مرتب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ق'، 'س'، 'ف' مکانی 'لا' + ۱۶ (لا + ۱) = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۶۸۔ مکانی 'لا' - ۴ = ۰ کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد، خط لا = ۰ پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث 'ف'، 'ق'، 'س' کے اضلاع مکانی 'لا' = ۱۶ (لا + ۱۲ - ۱) کو مس کرتے ہیں۔

۶۹۔ 'لا' - ۴ = ۰ میں ایک مثلث بنایا گیا ہے اور اس کے

دو اضلاع، α ۔ β (لا + ج) = کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کا لفظ معلوم کرو۔

۱۔ α ۔ β لا = کے نقطوں ق، س پر کے عماد مکانی سے نقطہ ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلث ف ق س کے مرکز عمودی کا طریق مکانی α = β (لا + ج) ہے اور (۲) حالت دائرہ کے مرکز کا طریق مکانی β ۔ α لا + ج = ہے۔

۱۔ اگر α ۔ β لا = کے کسی نقطہ سے مکانی α ۔ β لا = کے تماس کھینچے جائیں تو نقاط تماس پر کے عماد منحنی α (لا + ج) + β لا = (لا + ج) = پر ملیں گے۔

۲۔ مکانی α ۔ β لا = کا کوئی وتر ثابت نقطہ (ع، ی) میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا مرکز ہندسی جو وتر اور اس کے بیروں پر کے تماسوں سے بنتا ہے مکانی β ۔ α ۔ β لا + ج = کو مرسم کرتا ہے۔

۳۔ مکانی α ۔ β لا = میں مثلث ف ق س بنایا گیا ہے اور ف ق، ف س علی الترتیب نقاط (۰، α)، (۰، β) میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف ق، دائرہ لا + ج۔ α ۔ β لا = کو مس کرتا ہے۔

۴۔ α ۔ β لا = کا کوئی تماس خطوط α ۔ β (لا + ج) = اور α ۔ β (لا + ج) کو علی الترتیب ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق سے مکانی کے دوسرے تماس اس منحنی پر متقاطع ہوتے ہیں جس کی مساوات α (لا + ج) = β (لا + ج) = (ج م۔ α) (ج م۔ β) (لا + ج) = ہے۔

۵۔ ثابت کرو کہ α ۔ β لا = میں ایسے بیشمار مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو لا۔ β ۔ α کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔ نیز ثابت کرو کہ مثلثوں کے ہندسی مرکزوں کا طریق β ۔ α لا = ہے۔

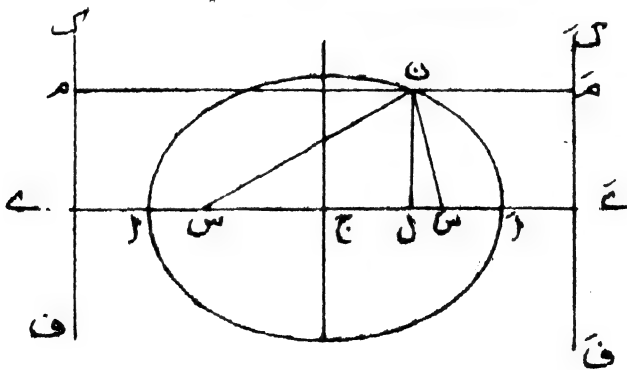
پہنچنا

قطع ناقص

(۱۴۴)

تعریف۔ قطع ناقص ایک نقطہ کا طریق ہوگا جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے کم ہوتی ہے۔ ثبات نقطہ کو ماسکہ اور ثابت خط کو مرتب کہتے ہیں۔

۱۰۹۔ ناقص کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ س ماسکہ اور ک ف مرتب ہے۔

سے ' مرتب پر عمود کھینچو۔
سے کو ' پر اس طرح تقسیم کرو کہ س : ا : اے = دی ہوئی
نسبت = ز : ا (فرض کرو)۔
سے میں مدد دہ میں ایک ایسا نقطہ (ہو گا کہ

س : ا : اے = ز : ا
فرض کرو کہ ' کا نقطہ وسطی ج ہے اور ا = ۲
تب ا س = ز x اے ' اور س ا = ز x اے ' \therefore
ا س + س ا = ز (اے + اے) \therefore
۲ ج = ۲ ز x اے ج \therefore

سے ج = $\frac{1}{2}$ (۱)
تیز س ا - س ا = ز (اے - اے) \therefore
یا ا - ۲ ا س = ز x ا ا

س ج = ز x ج = ا ز (۲)
اب فرض کرو کہ ج کو مہدار ' ج ' کو محور ' لا ' اور ج ' کے
عمود وار ایک خط کو محور مقرر دیا گیا ہے۔
فرض کرو کہ منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدود (لا، ما) ہیں۔
تب شکل میں

س ا ن = ز ' x ن م
س ل ا + ل ن = ز ' x لے ل
س ل = س ج + ج ل = ا ز + لا
س ل = لے = جے ج + ج ل = $\frac{1}{2}$ + لا

ن (ا ز + لا) + ما = ز (لا + $\frac{1}{2}$)

ما + لا (۱ - ز) = (۱ - ز) (۱ - ز)

یا (۳) $\frac{1}{2} = \frac{لا}{(۱-ز)^2} + \frac{ما}{(۱-ز)^2}$

لا = رکھنے سے $\pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - z^2}$ حاصل ہوتا ہے جس سے محور ماپر کے وہ مقطوعے حاصل ہوتے ہیں جو منحنی قطع کرتا ہے۔ اگر ان طولوں کو $\pm b$ لکھا جائے تو

$$b^2 = \frac{1}{4} (1 - z^2) \quad (۴) \dots \dots \dots$$

اور مساوات (۳) شکل

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad (۵) \dots \dots \dots$$

اختیار کرتی ہے۔
وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسک میں سے گذرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہوتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۵) میں $z = 0$ رکھنا چاہئے۔

تب $a = b^2 (1 - z^2) = \frac{b^2}{4}$ (۴) سے

اس لیے نیم وتر خاص کا طول $\frac{b^2}{4}$ ہے۔

۱۱۰۔ مساوات (۵) [دفعہ ۱۰۹] میں a کی قیمت b سے بڑی نہیں ہو سکتی کیونکہ اگر ایسا ہو تو لا منفی ہوگا، اسی طرح لا سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ پس قطع ناقص ایک ایسا منحنی ہے جو تمام سمتوں میں محدود ہوتا ہے۔

اگر لا عدداً a سے کم ہو تو a مثبت ہوگا اور لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے a کی دو مساوی اور مختلف علامت قیمتیں حاصل ہونگی۔ اس لیے محور لا منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اسی طرح اگر a عدداً b سے کم ہو تو لا مثبت ہوگا اور a کی کسی مخصوص قیمت کے لیے لا کی دو قیمتیں حاصل ہونگی جو مساوی اور

مختلف ابعلامت ہوں گی۔ اس لیے محور مامنحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطہ $س$ کے لیے ایسے جوائیں کہ $جس = مس$ اور $جس = مس$ جوائیں تو نقطہ $س$ بھی منحنی کا ماسکہ ہوگا اور $س$ میں سے گزرنیوالا وہ خط جو $جس$ پر عمود ہو متناظر مرتب ہوگا۔

اگر منحنی پر کوئی نقطہ $(لا، ما)$ ہو تو مجدد $(لا، ما)$ مساوی $\frac{لا}{2} + \frac{ما}{2} = کو$ پورا کریں گے اور یہ ظاہر ہے کہ ایسی صورت میں مجدد $(لا، ما)$ بھی مساوی کو پورا کریں گے اور اس لیے نقطہ $(لا، ما)$ بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطہ $(لا، ما)$ اور $(لا، ما)$ مرکز میں سے گزرنے والے ایک خط مستقیم ہیں اور مبداء سے مساوی فاصلوں پر ہیں۔ پس مبداء پر اس وتر کی تنصیف کرتا ہے جو اس میں سے گزرتا ہے اور اس لیے اس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں۔

وہ وتر جو ماسکوں میں سے گزرتا ہے محور اعظم کہلاتا ہے اور وہ وتر جو مرکز میں سے گزرتا ہے محور اعظم پر عمود ہوتا ہے محور اصغر کہلاتا ہے۔

۱۱۱۔ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا۔ (۱۲۷)

دفعہ ۱۰۹ کی شکل میں چونکہ $س = ز \times ن = م$ اس لیے

$$س = ز \times ل = ز(ج + ل) = ز(ل + ل) = ل + ل = ۲ل$$

$$نیز س = ز \times ل = ز(ج - ل) = ل - ل = ۰$$

$$س + ن = ۲ل$$

بعض اوقات ناقص کی یہ تعریف کی جاتی ہے کہ وہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

اس تعریف سے منحنی کی مساوات معلوم کرنا۔
فرض کرو کہ مستقل مجموعہ ۱۲ ہے۔ فرض کرو کہ دو ثابت نقطوں کے درمیان
فاصلہ ۱۲ ہے۔

ان ثابت نقطوں کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ کو مبداء قرار دو۔
فرض کرو کہ یہ خط اور اس کے عمود وار دو سرا خط محاور لا اور ما میں۔ تب
دی ہوئی شرط سے

$$۱۲ = \sqrt{(لا - ۱ز)^۲ + ما^۲} + \sqrt{(لا + ۱ز)^۲ + ما^۲}$$

اس کو منطبق بنانے سے $ما + لا (۱ز - ۱) = وا (۱ز - ۱)$
اور یہ وہی مساوات ہے جو سابق میں حاصل ہو چکی ہے۔
۱۱۲۔ ناقص کی قطبی مساوات جبکہ مرکز کو قطب کے طور پر

لیا جائے مساوات $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ میں لا کی بجائے رجم طہ اور
ما کی بجائے رجب طہ لکھنے سے حاصل ہوگی۔ اس لیے یہ مساوات

$$\frac{رجم طہ}{وا} + \frac{رجب طہ}{ب} = ۱$$

$$یا \quad \frac{۱}{ر} = \frac{رجم طہ}{وا} + \frac{رجب طہ}{ب}، \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اس مساوات کو شکل

$$(۲) \dots \dots \dots \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{وا} + \left(\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{وا}\right) رجب طہ، \dots \dots (۲)$$

میں لکھا جاسکتا ہے اب چونکہ $\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{وا}$ مثبت ہے ہم مساوات (۲)

سے دیکھتے ہیں کہ $\frac{۱}{ر}$ کی کم سے کم قیمت $\frac{۱}{وا}$ ہے اور $\frac{۱}{ر}$ بڑھتا ہے جیسے (۱۳۸)

طہ صفر سے $\frac{2}{3}$ تک بڑھتا ہے۔ نیز $\frac{1}{3}$ کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{1}{3}$ ہے۔ اس لیے سمتی نصف قطر $\frac{1}{2}$ سے ب تک گھٹتا ہے جیسے طہ صفر سے $\frac{2}{3}$ تک بڑھتا ہے۔
ہم معلوم کر چکے ہیں کہ ناقص پر کے تمام نقطوں کے لیے

$$0 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

اُس طریقہ پر جو دفعہ ۹۲ میں اختیار کیا گیا تھا یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر منحنی کے اندر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو $\frac{2}{3}$ $1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ منفی ہوگا اور اگر منحنی کے باہر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو $1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ مثبت ہوگا۔

۱۱۴۔ ایک ناقص اور ایک معلومہ خط مستقیم کے نقاط تقاطع معلوم کرنا اور وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط ایک ناقص کو مس کرے۔

[نوٹ: ہم آئندہ ناقص کی مساوات کو ہمیشہ $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

لینگے۔ لہٰذا آئندہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔]
فرض کر دو کہ خط مستقیم کی مساوات

ما = م لا + ج (۱)

اُن نقطوں پر جو خط مستقیم اور ناقص میں مشترک ہیں دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں۔ پس مشترک نقطوں پر

$$1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{(m^2 + a^2)}{b^2}$$

$$\text{یا } (b^2 + a^2 m^2) + 2m^2 a^2 + a^4 = (b^2 - a^2 m^2) \dots (2)$$

یہ ایک دو درجی مساوات ہے اور ہر دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں حقیقی، منطبق، یا خیالی۔
پس لاکھ دو قیمتیں ہیں اور ان کے جواب میں ماکھ دو قیمتیں مساوات (۱) سے حاصل ہوتی ہیں۔

مساوات (۲) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونگی اگر (۱۴۹)

$$a^2 (b^2 - a^2 m^2) = (b^2 + a^2 m^2) a^2$$

یعنی اگر $b^2 = a^2 + a^2 m^2$
لاکھ دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو (۱) کی رو سے
ماکھ دو قیمتیں بھی ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہئیں۔
پس وہ دو نقطے جنہیں ناقص خط مستقیم سے منقطع ہوتا ہے منطبق
ہوں گے اگر

$$b^2 = a^2 + a^2 m^2$$

اس لیے وہ خط جس کی مساوات

$$b^2 = a^2 + a^2 m^2 \dots (3)$$

ہے ماکھ تمام قیمتوں کے لیے ناقص کو مس کرے گا۔
چونکہ (۳) میں علامت جذر کے قبل مثبت یا منفی کوئی علامت

رکھی جاسکتی ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ m کی ہر قیمت کے لیے ناقص کے دو محاس ہیں یعنی کسی دے ہوئے خط مستقیم کے متوازی دو محاس ہوتے ہیں۔ یہ دو محاس ناقص کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں۔

۱۱۵۔ ناقص پر کے دو نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر کے محاس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص پر کے دو نقطوں کے محدد (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

$$\text{مساوات} \quad \frac{(لا-لا)(لا-لا)}{۲} + \frac{(ما-ما)(ما-ما)}{۲}$$

$$= \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ \dots\dots\dots (۱)$$

مختصر کرنے پر پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

اس مساوات میں اگر لا کی بجائے لا اور ما کی بجائے ما رکھا جائے تو دائیں جانبی رکن متماثل معلوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن بھی معلوم ہوتا ہے کیونکہ نقطہ (لا، ما) ناقص پر ہے۔

پس نقطہ (لا، ما) خط (۱) پر ہے اور اسی طرح (لا، ما) بھی اس خط پر ہے۔

اس لیے مساوات (۱) اس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرتا ہے۔

یہ مساوات شکل

$$\frac{(لا+لا)(لا+لا)}{۲} + \frac{(ما+ما)(ما+ما)}{۲} = ۱ + \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} \dots\dots\dots (۲)$$

میں لکھی جاسکتی ہے۔

(لا، ما) پر کے ماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات
(۲) میں لا = لا اور ما = ما رکھنا چاہئے مچنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$(۳) \dots\dots\dots '۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

نتیجہ صریح ۱۔ محور اعظم کے سروں کے محدود علی الترتیب (۱، ۰) اور (۰، ۱) ہیں اور (۳) سے ان نقطوں پر کے ماس لا = لا اور لا = لا ہیں۔

پس محور اعظم کے سروں پر کے ماس محور اصغر کے متوازی ہیں۔
اسی طرح محور اصغر کے سروں پر کے ماس محور اعظم کے متوازی ہیں۔
نتیجہ صریح ۲۔ نقطہ (لا، ما) پر کا ماس نقطہ (لا، ما) پر کے ماس کے متوازی ہوتا ہے اور یہ دو نقطے ایک خط مستقیم پر ہوتے ہیں جو مرکز میں سے گزرتا ہے۔

پس ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

۱۱۶۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص کو مس کرے۔

$$(۱) \dots\dots\dots '۰ = ل لا + م ما + ن$$

$$(۲) \dots\dots\dots '۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

کو جہاں قطع کرتا ہے ان نقطوں کو مبدا سے ملانے والے خطوں کی مساوات [دفعہ ۳۸]

$$(۳) \dots\dots\dots '۰ = \left(\frac{ل لا + م ما}{ن} \right) - \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

۷۔ - اگر خط مستقیم (۲) ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرے تو مساوات
 (۳) منطبق خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ اس لیے (۳) کا دائیں جانبی
 رکن ایک کامل مربع ہونا چاہیے، اس کے لیے شرط

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \quad (۱۵۱)$$

ہے۔ اس لیے مطلوبہ شرط ہے

۱. ۱ + ۲ = ۳ = ۱ + ۲ = ۳ (۴)
 نتیجہ صریح - خط لاجم عہ + مابجب عہ - ع = ناقص کو
 مس کرنے کا اگر

۱. ۱ + ۲ = ۳ = ۱ + ۲ = ۳ (۵)

۱۱۔ - ناقص کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔

ناقص کے کسی نقطہ (لا، ما) پر کے تماس کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲}$$

۷۔ - عماد وہ خط ہے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گذر کر تماس پر عمود ہوتا ہے۔
 اس لیے اس کی مساوات [دفعہ ۳۰]

$$\frac{(لا - لا)}{\frac{لا}{۱}} = \frac{ما - ما}{\frac{ما}{۲}}$$

-۷-

مثالیں

۱۔ - حسب ذیل ناقصوں کے خروج المرکز اور تماسوں کے محدد معلوم کرو۔

$$(۱) ۲\lambda^2 + ۳\lambda - ۱ = ۰, (۲) ۸(۱-\lambda) + ۶(۱+\lambda) - ۱ = ۰$$

$$\text{جواب: } \left(\frac{1}{\sqrt{12}} \pm ۱\right), \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}\right)$$

۲۔ مثال اکے ناقصوں کے وتر خاص کے طول معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } \frac{2}{3}\sqrt{۲۱} \text{ اور } \frac{1}{3}\sqrt{۶۱}$$

$$۳۔ \text{ثابت کرو کہ خط } \lambda + \frac{5}{4}\sqrt{۶۱} = ۰ \text{ ناقص } ۲\lambda + ۳\lambda = ۱ \text{ کو مس کرتا ہے۔}$$

$$۴۔ \text{ثابت کرو کہ خط } ۳\lambda = ۱ - ۳, \text{ منحنی } ۴\lambda^2 - ۳\lambda - ۲ = ۰ \text{ کو دو نقطوں پر جو محور } \lambda \text{ سے مساوی فاصلوں پر ہیں قطع کرتا ہے۔}$$

$$۵۔ \text{نقطہ } (۱, ۲) \text{ ناقص } ۲\lambda^2 + ۳\lambda - ۱ = ۰ \text{ کے باہر ہے یا اندر؟}$$

$$۶۔ \frac{\lambda^2}{۲} + \frac{\lambda^2}{۲} = ۱ \text{ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور (۱۵۲)}$$

لا کے ساتھ ۶۰ کا زاویہ بناتے ہیں۔

$$۷۔ ۲\lambda^2 + ۳\lambda = ۶ \text{ کے وتر خاص کے سروں پر کے (۱) مماسوں کی مساواتیں اور (۲) عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔}$$

$$\text{چار نقطے } (1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{۳}) \text{ ہیں۔}$$

$$۸۔ \frac{\lambda^2}{۲} + \frac{\lambda^2}{۲} = ۱ \text{ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور پر مساوی مقطوعے قطع کرتے ہیں۔}$$

$$\text{جواب: } \lambda \pm \sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۰$$

$$۹۔ \text{ثابت کرو کہ مساوات } ۴\lambda^2 + ۲\lambda - ۶ = ۰ \text{ ایک ناقص کو تعبیر}$$

کرتی ہے جس کا خروج مرکز $\frac{1}{4}$ ہے اور ثابت کرو کہ مبدا محور اصغر کے ایک

سرے پر ہے۔
۱۰۔ اس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(-1, 1)$ مرتب
۴ لا۔ ۳ ما۔ ۰ اور خروج مرکز $\frac{5}{4}$ ہے۔

جواب: $20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 = 141$
۱۱۔ اگر ایک ناقص کے وتر خاص کے سرے پر کا عماد محور اصغر کے
ایک سرے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ نخعی کا خروج مرکز مساوات ۲
۴ لا۔ ۱۔ ۰ سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۲۔ اگر کسی متعین من کو خارج کیا جائے اور وہ من میں سے گزرتو
وتر خاص کے سرے پر کے ماس سے ق پر لے تو ثابت کرو کہ ق کا معین فاصلہ
من کے مساوی ہے۔

۱۳۔ معلوم طول کے ایک خط مستقیم کے سرے، دو ثابت خطوط مستقیم
و ۱، و ۲ پر ہیں جو علی التعمد قائم ہیں۔ ثابت کرو کہ خط ۲ کے کسی نقطہ ج کا طریق
ایک ناقص ہے جس کے نیم محور علی الترتیب ج ۱ اور ج ۲ کے مساوی ہیں
۱۴۔ ایک ناقص کا کوئی ماس محور اعظم کے سرے پر کے ماسوں سے
نقطوں ت، ت پر منقطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ت ت
ہے ماسوں میں سے گزرے گا۔

[کیونکہ $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰$ ، خط لا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں

$$= \frac{ب}{۲} (۱ - \frac{لا}{۲}) \text{ اور خط لا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں } = \frac{ب}{۲} (۱ + \frac{لا}{۲})$$

پس وہ دائرہ جس کا قطر ت ت ہے

$$= \{ (۱ - \frac{لا}{۲}) + (۱ + \frac{لا}{۲}) \} \{ \frac{ب}{۲} - ما \} \{ \frac{ب}{۲} - (۱ + \frac{لا}{۲}) \} = ۰$$

ہے جو ما = کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں

$$لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ = (لا^۲ - لا^۲) = ۰$$

یعنی

$$لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ = ۰ \text{ کیونکہ } (لا^۲ - لا^۲) \text{ ناقص پر ہے۔}$$

۱۱۸۔ کسی نقطہ سے ایک قطع ناقص کے دو تماس کیجئے جاسکتے

(۱۵۳)

ہیں جو حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں گے بموجب اس کے کہ نقطہ

منحنی کے باہر، اس کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

وہ خط جس کی مساوات

$$ما = لا + \sqrt{لا^۲ + ما^۲} \text{ (۱)}$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ [دفعہ ۱۱۸]۔
خط (۱) خصوص نقطہ (لا، ما) میں سے گزرے گا اگر

$$ما = لا + \sqrt{لا^۲ + ما^۲}$$

$$(ما - لا) = \sqrt{لا^۲ + ما^۲} - لا$$

یعنی اگر

$$ما^۲ (لا^۲ - لا^۲) - ۲ لا ما + ما^۲ = ۰ \text{ (۲)}$$

یا

مساوات (۲) م میں ایک دو درجی مساوات ہے اور اس سے
ناقص کے اُن تماسوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے
گزرتے ہیں۔ چونکہ دو درجی مساوات کی اصلیں دو ہوتی ہیں اس لیے دو

تماس نقطہ (لا، ما) میں سے گزریں گے۔
مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہیں بموجب اسکے کہ

$$(لا^۲ - لا^۲) (ما^۲ - ما^۲) - لا^۲ ما^۲$$

منفی، صفر، یا مثبت ہو، یا بموجب اس کے کہ $\frac{لَا}{ر_1} + \frac{مَآ}{ر_2} = ۱$ - مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنی بموجب اس کے کہ نقطہ (لَا، مَآ) ناقص کے باہر، اسکے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

۱۱۹۔ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے دو ماس کھینچے گئے ہیں۔

ان ماسوں کے نقاط ماس کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ لَا، مَآ اس نقطہ کے محدود ہیں جس سے ماس کھینچے گئے ہیں۔
فرض کرو کہ ماسوں کے نقاط ماس کے محدود (مَک، مَک) اور (مَک، مَک) ہیں۔

(۱۵۴)

$$۱ = \frac{مَک}{ر_1} + \frac{لَا}{ر_2}$$

$$۱ = \frac{مَک}{ر_1} + \frac{لَا}{ر_2}$$

اور

ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ (لَا، مَآ) ان دونوں ماسوں پر ہے۔

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{مَک}{ر_1} + \frac{لَا}{ر_2}$$

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \frac{مَک}{ر_1} + \frac{لَا}{ر_2}$$

اور

لیکن (۱) اور (۲) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (مَک، مَک) اور (مَک، مَک) دونوں اس خط مستقیم پر ہیں جس کی مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots ۱ = \frac{مَک}{ر_1} + \frac{لَا}{ر_2}$$

ہے۔ پس (۳) اس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لا، ما) سے کھینچے ہوئے
ماسوں کے نقاط تماس کو ملاتا ہے
اگر کسی نقطہ ن سے ایک ناقص کے دو ماس کھینچے جائیں تو
ان ماسوں کے نقاط تماس کو ملانے والے خط کو ناقص کے لحاظ سے نقطہ
ن کا قطبی کہا جاتا ہے۔

۱۲۰۔ اگر ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی نقطہ ق
میں سے گزرے تو نقطہ ق کا قطبی ن میں سے گزرے گا۔
اس کو ٹھیک اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸ میں
ثابت کیا گیا تھا۔

۱۲۱۔ ایک ناقص کے ایسے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا
طریق معلوم کرنا جو باہم علی القوائم ہوں۔
وہ خط جس کی مساوات

$$m = m_1 + \sqrt{m_1^2 + b^2} \dots \dots (1)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔
اگر ہم لا اور ما کو معلومہ فرض کریں تو اس مساوات سے ان
ماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔
اس مساوات کو منطبق بنانے پر وہ

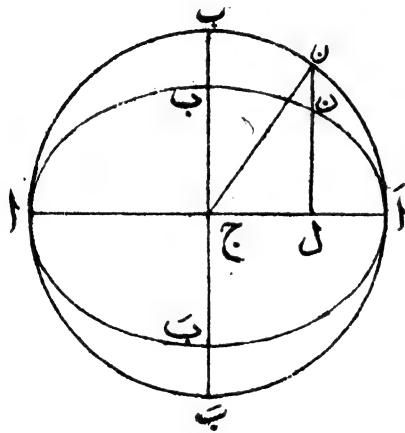
$$m_1 (لا - لا_1) - m_2 (لا - لا_2) + m_3 (لا - لا_3) = 0 \dots \dots (2)$$

ہو جاتی ہے۔
فرض کرو کہ (۲) کی اصلیں م، اور م ہیں، تب اگر ماس علی القوائم
ہیں تو م، م، = ۱ اور اس لیے

$$1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

یا $a^2 + b^2 = a^2$ (۳)

اس لیے مطلوبہ طریق ایک دائرہ ہے۔
 اس دائرہ کو ناقص کا مرتبہ دائرہ کہتے ہیں۔
 ۱۲۲۔ وہ دائرہ جو ایک ناقص کے محور اعظم پر اس کو قطر مان کر
 کھینچا گیا ہو امدادی دائرہ کہلاتا ہے۔



اگر ناقص کی مساوات $1 = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2}$ (۱)

ہو تو امدادی دائرہ کی مساوات $1 = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2}$ (۲)

ہوگی۔
 اس لیے اگر ناقص کے کسی معین N کو خارج کیا جائے اور
 وہ امدادی دائرہ سے N پر ملے تو (۱) اور (۲) سے

(۱۵۶)

$$\frac{\text{ل ن}}{\text{ب}} = ۱ - \frac{\text{ج ل}}{\text{ا}} = \frac{\text{ل ن}}{\text{ا}}$$

$$\frac{\text{ل ن}}{\text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

پس ناقص کے اور دائرہ کے معین ایک دوسرے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں۔

زاویہ ۱۲۱ ج ن کو نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ کہتے ہیں۔ المری دائرہ کے نقطہ ن کو ناقص کے نقطہ ن کا جواب کہتے ہیں۔ اگر زاویہ ۱۲۱ ج ن، فہ ہو تو ن کے محدود حجم فہ، جب فہ ہوں گے اور ن کے محدود حجم فہ، ب جب فہ ہوں گے۔

۱۲۳۔ دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے دئے گئے ہیں۔ ان کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ان دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے طہ، طہ ہیں، تب ان کے محدود علی الترتیب ا حجم طہ، ب جب طہ اور ا حجم طہ، ب جب طہ ہیں۔

پس ان کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\left[\begin{array}{c} \text{ا} \\ \text{ب جب طہ} \\ \text{ب جب طہ} \end{array} \right] = ۰ \quad \left[\begin{array}{c} \text{ا} \\ \text{ا حجم طہ} \\ \text{ا حجم طہ} \end{array} \right]$$

ہے۔

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} (\text{جب طہ} - \text{جب طہ}) + \frac{\text{ا}}{\text{ب}} (\text{حجم طہ} - \text{حجم طہ}) - \text{جب طہ} - \text{جب طہ} = ۰$$

اس کو جب $\frac{۱}{۲} (\text{طہ} - \text{طہ})$ سے تقسیم کرنے پر مساوات

$\frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{طہ} + \text{طہ}) + \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} (\text{طہ} + \text{طہ}) = \frac{1}{2} \text{ جم} - \frac{1}{2} (\text{طہ} - \text{طہ}) \dots (1)$
 حاصل ہوتی ہے جو مطلوبہ مساوات ہے۔
 طہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۱) میں $\text{طہ} = \text{طہ}$ رکھنا ہو گا چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{1}{2} \text{ جم } \text{طہ} + \frac{1}{2} \text{ جب } \text{طہ} = 1 \dots \dots \dots (2)$
 ۱۲۴۔ دفعہ سابق کی مساوات (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ناقص دو نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ مستقل ہو اور ۲۰۰ کے مساوی ہو تو ان نقطوں کو ملانے والا وتر ہمیشہ خط

(۱۵۷)

$\frac{1}{2} \text{ جم } \text{عہ} + \frac{1}{2} \text{ جب } \text{عہ} = 1$
 کے متوازی ہوتا ہے۔ یعنی وتر ہمیشہ اس نقطہ پر کے مماس کے متوازی ہوتا ہے جس کا خارج المرکز زاویہ عہ ہے۔
 اس کے بالعکس ایک ناقص کے متوازی وتروں کے نظام کے لیے کسی وتر کے سروں کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

۱۲۵۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات اس نقطہ کے خارج المرکز زاویہ کی رقوم میں معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے۔
 ن پر کے مماس کی مساوات (دفعہ ۱۲۳)
 $\frac{1}{2} \text{ جم } \text{طہ} + \frac{1}{2} \text{ جب } \text{طہ} = 1$

ہے۔ اس خط کی مساوات جو نقطہ (۱، جم ط) ب جب ط میں سے گذرتا ہے اور ماس پر عمود ہے [دفعہ ۳۰ کی بموجب]

$$(لا، ۱، جم ط) - \frac{۱}{جم ط} - (ما، ب جب ط) \frac{ب}{جم ط} = ۰$$

$$یا \quad \frac{۱}{جم ط} - \frac{ب}{ب جب ط} = \frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ب}$$

ہے۔ اگر ط، ط، پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع (لا، ما) ہو تو

$$\frac{لا}{۱} - \frac{جم ط}{ب} + \frac{ما}{ب جب ط} = ۱$$

$$اور \quad \frac{لا}{۱} - \frac{جم ط}{ب} + \frac{ما}{ب جب ط} = ۱$$

$$پس \quad \frac{لا}{۱} = \frac{ب جب ط - جم ط}{ب جب ط} = \frac{جم ط - ۱}{جم ط} = \frac{جم ط - ۱}{جم ط} = \frac{جم ط - ۱}{جم ط}$$

$$اور \quad \frac{ما}{ب} = \frac{جم ط - ۱}{ب جب ط} = \frac{جم ط - ۱}{ب جب ط} = \frac{جم ط - ۱}{ب جب ط}$$

[یا چونکہ وتر (ط، ط) نقطہ (لا، ما) کا قطبی ہے اس لیے دفعہ ۱۲۳ کی مساوات (۱) وہی ہے جو

$$۰ = ۱ - \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

ہے۔ پس اوپر کا نتیجہ فوراً لکھ لیا جاسکتا ہے]

ط، ط، پر کے عمودوں کے نقطہ تقاطع کے عمود

$$لا = \frac{ب^۲ - ا^۲}{ا} \times \frac{جم طہ جم طہ جم ۱}{جم (طہ + طہ) (طہ - طہ)}$$

$$ما = \frac{ب^۲ - ا^۲}{ا} \times \frac{جب طہ جب طہ جب ۱}{جم (طہ + طہ) (طہ - طہ)}$$

حاصل ہوں گے۔

مثال - متوازی وتروں کے ایک نظام کے سروں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا۔
چونکہ طہ + طہ = مستقل = ۲ ع (فرض کرو)
اس لیے اوپر کی مساواتوں سے

$$\frac{لا}{جم ع} + \frac{ب}{جب ع} = (ب^۲ - ا^۲) \frac{جم ۲ ع}{جم (طہ + طہ) (طہ - طہ)} \dots (۱)$$

$$اور \frac{لا}{جم ع} - \frac{ب}{جب ع} = (ب^۲ - ا^۲) \frac{جم (طہ - طہ)}{جم (طہ + طہ) (طہ - طہ)}$$

$$= (ب^۲ - ا^۲) \left\{ \frac{جم ۲}{جم (طہ + طہ) (طہ - طہ)} - \frac{۱}{جم (طہ + طہ) (طہ - طہ)} \right\}$$

پہلی مساوات سے جم ۱ (طہ - طہ) کی بجائے اندراج کرو تو کچھ اختصار کے بعد مساوات
 $لا + ۲ ب لا ا ق م ۲ ع + ب^۲ ا = (ب^۲ - ا^۲) جم ۲ ع$
 حاصل ہوگی۔

۱۲۶ - اب ہم ناقص کے بعض ہندسی خواص ثابت کریں گے۔
 فرض کرو کہ ن پر کا ماس محوروں لا اور ما سے علی الترتیب
 نقطوں سے مت پر ملتا ہے۔

اور فرض کرو کہ عماد محوروں سے نقطوں گ، گ پر ملتا ہے۔ ن پر کے
عماد پر سے، س سے، ج کے عمود کھینچو۔ نیز ج ع کو ن پر کے
ماس کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ عماد سے ف پر ملتا ہے اور ماس کی
فاصلہ س ن سے ع پر ملتا ہے۔

تب اگر نقطہ ن کے محدوداً، آ ہوں تو ن پر کے ماس کی مساوات

$$(۱) \quad \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$$

ہوگی۔ یہ ماس محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = ۰ اور اس نقطہ پر
(۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ = \frac{لا}{ا}$$

$$\text{ج ل} \times \text{ج ت} = \frac{\text{ج ل} \times \text{ج ت}}{\text{ج}} = ۱ \text{ یا ج ل} \times \text{ج ت} = \text{ج}^۲ \dots (۲)$$

اسی طرح ل ن × ج ت = ج ب، (۳)

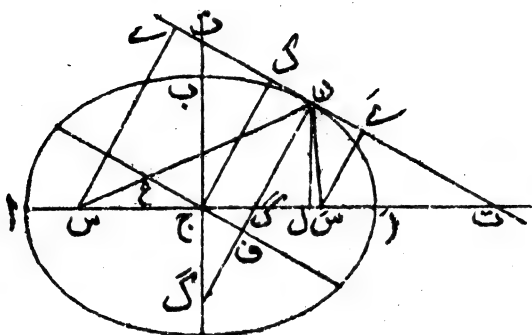
ن پر کے عماد کی مساوات

$$(۲) \quad \frac{لا - لا}{ا} = \frac{ما - ما}{ب}$$

ہے۔ یہ عماد محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = ۰ اور اس لیے (۲)

$$لا - لا = \frac{ب}{ا} \text{ یا } لا = لا = (۱ - \frac{ب}{ا}) \times لا$$

$$\text{ج گ} = \text{ن ز} \times \text{ج ل} \dots (۴)$$



نیز چونکہ $سگ = س + ج + جگ = وز + زلا$ ، اور $گس = وز - زلا$

اس لیے $نگ$ ، زاویہ $سن$ کی تصنیف کرتا ہے.... (ضہ)

پھر چونکہ $نگ = گل + لن = (جگ - ج) + لن$

$$نگ^2 = گ^2 + ل^2 + 2گل = (جگ - ج)^2 + لن^2 + 2(جگ - ج)لن$$

$$نگ = \sqrt{\frac{جگ^2}{ب^2} + \frac{ل^2}{ب^2} + 2\frac{جگ - ج}{ب}ل}$$

$$نگ = \sqrt{\frac{جگ^2}{ب^2} + \frac{ل^2}{ب^2} + 2\frac{جگ - ج}{ب}ل}$$

$$نگ = ج = \frac{1}{\left(\frac{جگ^2}{ب^2} + \frac{ل^2}{ب^2} + 2\frac{جگ - ج}{ب}ل\right)} \quad (دفعہ ۳۱) \quad (۱۶۰)$$

ن ف x ن گ = ب^۲، اور ن ف x ن گ = ز^۲.... (صہ)
وہ خط جس کی مساوات

$$م = لا + \sqrt{ز^۲ + م^۲ + ب^۲} \dots\dots\dots (۳)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس اگر اس خط پر
ماسکوں سے عمود سے 'سے' کے کھینچے جائیں تو [دفعہ ۳]

$$سے = \frac{م + ز + \sqrt{ز^۲ + م^۲ + ب^۲}}{\sqrt{م^۲ + ۱}} \text{ اور } سے = \frac{م + ز + \sqrt{ز^۲ + م^۲ + ب^۲}}{\sqrt{م^۲ + ۱}}$$

$$سے سے x سے = \frac{ز^۲ + م^۲ + ب^۲ - م^۲ - ۱}{م + ۱} \dots\dots\dots (طہ)$$

پھر اس خط کی مساوات جو جس میں سے گذرتا ہے اور (۳) پر عمود ہے

$$م + ما + لا + ز = ۰ \dots\dots\dots (۴)$$

ہے۔

(۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع سے کا طریق معلوم کرنے کے لیے م کو
ان دو مساواتوں سے ساقط کرنا چاہئے۔ یہ مساواتیں شکل

$$م = لا + \sqrt{ز^۲ + م^۲ + ب^۲} \text{ اور } م + ما + لا = -ز$$

میں لکھی جاسکتی ہیں۔ ان مساواتوں کی طرفین کا مربع لیکر جمع کرو تو حاصل ہوگا

$$(لا + ما)(ما + ۱) = ز^۲ + م^۲ + ب^۲ + ز^۲ = ز^۲(۱ + م)$$

اس لیے سے کا طریق امدادی دائرہ ہے جس کی مساوات

$$لا + ما = ز^۲ \dots\dots\dots (ظہ)$$

ہے۔

پس یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم یہ فرض کرتے کہ سے سے عمود کھینچا گیا ہے۔

۱۲۷۔ فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے اور فرض کرو کہ ن کا قطبی ق ق ہے۔ فرض کرو کہ ق ق محوروں سے ت ت پر ملتا ہے۔ اس سے 'ج ج' اور 'ن و' کو ق ق پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ ن و محوروں سے 'گ گ' پر ملتا ہے۔ تب اگر ن کے محدودا، ماہوں تو ق ق کی مسادات [دفعہ ۱۱۹]

$$(۱) \dots\dots\dots 'ا = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

(۱۶۱) ہوگی۔ اس لیے ن و گ کی مسادات [دفعہ ۱۳۰]

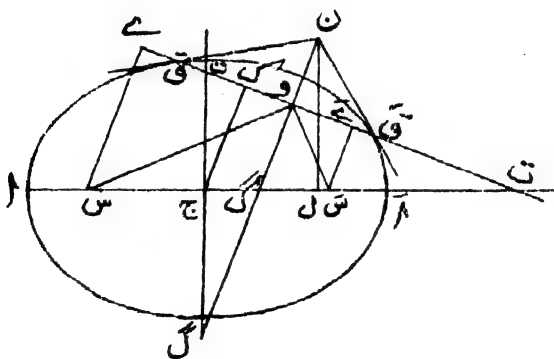
$$(۲) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{\frac{لا}{ب}} = \frac{ما - ما}{\frac{ما}{ب}}$$

ہوگی۔

(۱) اور (۲) سے پچھلی دفعہ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(ع) ج ل × ج ت = ج ا (یہ) ل ن × ج ت = ج ب

(ج) ج گ = ز × ج ل اور (ض) گ ج × ن گ = ب



مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کا ماسکہ، تناظر مرتب کا قطب ہوتا ہے۔
 ۲۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے ایک تماس پر مرکز سے عمود گرایا جائے تو عمود کے پائین کے طریق کی مساوات $z = \frac{1}{2} \text{و} \frac{1}{2} \text{ب}^2 \text{ب}^2$ ہوگی۔
 ۳۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کوئی دو قطر جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں لیے جائیں تو ان کے مربعوں کے مکافیوں کا مجموعہ مستقل ہوگا۔
 [دیکھو دفعہ ۱۱۲]۔

۴۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کو ایک ناقص میں بنایا جائے تو ثابت کرو کہ منہلوں کے متوازی قطروں کے مکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوگا۔
 ۵۔ ایک ناقص دو خطوط مستقیم کے درمیان جو باہم علی القوائم ہیں پھیلتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔ [دیکھو دفعہ ۱۲۱]
 ۶۔ اگر ایک ناقص کے محور اصغر پر دو ایسے نقطے $س$ لیے جائیں کہ $س ج = ج د = ج ح$ جہاں ج مرکز اور $س$ ماسکہ ہے تو ثابت کرو کہ ناقص کے کسی تماس پر $س$ اور $د$ سے عمودوں کا مجموعہ مستقل ہے۔
 ۷۔ ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج مرکز زوایوں کا فرق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ان نقطوں پر کے تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔
 [اگر $د$ اور $د$ ۔ عہ پر کے تماس (لا، نا) پر ملیں تو $\frac{1}{1} = \text{ج} \text{فہ} \text{قط} \text{عہ}$]

$\frac{ب}{ا} = \text{ج} \text{فہ} \text{قط} \text{عہ}$ ۔ طریق مائل کرنے کے لیے ذہ کو ساقل کرو۔]

۸۔ ایک نقطہ ن کا قطبی محور اصغر کو ت پر قطع کرتا ہے اور ن سے قطبی پر کا عمود قطبی کو و پر قطع کرتا ہے اور محور اصغر کو گ پر۔ ثابت کرو کہ ت و گ میں سے گزرنے والا دائرہ ماسکوں میں سے گزرنے لگا۔

[ثابت کرو کہ $t \times ج = ج \times ج = ج \times ج$]

۹۔ ثابت کرو کہ خط $ل + م + ن = ۰$ ، منحنی

$$۱ = \frac{ل}{ب} + \frac{م}{ب}$$

$$\frac{۲}{ن} (ل - م) = \frac{ل}{ب} + \frac{م}{ب} \quad \text{کا عادی ہے اگر}$$

$$\left[\frac{ل}{ب} - \frac{م}{ب} = \frac{ل}{ب} - \frac{م}{ب} \right] \quad \text{جم ط} = \frac{ل}{ب} - \frac{م}{ب}$$

$$= \frac{ن}{ب} \quad \text{پھر ط کو ساقط کرو۔}$$

۱۰۔ ایک ناقص کے ماسکہ سے (جس کا مرکز ج ہے) کسی نقطہ ن کے قطعی پر عمود ڈالا جائے تو یہ عمود خط ج ن سے مرتب پریں گا۔

۱۱۔ اگر ایک ناقص کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ماسکوں میں 'ع' کے عمودی فاصلے 'ق' پر کے عادی سے علی الترتیب میں ن اور ه ن کے مساوی ہوں گے۔

۱۲۔ اگر ایک ناقص کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے عادی ایک ثابت دائرہ پر ملتے ہیں۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص میں بنائے ہوئے مثلث کا رقبہ

$$\frac{۱}{۲} \{ جب (ب-ج) + جب (ج-ع) + جب (ع-ب) \}$$

$$= \frac{۱}{۲} \{ جب (ب-ج) + جب (ج-ع) + جب (ع-ب) \}$$

ہے جہاں 'ع'، 'ج'، 'ب' مثلث کے راسوں کے خارج المکرز زاوے ہیں۔

۱۲۸۔ ایک ناقص کے متوازی وتروں کے نظام کے تقاطع

وسطی کا طریق معلوم کرنا۔

(۱۶۳)

اُس وتر کی مساوات جو نقطوں طہ، اور طہ کو ملاتا ہے۔

$$\frac{لا}{۱} \text{ جم } \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) + \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) = \text{جم } \frac{۱}{۲} (طہ - طہ)$$

ہے۔ اگر یہ وتر، ما - م لا = ۰ کے متوازی ہے تو

$$م = - \frac{ب}{۱} \text{ مم } \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) \quad (۱) \dots\dots\dots$$

لیکن اگر وتر کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے تو

$$۲ لا = ۱ (جم طہ + جم طہ) = ۲ جم \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) \text{ جم } \frac{۱}{۲} (طہ - طہ)$$

اور $۲ ما = ۲ ب (جم طہ + جم طہ) = ۲ ب جب \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) \text{ جم } \frac{۱}{۲} (طہ - طہ)$

$$\text{پس } \frac{ما}{لا} = \frac{ب}{۱} \text{ مس } \frac{۱}{۲} (طہ + طہ)$$

$$= - \frac{ب^۲}{لا م} \quad (۱) \text{ سے}$$

اس لیے اُن تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق جو خط ما = م لا کے متوازی ہیں وہ خط مستقیم ہے جس کی مساوات

$$ما = - \frac{ب^۲}{لا م} \quad (۲) \dots\dots\dots$$

ہے۔ (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ناقص کے تمام قطر (دفعہ ۱۰۲، تعریف) مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

مساوات (۲) کو شکل ما = م لا میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$م م = - \frac{ب^۲}{لا م} \quad (۳) \dots\dots\dots$$

رشتہ (۳) کے تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ وہ تمام وتر جو $\text{م} = \text{م لاک}$ متوازی ہیں خط $\text{م} = \text{لا}$ سے تنصیف ہوتے ہیں۔

پس اگر ناقص کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی و ترونگی تنصیف کرے تو یہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی و تروں کی تنصیف کرے گا۔

تعریف: دو قطر مزدوج کہلاتے ہیں جبکہ ہر ایک دوسرے کے متوازی و تروں کی تنصیف کرے۔

۱۲۹۔ کسی قطر کے ایک سرے پر کا ماس اُن و تروں کے

(۱۶۴)

متوازی ہوتا ہے جو اس قطر سے تنصیف ہوتے ہیں۔

متوازی و تروں کے نظام کے تمام نقاط وسطی ایک قطر پر ہوتے ہیں۔ اس لیے متوازی ماسوں پر یعنی اُن متوازی و تروں پر جو ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ غور کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متوازی و تروں کے نظام کے نقاط وسطی کا قطر اُن ماسوں کے نقاط تماس میں سے گذرتا ہے جو و تروں کے متوازی ہیں۔

مثال ۱۔ ناقص کے ایک قطر کے کسی نقطہ کا قطبی مزدوج

قطر کے متوازی ہوتا ہے۔

کیونکہ (لا، مآ) میں سے گذرنے والا قطر

$$\text{لا} - \text{مآ} = ۰$$

اور (لا، مآ) کا قطبی

$$\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{مآ}}{۲} = ۱$$

ہے۔ یہ مساواتیں شرط $m = \frac{b^2}{a}$ کو پورا کرتی ہیں کیونکہ

$$m = \frac{a}{b} \quad \text{اور} \quad m = \frac{b^2}{a}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ناقص کے ایک وتر کا وسطی نقطہ (لا، ما) ہے تو

یہ وتر نقطہ (لا، ما) کے قطبی کے متوازی ہے۔

اس لیے اس وتر کی مساوات جس کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے

$$0 = \frac{a}{b} (a - m) + \frac{a}{b} (a - m)$$

۲۔ مثال۔ اگر ایک ناقص کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں تو ان کے نقاط وسطی دوسرے ناقص پر ہوں گے۔

وہ وتر جس کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے

$$[\text{مثال (۱)}] \quad 0 = \frac{a}{b} (a - m) + \frac{a}{b} (a - m)$$

ہے۔ اگر یہ وتر نقطہ (ک، م) میں سے گزرے تو

$$0 = \frac{a}{b} (a - k) + \frac{a}{b} (a - m)$$

اور اس طرح نقطہ (لا، ما) ناقص

$$0 = \frac{a}{b} k - \frac{a}{b} m - \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$$

۳۔ مثال۔ ناقص پر کے ان دو نقطوں کو ملانے والا خط جنکے

خارج المرکز زاویوں کا فرق مستقل ہو دوسرے ناقص کو لف کرتا ہے۔

نقطوں ط_۱ اور ط_۲ کو ملانے والے خط کی مسادات جبکہ ط_۱۔ ط_۲ = ۲ عہ
حسب ذیل ہے

$$\frac{لا}{۱} \text{ حجم } \frac{۱}{۲} (\text{ط}_۱ + \text{ط}_۲) + \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲} (\text{ط}_۱ + \text{ط}_۲) = \text{حجم عہ}$$

اس خط کا لفاف ' (ط_۱ + ط_۲) کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$\left[\text{مثال ۲ صفحہ } \right] \quad \frac{لا}{۲} + \frac{۱}{۲} = \text{حجم } ۲ \text{ عہ}$$

۴۔ مثال ۲۔ اگر ایک ناقص میں ایک مثلث بنایا جائے
اور اس کے دو اضلاع معلومہ خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو دوسرے
ضلع کا لفاف ایک دوسرا ناقص ہوگا۔

فرض کرو کہ ق، ق کے خارج المرکز زاویے ط_۱، ط_۲ ہیں۔
تب اگر ق اور ق، معلومہ خطوں کے متوازی ہوں تو
ط_۱ + ط_۲ = مستقل = ۲ عہ اور ط_۱ + ط_۲ = مستقل = ۲ بہ

$$\text{پس } ط_۱ - ط_۲ = ۲ (\text{عہ} - \text{بہ})$$

اس لیے 'بوجب مثال ۲، ق س کا لفاف

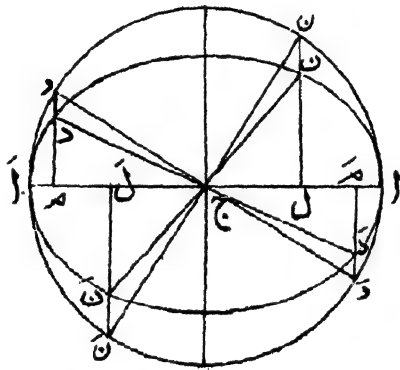
$$\frac{لا}{۲} + \frac{۱}{۲} = \text{حجم } ۲ (\text{عہ} - \text{بہ})$$

۱۳۰۔ فرض کرو کہ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے ن، د
ہیں۔ فرض کرو کہ ن کے محدد لا، مآ اور د کے محدد لا، مآ ہیں۔ ج ن
اور ج د کی مسادات ہیں

$$\frac{لا}{ب} = \frac{ما}{ا} \text{ اور } \frac{لا}{ب} = \frac{ما}{ا}$$

ہیں، اس لیے دفعہ ۱۲۸ (۵) کی رو سے $\frac{لا}{ب} = \frac{ما}{ا}$ کی رو سے

$$\frac{لا}{ب} = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} \quad (۱)$$



اگر ن اور د کے خارج المركز زاویے فہ، فہ ہوں تو لا = لجم فہ
 ما = ب جب فہ، لا = لجم فہ، ما = ب جب فہ - (ان قیمتوں کو (۱) میں
 درج کرنے سے

$$\text{جم فہ جم فہ} + \text{جب فہ جب فہ} =$$

$$\frac{\pi}{۲} = \text{فہ} = \text{فہ}$$

یا

(۱۲۶) پس ایک ناقص کے دو مزدحم قطروں کے سروں پر کے
 نقطوں کے خارج المركز زاویوں کا فرق ایک قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
 اگر ناقص کے قطروں ج ن اور د ج د کے جواب میں
 امدادی دائرہ کے قطر ج ن، د ج د ہوں تو ج ن اور د ج د

باہم علی القوائم ہوں گے۔ اس لیے دائرہ کے محدودوں کو فوراً ان یا ان کے محدودوں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۱۳۱۔ ثابت کرو کہ دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سرے 'ن' 'د' ہیں۔
فرض کرو کہ 'ن' کا خارج مرکز زاویہ 'فہ' ہے تو 'د' کا خارج مرکز زاویہ

'فہ' $\pm \frac{11}{4}$ ہوگا (دفعہ ۱۳۰)۔

'ن' کے محدود 'ا' جم 'فہ' 'ب' جب 'فہ' اور 'د' کے محدود 'ا' جم ($\frac{11}{4} \pm$)
'ب' جب 'فہ' ($\frac{11}{4} \pm$) ہوں گے۔

ج 'ن' = 'ا' جم 'فہ' + 'ب' جب 'فہ'

اور ج 'د' = 'ا' جم ($\frac{11}{4} \pm$) + 'ب' جب 'فہ' ($\frac{11}{4} \pm$)

ج 'ن' + ج 'د' = 'ا' + 'ب'

۱۳۲۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کو مزدوج

قطروں کے سروں پر مس کرے مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مزدوج قطر 'ن' 'ج' 'د' 'ج' 'د' ہیں۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ناقص کو 'ن' 'د' 'د' 'ج' پر مس کرتا ہے 'ج' 'ن' 'ج' 'د' جب 'ن' 'ج' 'د' یا 'ج' 'د' 'ج' 'ن' ہے جہاں 'ج' 'ف' 'ج' سے 'ن' پر کے خارج

عمود ہے۔
اب اگر 'ن' کا خارج مرکز زاویہ 'فہ' ہو تو 'د' کا خارج مرکز زاویہ 'فہ' $\pm \frac{11}{4}$ ہوگا۔

$$ج د = ا جم + ب جب (فہ \pm \frac{1}{p})$$

$$یا ج د = ا جم + ب جب (فہ \pm \frac{1}{p}) \dots \dots \dots (۱)$$

(۱۲۷)

$$\frac{لا}{۱} جم فہ + \frac{ب}{ب} جب فہ = ا$$

$$ج فہ = \frac{ا}{جم فہ + \frac{ب}{ب} جب فہ}$$

$$یا ج فہ = \frac{ا ب}{ا جم فہ + ب جب فہ} \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ متوازی الاضلاع کا رقبہ م و ب کے مساوی ہے۔

۱۳۳۔ اگر مزدوج نیم قطروں کے ایک زوج کے طول ر، ر' اور ان کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو

$$ر ر' جب طہ = ا ب [دفعہ ۱۳۲]$$

اس لیے جب طہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ ر ر' بڑے سے بڑا ہو۔
اب دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، اس لیے
ان کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ قطر ایک دوسرے کے مساوی
ہوں۔

پس دو مزدوج قطروں کا درمیانی حادہ زاویہ کم سے کم ہوتا ہے
جبکہ مزدوج قطر باہم مساوی ہوں۔

۱۳۴۔ فرض کرو کہ دو مزدوج قطروں کے سروں ن د کے خارج المکرز
زاویے فہ \pm \frac{1}{p} ہیں۔

تب ج ن = ا جم فہ + ب جب فہ
 اور ج د = ا جب فہ + ب جم فہ
 ج ن - ج د = (ا - ب) جم فہ
 پس ج ن = ج د جبکہ فہ = $\frac{۱۱}{۱۳}$ یا $\frac{۱۱}{۱۳}$
 اس لیے مساوی مزدوج قطروں کی مساواتیں

$$\frac{۱۱}{۱۳} + \frac{۱}{۱۳} = \frac{۱۱}{۱۳}$$

ہیں۔ پس ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطر، اس متطیل کے
 وٹروں پر سمتوں میں منطبق ہوتے ہیں جو ناقص کے محوروں کے
 سروں پر کے ماسوں سے بنتا ہے۔

(۱۶۸)

۱۳۵۔ تعریف۔ وہ دو خطوط مستقیم جو ایک ناقص پر کے کسی
 نقطہ سے کسی قطر کے سروں تک کھینچے جائیں تکمیلی وتر کہلاتے ہیں۔
 فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ قی کو قطر ن ج ن کے سروں
 ن، ن سے ملا کر تکمیلی وتر مائل کئے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قی ن کا
 نقطہ وسطی ط ہے اور قی ن کا ط۔ تب ج ط اور ج ط مزدوج ہیں
 کیونکہ ہر ایک دوسرے کے متوازی وٹروں کی تنصیف کرتا ہے اور ج ط
 اور ج ط علی الترتیب قی ن اور قی ن کے متوازی ہیں۔
 پس قی ن اور قی ن مزدوج قطروں کے ایک زوج کے
 متوازی ہیں۔

۱۳۶۔ ہم دائری نقطے۔ مساوات

$$\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} - ۱ = (لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج) = ۰ \quad (۱)$$

ایک ایسے منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ناقص

$$۱ = \frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب}$$

اور دائرہ $لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$

کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

اب (۱) سے دو خطوط مستقیم تعبیر ہوں گے اگر لہ کو ٹھیک طور پر منتخب کیا جائے اور دفعہ ۳۷ میں معلومہ شرط پوری ہو۔ نیز جب (۱) سے دو خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں تو وہ خطوط

$$\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} + (لا + ما) = ۰$$

کے متوازی ہوں گے اور اس لیے وہ شکل $ما = \pm م$ لا کے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں گے۔

پس ایک ناقص اور کسی دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گذرنا

دو خطوط مستقیم محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۱۶۹) اب فرض کرو کہ ایک دائرہ ایک ناقص کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کے خارج المرکز زاویے $عہ$ ، $بہ$ ، $جہ$ ، $ضہ$ ہیں۔ تب یہ دو خطوط

$$\frac{لا}{و} \text{ جم } \frac{۱}{۲} (عہ + بہ) + \frac{ما}{ب} \text{ جب } \frac{۱}{۲} (عہ + بہ) = \text{جم } \frac{۱}{۲} (عہ - بہ)$$

$$\text{اور } \frac{لا}{و} \text{ جم } \frac{۱}{۲} (جہ + ضہ) + \frac{ما}{ب} \text{ جب } \frac{۱}{۲} (جہ + ضہ) = \text{جم } \frac{۱}{۲} (جہ - ضہ)$$

محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں گے اور اس لیے

$$\text{مس } \frac{1}{4} (\text{عہ + بہ}) = \text{مس } \frac{1}{4} (\text{جہ + ضہ})$$

$$\pi \omega = (\alpha + \beta) \frac{1}{4} + (\gamma + \delta) \frac{1}{4}$$

یا $\pi_{21} = \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}$ (۱)

اب ایک ایسے نقطہ پر جہاں دائرہ

لا' + ما' + رگ لا + ف + ما + ج = .

ناقص کو قطع کرتا ہے خارج المرکز زاویہ شرط

کو یوں کرتا ہے۔ پس

$$\{ (1 - \text{ب}) \text{جم} + 2 \text{گ} + \text{جم} + \text{ط} + \text{ج} + \text{ب} \} = \text{ف} \text{ب} \text{ج} \text{ب} \text{ط}$$

$$= \text{م ف ب}^2 - \text{م ف ب}^2 \text{ ج م طه}$$

اس لیے حجم عہ + حجم بہ + حجم جہ + حجم ضہ = $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$

اسی طرح جب عہ + جب بہ + جب جہ + جب نہ = $\frac{م ف ب}{ا ب س ا}$

لیکن چونکہ $\pi = e + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$

اس لیے جم نہ = جم (عہ + بہ + جہ) اور جیب نہ = جب (عہ + بہ + جہ)

سینئر دائرہ کامرکز (گ - ف) ہے۔

اس لیے اس دائرہ کے مرکز کے محد دو خان نقطوں میں سے گزرتا

ہے جن کے خارج المرکز زاویے عمود، بہ، جہ ہیں

$$\left\{ \text{جم} + \text{ع} + \text{جم} (\text{ع} + \text{ب} + \text{ج}) \right\} \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{d}} = 0$$

اور $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m$ {حجب عم - حجب (عم + نہ + جب)} (ج)

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال۔ ناقص $\frac{لا^۲}{ب} + \frac{ما^۲}{ب} = ۱$ میں ایک متساوی الاضلاع

مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ متساوی الاضلاع مثلث کے مرکز ہندسی کا قطری

$$لا (لا + ۳ب) = \frac{ما^۲ (لا + ۳ب) + (ب^۲ - لا^۲)}{ب}$$

اگر مثلث کے راس ع، ب، ج ہیں تو مرکز ہندسی

$$۱ = لا + ۳ (جم + ع + جم + ج)$$

$$۳ = ما + ب (جب + ج + جب + ج)$$

اور
سے حاصل ہو گا۔

اب ایک متساوی الاضلاع مثلث میں مرکز ہندسی، حاطہ مرکز پر منطبق

ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\frac{لا + ۳ (جم + ع + جم + ج)}{ب} = ۳ - لا$$

$$\frac{ما + ب (جب + ج + جب + ج)}{ب} = ۳ - ما$$

مربع لو اور جمع کرو تو

$$(لا + ۳ب) (لا + ۳ب) = \frac{ما^۲ (لا + ۳ب) + (ب^۲ - لا^۲)}{ب}$$

۱۳۷۔ مزدوج قطروں کو محاور قرار دیکر ان کے حوالے سے ناقص

کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص کے محور اعظم اور محور اصغر کے حوالے سے اسکی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots = \frac{لا^۲}{ب} + \frac{ما^۲}{ب}$$

ہے۔

۱۳۹ — وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک ناقص کے تین نقطوں پر کے
عماد ایک نقطہ پر مل سکیں۔

نقطوں عہ، ب، جہ پر کے عماد (حسب دفعہ ۱۲۵)
۱ لاجب عہ - ب ما جم عہ = (ا - ب) جب عہ جم عہ، وغیرہ ہیں۔
اس لیے وہ شرط کہ عہ، ب، جہ پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہے کہ

$$0 = \begin{vmatrix} \text{جب } ۲ \text{ عہ} & \text{جم عہ} & \text{جب عہ} \\ \text{جب } ۲ \text{ ب} & \text{جم ب} & \text{جب ب} \\ \text{جب } ۲ \text{ جہ} & \text{جم جہ} & \text{جب جہ} \end{vmatrix}$$

یعنی جب ۲ عہ جب (ب - جہ) + جب ۲ ب جب (جہ - عہ) + جب ۲ جہ جب (عہ - ب) = ۰ ... (۱)
اب جب (ب + جہ) + جب (جہ + عہ) + جب (عہ + ب)
اور جب (ب - جہ) + جب (جہ - عہ) + جب (عہ - ب)
کا حاصل ضرب

$$\{ \text{جب (ب + جہ) جب (جہ - عہ) + جب (عہ + ب) جب (ب - جہ) } \}$$

ہے۔ لیکن $\{ \text{جب (ب + جہ) جب (جہ - عہ) + جب (عہ + ب) جب (ب - جہ) } \}$ (۱۴۲)
= (جم ۲ جہ - جم ۲ ب) + (جم ۲ عہ - جم ۲ جہ) + (جم ۲ ب - جم ۲ عہ) = ۰

$$\{ \text{جب (جہ + عہ) جب (عہ - ب) + جب (ب - جہ) جب (جہ - عہ) } \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \text{جم (ب + جہ) - جم (جہ + عہ) + جم (عہ + ب) - جم (ب - جہ) } \}$$

$$- \text{جم (ب + جہ)}$$

$$= \{ \text{جب } ۲ \text{ عہ جب (جہ - ب)} \}$$

$$\{ \text{جب (ب - جہ) = } ۲ \text{ جب } \frac{۲}{۲} \text{ جب } \frac{۲}{۲} \text{ جب } \frac{۲}{۲} \text{ عہ - عہ} \}$$

اس لیے (۱) کا دائیں جانبی رکن

۴ جب $\frac{ب}{۲}$ جب $\frac{ج}{۲}$ جب $\frac{ع}{۲}$ جب $\frac{ع}{۲} \times ۳$ جب (ب + ج) ۵
ہے۔ اس طرح مطلوبہ شرط حسب ذیل ہے:

جب (ب + ج) + جب (ج + ع) + جب (ع + ب) = ۰ (۱)
اب اگر ہم فرض کریں کہ ع اور ب معلوم ہیں تو رشتہ (۱) سے
جہ کی دو قیمتیں حاصل ہونگی۔ فرض کرو کہ یہ قیمتیں جہ اور ضہ ہیں۔ تب
مساداتوں

جب (ب + ج) + جب (ج + ع) + جب (ع + ب) = ۰
اور جب (ب + ضہ) + جب (ضہ + ع) + جب (ع + ب) = ۰
سے، عمل تفریق اور جب $\frac{۱}{۲}$ (ج - ضہ) سے تقسیم کرنے کے بعد حاصل ہوتا ہے
جم $\frac{۱}{۲}$ (ب + ج + ضہ) + جم $\frac{۱}{۲}$ (ع + ج + ب + ضہ) = ۰

اس لیے

جم $\frac{۱}{۲}$ (ع + ب + ج + ضہ) = ۰
پس اگر ع، ب، جہ، ضہ پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو
ع + ب + ج + ضہ = ۰ (۲) (۱ + ۲) = ۰ (ب)
یہ ظاہر ہے کہ شرط (ب) ضروری ہے لیکن وہ کافی نہیں ہے کیونکہ
اس سے یہ لازم نہیں آتا کہ ع، ب، جہ، ضہ پر کے عماد ہم نقطہ ہوں گے۔
[دیکھو دفعہ ۱۹۹]

مثال ۱۔ ایک ناقص میں ایک مثلث بنایا گیا ہے۔
معلوم کرو کہ اس کا رقبہ کب بڑے سے بڑا ہوگا۔

۵ طریقہ بالا پر و فی سرایتکلن سے منسوب ہے۔

فرض کرو کہ مثلث کے راسوں 'ق'، 'ق'، 'ق' کے خارج المرکز زاویے 'فہ'، 'فہ'، 'فہ' ہیں۔ فرض کرو کہ ان کے جواب میں امدادی دائرہ پر کے نقطے 'ق'، 'ق'، 'ق' رہیں۔

(۱۴۳)

مثلثوں 'ق ق ق'، 'ق ق ق' کے رقبے حسب ذیل ہیں:

$$\left| \begin{array}{c} \text{اجم فہ} \\ \text{اجم فہ} \\ \text{اجم فہ} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{اجم فہ} \\ \text{اجم فہ} \\ \text{اجم فہ} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{اجم فہ} \\ \text{اجم فہ} \\ \text{اجم فہ} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{اجم فہ} \\ \text{اجم فہ} \\ \text{اجم فہ} \end{array} \right|$$

$$\Delta \text{ ق ق ق} : \Delta \text{ ق ق ق} = \frac{2}{1}$$

پس مثلثوں 'ق ق ق' اور 'ق ق ق' کے رقبوں میں مستقل نسبت $\frac{2}{1}$ ہے۔ اس لیے 'ق ق ق' سے بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ 'ق ق ق' سے بڑے سے بڑا ہو۔ اب 'ق ق ق' سے بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ وہ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہو اور ایسی صورت میں 'فہ' = 'فہ' = 'فہ' = 'فہ' = 'فہ' = 'فہ' = $\frac{2}{3}$ ۔ پس جب ایک ناقص میں بنایا ہوا مثلث بڑے سے بڑا ہوتا ہے تو اس کے

راسوں کے خارج المرکز زاویے 'ع'، 'ع'، 'ع' = $\frac{2}{3}$ ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کا کوئی زوج نقطہ 'ن' پر کے مماس کو 'ت' پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ 'ت' \times 'ن' = 'ج د' جہاں 'ج د' مزدوج قطر ہیں۔

'ج د' 'ج ن' کو علی الترتیب محور ما اور محور لا قرار دو تو ناقص کی مساوات $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ ہوگی۔

نقطہ 'ن' (۱، ۰) پر کے مماس کی مساوات لا = ۱ ہوگی۔ اگر مزدوج قطروں کے کسی زوج کی مساواتیں ما = لا، ما = م لاہوں تو

$$م م = \frac{ب^2}{۲} \quad [دفعہ ۱۲۸] \dots\dots\dots (۱)$$

لیکن

$$ن ت = م د \quad اور \quad ن ت = م د$$

$$\therefore ن ت \times ن ت = م م = \frac{ب^2}{۲} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\therefore ن ت \times ن ت = ب^2 \quad (۱) \text{ سے}$$

مثال ۳۔ ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے سروں کو

ملانے والا خط ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرے گا اگر قطر باہم

علی القوائم ہوں۔

فرض کرو کہ ج ف، ج ق دو قطر ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔
فرض کرو کہ خط ج ق کی مساوات لاجم ع + ماجب ع = ع ہے۔

خط ج ق اور ج ق کی مساواتیں (دفعہ ۳۸)

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = \frac{لاجم ع + ماجب ع}{ع} \dots\dots\dots (۱)$$

ہوئی۔

لیکن چونکہ خطوط ج ف اور ج ق باہم علی القوائم ہیں اس لیے (۱)

(۱۴۴)

میں لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہے [دفعہ ۳۶]۔

$$\frac{۱}{۲ع} = \frac{۱}{۲ب} + \frac{۱}{۲د}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز سے خط ج ق کا عمودی فاصلہ مستقل ہے۔
اس لیے خط ج ق ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک ناقص کے عمادی وتروں کے قطبیوں کا

طریق معلوم کرو۔

کسی نقطہ طہ پر کے عماد کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{۱}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب م}}{\text{جب طہ}} = \frac{۱}{\text{ب م}} - \frac{۱}{\text{ب م}}$$

ہے۔ کسی نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{۱}{\text{لا م}} + \frac{\text{لا م}}{\text{ب م}} = ۱$$

ہے۔ مساواتیں (۱) اور (۲) ایک ہی خط کو تعبیر کریں گی اگر

$$(\frac{۱}{\text{ب م}} - \frac{\text{ب م}}{\text{لا م}}) = \frac{۱}{\text{جم طہ}} \text{ اور } (\frac{۱}{\text{ب م}} - \frac{\text{ب م}}{\text{لا م}}) = - \frac{\text{ب م}}{\text{جب طہ}}$$

$$\text{یا } (\frac{۱}{\text{ب م}} - \frac{\text{ب م}}{\text{لا م}}) = \frac{۱}{\text{جم طہ}} \text{ اور } (\frac{۱}{\text{ب م}} - \frac{\text{ب م}}{\text{لا م}}) = - \frac{\text{ب م}}{\text{جب طہ}}$$

اس لیے ان دو آخری مساواتوں کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(\frac{۱}{\text{ب م}} - \frac{\text{ب م}}{\text{لا م}})^2 = \frac{۱}{\text{جم طہ}^2} + \frac{\text{ب م}^2}{\text{لا م}^2}$$

اور اس لیے طریق کی مساوات

$$\text{لا م}^2 (\frac{۱}{\text{ب م}} - \frac{\text{ب م}}{\text{لا م}})^2 = \frac{۱}{\text{جم طہ}^2} + \frac{\text{ب م}^2}{\text{لا م}^2}$$

۴۔

مثال ۵۔ اگر ایک ناقص کے گرد ایک ذوار بقتہ الافلاک

کھینچا جائے تو اس کے وتروں کے نقاط وسطی میں سے گذر نیوالا خط ناقص کے مرکز میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ حماسوں کے چار نقاط تماس کے خارج المکرکز زاویے عہ، یہ

جہ، ضہ ہیں۔

نقطہ عہ، یہ پر کے حماسوں کی مساواتیں

$$\frac{لا}{ا} جم + عه = \frac{ب}{ب} جب + \frac{لا}{ا} جم + عه = ا اور \frac{لا}{ا} جم + عه = ا$$

ہیں۔ یہ ماس نقطہ

$$\left(\frac{جم + عه}{جم - عه} ، \frac{ب}{جم + عه} \right) \text{ جب } \frac{لا}{ا} جم + عه = ا$$

پر ملتے ہیں۔ اسی طرح جہ اور ضہ پر کے ماس نقطہ

$$\left(\frac{جم + جہ}{جم - جہ} ، \frac{ب}{جم + جہ} \right) \text{ جب } \frac{لا}{ا} جم + جہ = ا$$

پر ملیں گے۔

اُس خط کے نقطہ وسطی کے محدود جو ان نقاط تقاطع کو ملاتا ہے

(۱۷۵)

$$\frac{لا}{۲} = \frac{جم + عه + جم + جہ + جم - عه + جم - جہ}{جم + عه + جم + جہ + جم - عه + جم - جہ}$$

$$\frac{ب}{۲} = \frac{ب}{جم + عه + جم + جہ + جم - عه + جم - جہ}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس لیے وہ خط جو اس نقطہ کو ناقص کے مرکز سے ملاتا ہے محور اعظم کے ساتھ

ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا ماس

$$\frac{ب}{ا} = \frac{جم + عه + جم + جہ + جم - عه + جم - جہ}{جم + عه + جم + جہ + جم - عه + جم - جہ}$$

ہے اور یہ

$$\frac{ب}{ا} = \frac{جم + عه + جم + جہ + جم - عه + جم - جہ}{جم + عه + جم + جہ + جم - عه + جم - جہ}$$

کے مساوی ہے جہاں ۲س = عه + جہ + ضہ -

اوپر کے نتیجہ کے تشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ وہ خط جو ناقص کے مرکز کو

ذو اربعۃ الاضلاع کے دتروں میں سے ایک کے نقطہ وسطی سے ملاتا ہے دوسرے

دو تروں کے نقاط وسطی میں سے بھی گذرتا ہے۔ اس سے نیوٹن کا یہ مسئلہ ثابت ہوتا ہے: اگر ایک ناقص ایک ذواربعتہ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرے تو اس کا مرکز اس خط پر ہوتا ہے جو تروں کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔ [نیز دیکھو دفعات ۲۱۹ اور ۲۲۴]

مثال ۶۔ ف ق مرا ایک مثلث ہے جو دائرہ

لاہ۔ ما۔ ۱ = ۰ میں بنایا گیا ہے۔ اضلاع ف ق، ق ف، مرا

علی الترتیب نقطوں (ب، ۰)، اور (ج، ۰) میں سے گذرتے ہیں۔

ثابت کرو کہ ق مرا، مخروطی لا^۱ + ما^۲ (۱ - ب ج) = (۱ - ب^۱)
 × (۱ - ج^۱) = ۱ کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ق، ق مرا کے معد علی الترتیب (۱ جم طہ، ۱ جب طہ) وغیرہ ہیں۔

ف ق کی مساوات

لاجم $\frac{1}{4}$ (طہ + طہ) + ما جب $\frac{1}{4}$ (طہ + طہ) = ۱ جم $\frac{1}{4}$ (طہ - طہ)
 ہے۔ مس $\frac{1}{4}$ طہ وغیرہ کی بجائے م، وغیرہ رکھنے سے

$$\frac{ب}{۱} = \frac{جم \frac{1}{4} (طہ - ۱ طہ)}{جم \frac{1}{4} (طہ + طہ)} = \frac{۱ + ۱ م، م}{۱ - ۱ م، م}$$

$$اسی طرح \frac{ج}{۱} = \frac{۱ + ۱ م، م}{۱ - ۱ م، م}$$

پس ۱ م، م (۱ + ب) + (۱ - ب) = ۰ اور ۱ م، م (۱ + ج) + (۱ - ج) = ۰

$$\therefore \frac{r^2}{ab} = \frac{(1+j)(1-b)}{(1-j)(1+b)} \quad (1) \dots$$

اب ق س کی مساوات

$$\text{لاجم } \frac{1}{4} (\text{طہ} + \text{طہ}) + \text{ماجب } \frac{1}{4} (\text{طہ} + \text{طہ}) = \text{اجم } \frac{1}{4} (\text{طہ} - \text{طہ})$$

$$\text{یعنی } 1 - لا + لا + لا (لا + لا) م م م - ما (م + م) م = 0$$

ہے۔ اس لیے (۱) سے

$$0 = (1 - لا) لا + لا (لا + لا) م م - ما (م + م) م$$

جس کا لغاف، م کی مختلف قیمتوں کے لیے،

$$لا (لا + لا) (لا - لا) = (لا + لا) (لا + لا) م$$

ہے جہاں $لا = (1+j)(1-b) \backslash (1-j)(1+b)$

چھٹے باب پرشالیں

- ۱۔ اگر ایک ناقص (مرکز ج) کے نقطہ ن کے ماسکی فاصلے س ن
- س ن ہوں اور ج د وہ نیم قطر ہو جو ج ن کا فروج ہے تو ثابت کرو کہ
- س ن x س ن = ج د
- ۲۔ ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا ماس، (پر کے ماس سے جہاں
- د محور ج) کا ایک سہرا ہے نقطہ ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ما
- ن کے متوازی ہے جہاں ج ناقص کا مرکز ہے۔
- ۳۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوط مستقیم سے
- اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریقی
- ایک ناقص ہے۔ نیز خروج المرکز کو خطوط کے درمیانی زاوے کی رقوم میں معلوم کرو۔
- ۴۔ ایک ناقص پر دو ثابت نقطے ف، ق ہیں اور اس پر سر کوئی
- اور نقطہ ہے۔ ف، ق س کے نقاط وسطی ط، ط ہیں اور ط گ، ط گ

علی الترتیب ف س ر ق س ر پر عمود ہیں اور وہ محور سے لگی ہوئی پر ملتے ہیں۔
ثابت کرو کہ لگی ہوئی مستقل ہے۔

۵۔ ناقصوں کا ایک سلسلہ معلومہ ماسکہ اور متناظر مرتب کے ساتھ
کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے محاورہ اصغر کے سروں کا طریق ایک مکانی ہے۔

۶۔ ایک ناقص کا ایک دوہرا معین ن ل ن ہے اور ق ناقص
کوئی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ق ن ق ن محور اصغر سے علی الترتیب د
مہر پر ملیں تو ج مہر x ج مہر = ج د۔

۷۔ ایک ناقص کے ماسکوں میں سے گذرتے ہوئے خطہ کھینچے گئے
ہیں جو علی الترتیب مزدوج قطروں کے ایک زوج پر عمود ہیں اور ق پر متقاطع
ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ہم مرکز ناقص ہے۔

۸۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا ماس مساوی مزدوج قطروں کو
ت ت پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثوں ت ج ن اور ت ج ن
میں نسبت ج ت : ج ت ہے۔

۹۔ اگر ج ق ن پر کے عماد کا مزدوج ہو تو ج ن ق پر کے
عماد کا مزدوج ہوگا۔

۱۰۔ اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کے سرے ن د ہوں اور
ن ن د وہ وتر ہوں جو ناقص کے ایک محور کے متوازی ہیں تو ثابت کرو کہ
ن د ن د مساوی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

۱۱۔ اگر مزدوج قطروں کے سرے ن د ہوں اور ن پر کا ماس
محور اعظم کو ت پر اور د پر کا ماس محور اصغر کو ت پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ
ت ت مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے۔

۱۲۔ ایک ناقص کا کوئی وتر ق ق ہے جو ایک مساوی مزدوج قطر کے
متوازی ہے۔ ق ق پر کے ماس ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ دائرہ
ق ت ق مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص میں کسی نقطہ پر کا عماد ان عمودوں کا چوتھا

تناسبی ہے جو مرکز سے اور دو ماسکوں سے تماس پر کھینچے گئے ہوں۔
 ۱۴۔ ایک ناقص کے دو مزدوج قطر کھینچے گئے ہیں اور ان کے چار سروں
 ایک معلومہ دائرے کسی نقطہ سے ملا یا گیا ہے۔ دائرہ کامرکز ناقص کے مرکز پر ہے ثابت
 کرو کہ ان چار خطوں کے طولوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔
 ۱۵۔ ایک ناقص کا ایک دو ہر امین N ہے، ناقص کامرکز
 C ہے اور N پر کا عا د C سے وپر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک
 ناقص ہے۔

۱۶۔ اگر کسی نقطہ N پر کا عا د محور اعظم کو گ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ
 N کے مختلف محلوں کے لیے N کی وسطی نقطہ کا طریق ایک قطع ناقص ہے۔
 ۱۷۔ ایک ناقص کے راس A ، B ہیں اور اس پر کوئی نقطہ N ہے۔
 ثابت کرو کہ اگر N پر عمود ہو اور N پر عمود ہو جہاں مراد
 N ، محور A پر ہیں تو مر N ناقص کے وتر خاص کے مساوی ہے۔
 ۱۸۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو جس سے ایک
 ناقص کے دو تماس جو محور اعظم کے ساتھ زاویے ط، ط بنائیں کھینچے جاسکیں
 اور (۱) مس ط + مس ط مستقل ہو (۲) مم ط + مم ط مستقل ہو یا (۳) مس ط
 مس ط مستقل ہو۔

۱۹۔ ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے دو سروں کو ملانیو الا خط
 اس خط کے متوازی یا مزدوج ہوتا ہے جو ان کے مزدوج قطروں کے دو سروں
 ملاتا ہے۔

۲۰۔ اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کے سرے N اور D ہوں تو
 ثابت کرو کہ N اور D پر کے تماس ناقص $\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} = 2$ پر ملتے ہیں اور

(۱۷۸)

N کے نقطہ وسطی کا طریق $\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} = \frac{1}{4}$ ہے۔

۲۱۔ ایک خط کھینچا گیا ہے جو ایک ناقص کے محور اصغر کے متوازی ہے

ہے جہاں ف، ق، ر، ناقص کے اُن قطروں کے طول ہیں جو مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب میں۔

۲۷۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ ن سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ماسکوں میں، ہ میں سے گذرتے ہیں اور متناظر مرتب کو ق، س پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق، ہ اور س میں سے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

۲۸۔ اگر ایک ناقص (مرکز ج) اور اس کے امدادی دائرے پر ن، ن متناظر نقطے ہوں اور اگر ج ن کو خارج کیا جائے اور وہ امدادی دائرہ سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق کے متناظر ناقص کے نقطہ ق، پر کا ماس، ج ن پر نمود ہے اور وہ ج ن سے، ج ن کے مساوی طول قطع کرتا ہے۔

۲۹۔ اگر ایک ناقص کے دو عمود وار ماسوں کے نقاط ماس ف، ق ہوں اور امدادی دائرہ پر متناظر نقطے ف، ق ہوں تو ثابت کرو کہ ج ف، ج ق، ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

۳۰۔ دو ہم مرکز دائروں کے مرکز ج سے دو نصف قطر ج ق، ج ق کھینچے گئے ہیں جو ایک ثابت خط مستقیم سے مساوی المیلان ہیں، پہلا نصف قطر بیرونی دائرہ کا ہے اور دوسرا اندرونی دائرہ کا۔ ثابت کرو کہ (۱) ق ق کے نقطہ وسطی ن کا طریق ایک ناقص ہے، (۲) ن ق اس ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد ہے، اور (۳) ق ق اس قطر کے مساوی ہے جو ج ن کا مزدوج ہے۔

۳۱۔ اگر ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا فرق سہ ہو اور ان نقطوں پر کے ماس یا ہم علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ اب جب سہ لہ، لہ جہاں ل، م، وہ نیم قطر ہیں جو ان نقطوں پر کے ماسوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں۔

۳۲۔ دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے دائروں کے ماس کھینچے جائیں تو ان کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ اگر دو مزدوج قطروں میں سے ہر ایک کے دوسروں سے

ناقص کے کسی تماس پر عمود کھینچ جائیں تو ان عمودوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ اس عمود کے مربع کے مساوی ہوگا جو مرکز سے تماس پر کھینچا جائے۔

۳۴۔ ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن کے عماد پر ایک نقطہ ق

ایسا ہے کہ خطوط ج ن، ج ق، ناقص کے محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق، اس قطر کے متناسب ہے جو ج ن کا مزدوج ہے۔

۳۵۔ اگر ایک مخروطی کے تماسوں کا ایک زوج یا ہم علی القوائم ہو (۱۸۰)

اور وتر تماس پر مرکز سے اور تماسوں کے نقطہ تقاطع سے عمود کھینچ جائیں تو ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

۳۶۔ ایک ناقص پر دو علی القوائم تماس کھینچے گئے ہیں۔ وتر تماس کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۳۷۔ اگر ایک ناقص پر کوئی نقطہ ن ہو اور کوئی وتر ن ق، ج کے مزدوج قطر کو س قطع کرے تو ن ق \times ن س، ن ق کے متوازی قطر کے مربع کا نصف ہوگا۔

۳۸۔ ایک ناقص کے ان تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق معلوم کرو جو مستقل طول کے ہیں۔

۳۹۔ اگر ایک ناقص میں بنائے ہوئے ذوار بیعتہ الاضلاع کے تین ضلع علی الترتیب تین دئے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ چوتھا ضلع بھی ایک ثابت خط مستقیم کے متوازی ہوگا۔

۴۰۔ اگر ایک کثیر الاضلاع کو ایک ناقص میں بنایا جائے اور اس کے تمام ضلع الا ایک کے دئے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو اگر ضلعوں کی تعداد جفت ہے تو بقیہ ضلع ایک معلومہ خط مستقیم کے متوازی ہوگا لیکن اگر ضلعوں کی تعداد طاق ہے تو بقیہ ضلع ایک ناقص کو لفک کرے گا۔

۴۱۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کے قطروں کے کسی زوج کے سروں پر کے تماسوں سے بنتا ہے اس متوازی الاضلاع کے رقبہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقاط تماس کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

۴۲۔ اگر ایک ناقص کے کسی دو قطروں ج ن، ج ق کے سروں ن، ق پر دو مماس ن ن، ق ق کھینچے جائیں اور وہ ایک دوسرے کو ت پر اور محدودہ قطروں کو ن اور ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ مثلثوں ت ق ن، ت ن ق کے رقبے مساوی ہیں۔

۴۳۔ ناقص $\frac{لا}{۷} + \frac{با}{۲} = ۱$ کے دو مماس ون، وق نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ج ن ق کا رقبہ

$$\frac{۷ا۲ب + ۲ا۲ک - ۷ا۲ب}{۷ا۲ک + ۲ا۲ک}$$

اور ذواربعۃ الاضلاع ون ج ق کا رقبہ

$$= (۷ا۲ک + ۲ا۲ک - ۷ا۲ب) \frac{۱}{۲}$$

ہے جہاں ناقص کا مرکز ج ہے اور و کے محدودہ (ک) ہیں۔

۴۴۔ ایک ناقص کے مماس ت ن، ت ق ہیں اور اس کا مرکز ج ہے، ثابت کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع ج ن ت ق کا رقبہ = $۷ا۲س$ (فہ۔ قہ) جہاں ناقص کے نیم محور $۷ا۲ب$ ہیں اور ن، ق کے خارج المرکز زاویہ فہ قہ ہیں۔ (۱۸۱)

۴۵۔ ایک ناقص کا ایک قطر ن ج ہے اور امدادی دائرہ کا متناظر قطری ج ق ہے۔ ثابت کرو کہ اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جون، ن، ق ق پر کے مماسوں سے بنتا ہے $\frac{۷ا۲ب}{(۷ا۲ب - ۷ا۲ج) فہ}$ ہے جہاں فہ، ن کا خارج المرکز زاویہ ہے۔

۴۶۔ ایک متوازی الاضلاع کو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے اور اس کے دو اس ثابت خطوط متقیم پر ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی

فاصلہ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے دور اس ایک ناقص پر ہیں جس کا امدادی
صغیر دائرہ متوازی الافلاح کا محیط دائرہ ہے۔

۴۷۔ ایک ناقص کے دو ثابت مزدوج قطروں کو دو خطوط مستقیم ون
وق جو ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرتے ہیں اور مزدوج قطروں کے کسی دوسرے
زودج کے متوازی ہیں علی الترتیب نقطوں ن، ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت
کرو کہ ن ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۴۸۔ اگر ایک ناقص کے مستوی میں و کوئی نقطہ ہو اور اس سے
مساوی مزدوج قطروں پر عمود و م، و ل کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ متوازی الافلاح
م و ل ن کے وتر کی سمت ون، و کے قطبی پر عمود ہوگی۔

۴۹۔ ایک ناقص پر جس کا مرکز ج ہے تین نقطے ا، ن، ب لیے گئے
ہیں۔ نقطہ ن میں سے دو خطوط مستقیم نقطوں ا اور ب پر کے ماسوں کے
متوازی کھینچے گئے ہیں جو ج ب اور ج ا سے علی الترتیب ق اور س پر
ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق س، ن پر کے ماس کے متوازی ہے۔

۵۰۔ ایک ناقص کے دو نقطوں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق
معلوم کرو جبکہ نقطہ مزدوج قطروں کے سرے ہوں۔

۵۱۔ ایک ناقص کے ایک وتر کے سروں پر جو مساوی مزدوج قطروں
میں سے ایک کے متوازی ہے عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ عماد ایک قطر
مقاطع ہوتے ہیں جو دوسرے مساوی مزدوج قطر پر عمود ہے۔

۵۲۔ اگر ایک ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں
وہ خط جو ان کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے اور محور اعظم کے متوازی ہے
وتر کی تصنیف کرے گا۔

۵۳۔ اگر ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن پر کے عماد میں طول
ن ق، اس نیم قطر کے مساوی قطع کیا جائے جو ج ن کا مزدوج ہے تو ثابت کرو کہ
ق، دو دائروں میں سے ایک یا دوسرے پر ہے۔

۵۴۔ نقطہ (لا، ما) سے ناقص $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ (کے ماس کھینچے

گئے ہیں۔ اگر ان ماسوں کا درمیانی زاویہ فہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(لا + ما - ا - ب) مس فہ = م [(ب^2 لا + ا^2 ما - ا^2 ب)]$$

۵۵۔ ت ن، ت ق وہ ماس ہیں جو ایک بیرونی نقطہ (لا، ما)

سے ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے کھینچے گئے ہیں۔ اگر ایک ماسکے ماس ہو تو

ثابت کرو کہ

$$\frac{ما}{ب} + \frac{لا}{ا} = \frac{مس ت}{مس ق}$$

۵۶۔ نقطہ ت سے ایک ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے دو ماس

کھینچے گئے ہیں اور یہ ماس زاویہ فہ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مس ق

x مس ت جم فہ = ج تا۔ ا۔ ب جہاں ج مرکز اور مس ہ ماسکے ہیں۔

۵۷۔ اگر ایک ناقص کے مرکز ج سے کسی نقطہ ن پر کے ماس پر

عمود کھینچا جائے اور یہ عمود ماسکی فاصلہ مس ن سے (ممدودہ بضرورت)

س پر ملے تو اس کا قطری ایک دائرہ ہوگا۔

۵۸۔ اگر دو ہم مرکز ناقص ایسے ہوں کہ ایک کے ماسکے دوسرے پر

واقع ہوں اور اگر ان کے خروج المرکز زا، ز ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے محاور

$$زاویہ جم = \frac{ا^2 ز + ز^2 ا - ا^2 ز}{ز}$$

۵۹۔ ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو ناقص کے ایک قطر کے محاذی

محور اعظم کے کسی ایک سرے پر بنتا ہے اس زاویہ کا متتام ہوتا ہے جو مزدوج

قطر کے محاذی محور اصغر کے سرے پر بنتا ہے۔

۶۰۔ اگر ناقص کے مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سروں پر

محورِ اعظم کے محاذی زاویے طہ طہ نہیں تو ثابت کرو کہ مم طہ + مم طہ مستقل ہے۔
 ۶۱۔ اگر ایک ناقص کے ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے محاذی مزدوج
 قطروں کے ایک زوج کے سروں پر زاویے طہ طہ نہیں تو ثابت کرو کہ مس طہ
 + مس طہ مستقل ہے۔

۶۲۔ اگر لہ لہ زاویے ہوں جو کسی دو مزدوج قطروں کے محاذی (۱۸۳)
 ناقص کے کسی ثابت نقطہ پر بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ مم لہ + مم لہ مستقل ہے۔
 ۶۳۔ ثابت کرو کہ ناقص کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خطِ مستقیم سے
 درپیش میں منقطع ہوتے ہیں۔

۶۴۔ ایک دائرہ ناقص $\frac{لا}{۱۲} + \frac{ما}{۲۱} = ۱$ کو ثابت نقطہ (عہ) پر
 اور ناقص کے ایک قطر کے سروں پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ناقص
 $۲ لا + ۲ ب ما = (۱ - ب ا) (عہ لا - ب ما)$ ہے۔
 ۶۵۔ $\frac{لا}{۱۲} + \frac{ما}{۲۱} = ۱$ کے چار نقطوں پر کے عماد نقطہ (عہ) پر
 پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان چار نقطوں کا اوسط محل

$$\left\{ \frac{۱}{۲} (۱ - ب ا) , \frac{۱}{۲} (ب ا - ۱) \right\}$$

ہے۔

۶۶۔ ایک ناقص پر چار ثابت نقطے (ب ج، د، ب ج، د) ہیں اور اس پر
 ن کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ن سے ب اور ج د ب ج اور
 د پر عمود کھینچ جائیں تو ب اور ج د پر کے عمودوں کا حاصل ضرب ب ج
 اور د پر کے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔
 ۶۷۔ ایک ناقص کے دو عماد ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ ان کے
 نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۶۸۔ ایک ناقص کے ایک ماسکی وتر کے ایک سرے پر عماس کھینچا گیا ہے

اور دوسرے سرے پر عماد کھینچا گیا ہے۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔
۶۹۔ ایک ناقص کے محور اعظم کے متوازی دو خطوط مستقیم، محور اعظم

فاصلہ $\frac{1}{2} \sqrt{b^2 - a^2}$ پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیان کسی ماس کا

مقطعہ نقطہ تماس پر دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن کے محاذی مرکز پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

۷۰۔ ایک ناقص کے نقطہ ن پر عماد ن گ ہے جہاں گ محور اعظم میں ہے۔ ن گ کو باہر وارقی تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ق = گ ن۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خروج المکرز $\frac{1}{2} \sqrt{b^2 - a^2}$ ہے۔

نیز ن اور ق پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۷۱۔ ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پر ن سے عمود کھینچا گیا ہے جو محور اعظم کو گ پر قطع کرتا ہے۔ گ کو مرکز مان کر کوئی دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ان دو متوازی خطوں سے جو چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں مساوی فاصلہ پر ہے۔

۷۲۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ناقص $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$ کا وتر

$$\frac{a}{b} \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{طم} + \text{طم}) + \frac{a}{b} \text{ جب } \frac{1}{2} (\text{طم} + \text{طم}) - \text{جم } \frac{1}{2} (\text{طم} - \text{طم}) = ۰$$

ہے ناقص کو دوسرے دو نقطوں پر قطع کرتا ہے جنکو ملائینوا لافظ

$$\frac{a}{b} \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{طم} + \text{طم}) - \frac{a}{b} \text{ جب } \frac{1}{2} (\text{طم} + \text{طم}) - \frac{a}{b} \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{طم} - \text{طم}) = ۰$$

ہے۔

۷۳۔ ثابت کرو کہ مخروطیوں $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$ اور $\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$

میں سے کسی ایک کا محاس ناقص $\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} - 1 = 0$ سے ایسے دو نقطوں
 لیگا جن پر کے محاس مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں گے۔
 ۷۴۔ ایک متوازی الاضلاع کو ناقص

$$0 = 1 - \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}$$

کے گرد کھینچا گیا ہے اور اس کے دور اس خطوط $r_1 - r_2 = 0$ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ
 اس کے دوسرے دور اس مخروطی

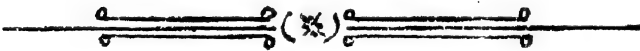
$$0 = 1 - \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1 r_2} + \frac{r_2}{r_1}$$

پر ہیں۔

۷۵۔ ایک مثلث کے ضلع دائرہ $r_1 + r_2 - r_3 = 0$ کو مس کرتے ہیں
 اور اس کے دور اس خطوط $r_1 - r_2 = 0$ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرے راس کی
 طرہ

$$0 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 (r_2 - r_3)} - r_1 - r_2 + r_3$$

ہے۔



ساتواں باب

قطع زائد

تعریف - قطع زائد ایک نقطہ کا طریق ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ (جس کو ماسکہ کہتے ہیں) سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط (جس کو مرتب کہتے ہیں) سے اُس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے بڑی ہوتی ہے۔

۱۴۰۔ زائد کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ s ماسکہ اور e مرتب ہے۔

s سے کو مرتب پر غور کیجیو۔

s سے s کو اس طرح تقسیم کرو کہ $s : 1 = e : 1$ دی ہوئی

نسبت $= z : 1$ تب 1 منحنی پر کا ایک نقطہ ہے۔

نیز s سے محدودہ میں ایک نقطہ 1 ہوگا ایسا کہ

$s : 1 = e : z$

فرض کرو کہ 1 کا نقطہ وسطی ج ہے اور $1 = 2$ تب

$s : 1 = z : e$ اور $s : 1 = z : e$

$s : 1 = z : e$

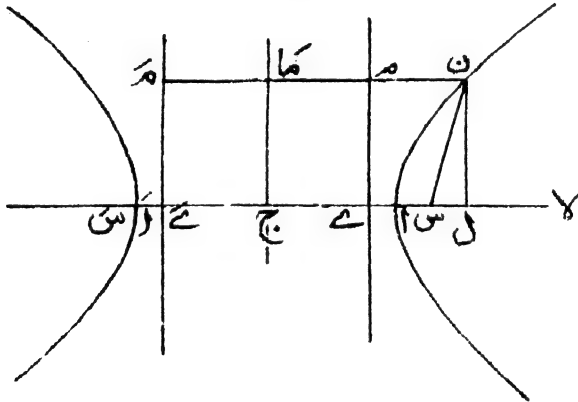
$2 : s = z : e$

ج س = ا ز (۱)

نیز
یا
س ا - س ل = ز (ا - اے)
ل ا = ز (ل ا - اے)
ج ا = ز اے ج

ج اے = $\frac{ا}{ز}$ (۲)

(۱۸۶) اب فرض کرو کہ ج مبداء ہے، ج ل محور لا اور اس کے عمود وار
خط محور ما۔
فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدود (لا ما) ہیں۔



تب شکل میں

س ن = ز ن م
س ل + ل ن = ز اے ل
س ل = ج ل - ج س = لا - ا ز
اے ل = ج ل - ج اے = لا - $\frac{ا}{ز}$

اب

اور

$$\therefore (لا - ۱ ز) + ۲ = ۲ = ز (لا - \frac{۱}{ز})$$

$$یا \quad ۲ + لا (۱ - ز) = ۲ (۱ - ز)$$

$$یا \quad ۱ = \frac{۲}{لا (۱ - ز)} + \frac{۲}{۱ - ز} \quad (۳)$$

چونکہ ز اکائی سے بڑا ہے اس لیے $\frac{۲}{لا (۱ - ز)}$ منفی ہے۔ اگر ہم $\frac{۲}{لا (۱ - ز)}$ کی بجائے - $\frac{۲}{لا (۱ - ز)}$ لکھیں تو مساوات شکل

$$(۴) \dots\dots\dots ۱ = \frac{۲}{ب} - \frac{۲}{لا}$$

اختیار کرتی ہے۔

وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسک میں سے گذرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہوتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے ہمیں مساوات (۴) میں $لا = ۱ ز$ رکھنا چاہئے چنانچہ

$$۲ = ب (۱ - ز) = \frac{ب}{۱} \quad \text{کیونکہ } ب = ۱ (۱ - ز)$$

پس نیم وتر خاص کا طول $\frac{ب}{۱}$ ہے۔

۱۴۱۔ مساوات (۴) (دفعہ ۱۴) میں لا، ۱ سے کم نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو ۲ منفی ہوگا۔ اس لیے منحنی کا کوئی حصہ لا = ۱ اور لا = ۱ کے درمیان واقع نہیں ہے۔

اگر لا > ۱ تو ۲ مثبت ہوگا اور ما کی کسی مخصوص قیمت کیلئے لا کی دو مساوی مگر مختلف علامت قیمتیں ہوں گی۔ اس لیے محور ما منحنی کو دو متشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطے ۱ سے ایسے لے جائیں کہ ج ۱ = ج ۲ اور ج ۲ = ج ۳ تو نقطہ ۱ بھی منحنی کا ماسک ہوگا اور وہ خط جو ۱ سے

گذرتے ہوئے ج سے پرعمود ہو متناظر مرتب ہوگا۔
 اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (لا، ما) بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) ایک ایسے خط پر ہیں جو مبدا میں سے گذرنا ہے اور نیز یہ نقطے مبدا سے مساوی فاصلوں پر ہیں۔ اس لیے مبدا ہر اس وتر کی تنصیف کرتا ہے جو اس میں گذرتا ہے اور اس لیے اس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں۔

مساوات (۴) (دفعہ ۱۴۰) سے ظاہر ہے کہ اگر لا، ما تو ثابت ہوگا اور جیسے لا، بڑھیکا، ما بھی بڑھیکا اور لا اور ما کے اس اضافہ کی کوئی حد نہیں ہے۔ پس منحنی کچھ ایسا ہے جو دفعہ ۱۴۰ کے نقشہ میں دکھایا گیا ہے اور وہ دو لامتناہی شاخوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

۱) کو زائد کا قاطع محور کہتے ہیں۔ وہ خط جو ج میں سے

گذرتے ہوئے ۱) پر عمود ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا، لیکن اگر اس خط پر ب، ب ایسے نقطے ہوں کہ ب ج = ج ب = ب تو خط ب ب کو مزدوج محور کہتے ہیں۔

(۱۸۸)

۱۴۲۔ زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا۔
 دفعہ ۱۴۰ کی شکل میں چونکہ س ن = ز م ن ماس لیے

$$س ن = ز م ل = ز (ج ل - ج م) = ز (لا - لا) = ز لا - لا$$

$$نیر س ن = ز م م ن = ز (ج ل + ج م) = ز (لا + لا) = ز لا + لا$$

۱۴۳۔ زائد کی قطبی مساوات مرکز کو قطب قرار دیکر اس طرح معلوم

کی جاسکتی ہے کہ لا کی بجائے رجم طہ اور ما کی بجائے رجب طہ درج کیا جائے۔ چنانچہ $\frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{ا^۲}{ب^۲} = ۱$ میں اندراج کرنے سے

$$۱ = \frac{رجم طہ^۲}{ب^۲} - \frac{ا^۲}{ب^۲}$$

$$یا \quad \frac{۱}{رجم طہ} = \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب} \quad (۱)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو شکل

$$\frac{۱}{رجم طہ} = \frac{ا}{ب} - \left(\frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \right) \text{ جب } طہ^۲ = ۱ \quad (۲)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ طہ صفر ہو تو $\frac{ا}{ب}$ بڑے سے بڑا ہوتا ہے یعنی رقم سے کم جیسے جیسے طہ بڑھتا ہے $\frac{ا}{ب}$ گھٹتا ہے اور صفر

ہوتا ہے جبکہ جب $طہ^۲ = \frac{ب^۲}{ا^۲}$ ، اس لیے طہ کی اس قیمت کے لیے

ر لا متناہی ہے۔ اگر جب $طہ < \frac{ب^۲}{ا^۲}$ تو $\frac{ا}{ب}$ منفی ہوگا اور اس لیے

وہ سمتی نیم قطر جو محور کے ساتھ جب $\frac{ب}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ سے بڑا زاویہ بناتا ہے منحنی

سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا۔

(۱۸۹) ۱۶۴۔ پچھلے باب کے بہت سے نتیجے زائد کے لیے بھی درست ہیں اور جو ثبوت وہاں دے گئے ہیں ان میں صرف ب کی علامت کو بدلتے کی ضرورت ہے۔ اس لیے ہم صرف ان نتیجوں کو بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ زائد کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{ب}$$

ہے -

(۱) خط $ما = م + لا$ | $لا م - ب$ کی تمام قیمتوں کے لیے
ماس ہے [دفعہ ۱۱۴]

(۲) $(لا، ما)$ پر کے ماس کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ب} \quad \text{ہے [دفعہ ۱۱۵]}$$

(۳) $(لا، ما)$ کے قطبی کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ب} \quad \text{ہے [دفعہ ۱۱۹]}$$

(۴) $(لا، ما)$ پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{لا - لا}{لا} = \frac{ما - ما}{ب} \quad \text{ہے [دفعہ ۱۱۷]}$$

(۵) خط $ل لا + م ما - ن =$ منحنی کو مس کرے گا اگر $ل$

$ب - م = ن$ [دفعہ ۱۱۶]

(۶) خط $لا جم ع + ما جب ع =$ منحنی کو مس کرے گا اگر

$ع = لا جم ع - ب جب ع$ [دفعہ ۱۱۶]

(۷) زائد کے مرتب دائرہ کی مساوات $لا + ما = لا - ب$ ہے [دفعہ ۱۲۱]

مرتب دائرہ صریحاً خیالی ہوگا جبکہ $لا > ب$ اور ایک نقطہ میں تحویل ہوگا جبکہ $لا = ب$

(۸) وہ ہندسی مسائل جو دفعہ ۱۲۶ میں ثابت کئے گئے ہیں زائد کیلئے

بھی درست ہیں۔

(۹) زائد کے ان تمام دتروں کے نقاط وسطی کا طریق جو $م = لا$ کے

$$متوازی ہوں خط مستقیم $م = لا$ ہے جہاں $م = \frac{ب^2}{ا}$ [دفعہ ۱۲۸]$$

۱۳۵ — خطوط $م = لا$ ، $م = لا$ مزدوج ہیں اگر (۱۹۰)

$$م = \frac{ب^2}{ا}$$

یہ دو قطر منحنی سے ان نقطوں پر ملتے ہیں جن کے فصلے مساواتوں

$$لا = \left(\frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ا} \right) = \left(\frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ا} \right) = ۱$$

سے حاصل ہوتے ہیں پہلی مساوات سے $لا$ کی حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر $م > \frac{ب}{ا}$ اور

دوسری مساوات سے حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر $م > \frac{ب}{ا}$ لیکن چونکہ $م =$

$$\frac{ب^2}{ا} \text{ اس لیے } م \text{ اور } م \text{ دونوں } \frac{ب}{ا} \text{ سے کم نہیں ہو سکتے اور نہ } \frac{ب}{ا}$$

$\frac{ب}{ا}$ سے بڑے ہو سکتے ہیں۔

اس لیے زائد کے دو مزدوج قطروں میں سے ایک اس سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا اس سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔

$$\text{یہ دو مزدوج قطر منطبق ہونگے اگر } م = \pm \frac{ب}{ا}$$

۱۳۶ — فرض کرو کہ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے $ن$ ہیں۔ فرض کرو کہ $ن$ کے محدود $لا$ ، $ما$ اور $د$ کے محدود $لا$ ، $ما$ ہیں۔ دفعہ ۱۳۴

کی رو سے اگر ان میں سے ایک نقطہ حقیقی ہے تو دوسرا خیالی ہوگا۔

ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{لا}{ب} = \frac{ما}{ا} \quad \text{اور} \quad \frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب}$$

ہیں۔ پس دفعہ ۱۴۴ (۹) سے

$$(۱) \dots\dots\dots \therefore = \frac{لا\ لا}{ا\ ب} - \frac{ما\ ما}{ا\ ب}$$

$$\frac{لا^۲}{ا\ ب} = \frac{ما^۲}{ا\ ب}$$

اس لیے

(۱۹۱) یا چونکہ (لا، ما) اور (لا، ما) دونوں معنی پر ہیں اس لیے

$$\frac{لا^۲}{ا\ ب} (۱ - \frac{لا^۲}{ا\ ب}) = (\frac{ما^۲}{ا\ ب} + ۱)$$

$$(۲) \dots\dots\dots یا \quad \frac{لا^۲}{ا\ ب} - = \frac{ما^۲}{ا\ ب} \quad \therefore لا^۲ \pm \frac{ا}{ب} ما = ۱ - \dots\dots\dots (۲)$$

$$(۳) \dots\dots\dots اور \quad \therefore ما^۲ \pm \frac{ب}{ا} لا = ۱ - \dots\dots\dots (۳)$$

سے (۲) اور (۳)

$$ج ن + ج د = لا + ما - \frac{لا^۲}{ا\ ب} - \frac{ما^۲}{ا\ ب}$$

$$= \left(\frac{لا^۲}{ا\ ب} - \frac{لا^۲}{ا\ ب} \right) - \left(\frac{ما^۲}{ا\ ب} - \frac{ما^۲}{ا\ ب} \right)$$

$$= ۰ - ۰ =$$

اس لیے دو فرد و ج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل

ہوتا ہے جیسا کہ ناقص کی صورت میں بھی تھا۔

۱۴۷ — تعریف — متقارب وہ خط مستقیم ہے جو منحنی سے

لاتنا ہی پر کے دو نقطوں پر ملتا ہے لیکن یہ خط پورا کا پورا لاتنا ہی نہیں ہوتا۔

زائد کے متقارب معلوم کرنا

ان نقطوں کے فصل معلوم کرنے کے لیے جہاں خط مستقیم $ما = م$ لا
+ ج منحنی کو قطع کرتا ہے مساوات

$$1 = \frac{لا^2}{ا^2} - \frac{(م + لا)^2}{ب^2}$$

$$یا \quad لا^2 \left(\frac{1}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2} \right) - لا \frac{2م}{ب} - \frac{ج^2}{ب^2} = 1 \dots (۱)$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کی دونوں اصلیں لاتنا ہی ہونگی اگر
لا^۲ اور لا دونوں کے سر صفر ہوں یعنی

$$اگر \quad \frac{1}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2} = 0 \quad اور \quad م = ج = 0$$

پس ج = 0 اور م = $\pm \frac{ب}{ا}$ حاصل ہونا چاہئے (۱۹۲)

$$اس لیے زائد \quad 1 = \frac{لا^2}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2}$$

کے دو حقیقی متقارب ہیں جن کی مساواتیں $ما = \pm \frac{ب}{ا} لا$ ہیں، یا ایک
مساوات میں انہیں بیان کیا جائے تو

$$لا^2 - \frac{ا^2}{ب^2} م^2 = 0 \dots (۲)$$

ب، ب میں سے قاطع محور کے متوازی اور ۱، ۲ میں سے محور
محور کے متوازی خطوط کھینچو تب (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ متقارب اس
مستطیل کے وتر ہیں جو اس طرح بنتا ہے۔

ناقص کے کوئی حقیقی نقطے لاتنا ہی پر نہیں ہوتے اور اس لیے اس کے متقارب خیالی ہوتے ہیں۔

دفعہ ۱۴۵ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہر متقارب منطبق مزدوج قطروں کے ایک زوج پر واقع ہوتا ہے۔

۱۴۸۔ کوئی خط مستقیم جو ایک متقارب کے متوازی ہو منحنی سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ پر ملیگا۔

کیونکہ مساوات (۱) (دفعہ ۱۴۶) کی ایک اصل لاتنا ہی ہوگی اگر

لا^۲ کا سر صفر ہو۔ یہ صورت اس وقت ہوگی جبکہ $m = \pm \frac{b}{a}$ ۔ اس لئے خط

$m = \pm \frac{b}{a}$ لا + ج منحنی سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ پر ملیگا خواہ ج کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۱۴۹۔ اس زائد کی مساوات جس کا قاطع محور بب^۲ اور مزدوج محور ا^۲ ہو

$$(۱) \dots\dots\dots '۱ = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} -$$

ہے۔ یہ زائد اور ابتدائی زائد جس کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots '۱ = \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$$

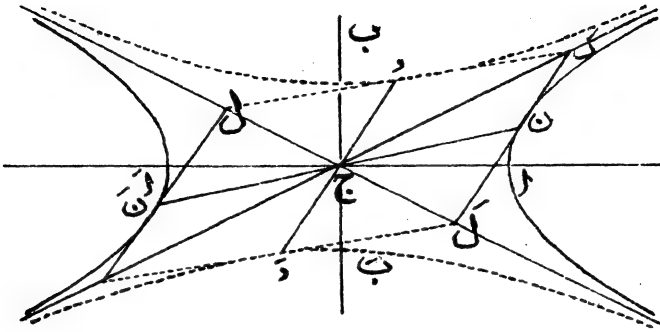
ہے ایک دوسرے کے مزدوج کہلاتے ہیں۔

(۱۴۳) ہم مزدوج زائدوں کے ایک زوج کے چند خواص ذیل میں درج کرتے ہیں:-

(۱) ان دو زائدوں کے متقارب ایک ہی ہوتے ہیں۔

(۲) اگر دو قطر ایک زائد کے لحاظ سے مزدوج ہوں تو دوسرے کے لحاظ سے بھی مزدوج ہوں گے۔

(۳) زائدوں (۲) اور (۱) کی مساواتیں [دفعہ ۱۴۳] اشکال



$$\frac{\text{جب}^2 \text{طہ}}{ب^2} - \frac{\text{جہ}^2 \text{طہ}}{ا^2} = \frac{1}{ر^2}$$

$$\frac{\text{جبا}^2 \text{طہ}}{ب^2} - \frac{\text{جہ}^2 \text{طہ}}{ا^2} = \frac{1}{ر^2} -$$

میں بھی لکھی جا سکتی ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ طہ کی کسی قیمت کے لیے ر ایک منحنی کے لیے مثبت اور دوسرے کے لیے منفی ہے۔

پس ہر قطر ایک منحنی سے حقیقی نقطوں پر اور دوسرے منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔ اس کے علاوہ ان دو منحنیوں کے نیم قطروں کے طول طہ کی تمام قیمتوں کے لیے ارشتہ ر اے۔ ر اے سے مرعوط ہوتے ہیں۔ (۴) اگر دو مزدوج قطر منحنیوں (۲) اور (۱) کو علی الترتیب ن اور د پر قطع کریں تو

ج ن ا۔ ج د = د ا۔ ب ا
فرض کرو کہ ن کے محدود لا، ا اور د کے محدود لا، ا ہیں۔

تب ج ن اور ج و کی مساواتیں

$$\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = ۰ \text{ اور } \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = ۰$$

ہیں۔ مزدوج قطروں کی شرط م م = $\frac{ب^۲}{ب}$ سے حاصل ہوتا ہے

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{لا^۲}{ب} - \frac{ما^۲}{ب} = ۰$$

$$\frac{لا^۲}{ب} = \frac{ما^۲}{ب}$$

یا
اور چونکہ (لا، ما) منحنی (۲) پر اور (لا، ما) منحنی (۱) پر ہے اسلئے

$$\frac{لا^۲}{ب} (۱ - \frac{لا^۲}{ب}) = \frac{ما^۲}{ب} (۱ - \frac{لا^۲}{ب})$$

$$\frac{لا^۲}{ب} = \frac{ما^۲}{ب}$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{لا}{ب} \pm \frac{ما}{ب} = ۰$$

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{لا}{ب} \pm \frac{ما}{ب} = ۰ \text{ سے اور اس لیے (۳)}$$

$$\text{پس ج ن} - \text{ج د} = لا + ما - لا - ما$$

$$= لا + ما - \frac{لا^۲}{ب} - \frac{ما^۲}{ب}$$

$$= (لا - \frac{لا^۲}{ب}) - \frac{ما^۲}{ب}$$

ج ن^۲ - ج د^۲ = ج^۲ - ب^۲ ^{۱۰}
 (۵) وہ متوازی الاضلاع جو ن، د، د پر کے ماسوں سے بنتا
 مستقل رقبہ کا ہوتا ہے۔

یہ متوازی الاضلاع ج ن × ج د × ج ب ن ج د کے مساوی
 یا ج د × ج ف کے مساوی ہے جہاں ج ف وہ عمود ہے جو ج سے
 ن پر کے ماس پر کھینچا گیا ہے۔

اب ن پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ب} = ۱$$

ہے۔ اسلئے

$$ج ف = \frac{۱}{\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}}$$

$$اور ج د = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = \frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} \quad (۶۴)$$

اس لیے ج د × ج ف = ج ب
 (۶) متقارب، ن د اور ن د کی تصنیف کرتے ہیں۔

اگر ن د کے وسطی نقطہ کے محدود لا، ما ہوں تو

$$۲ = لا + لا اور ۲ = ما + ما$$

$$\frac{لا}{۱} = \frac{لا + لا}{۲} = \frac{لا \pm لا}{۲} = \frac{لا}{۱} \pm \frac{لا}{۲}$$

۱۰ ج ن اور ج د کو مزدوج نیم قطر نہیں سمجھنا چاہئے کیونکہ نقطے ن اور د ایک ہی رائے پر
 نہیں ہیں۔ خط ج د ابتدائی رائے کو دو خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے اور اگر یہ نقطے د^۲
 ہوں تو (۳) سے ج د^۲ = ج د^۲

اس لیے ن د اور ن د کے نقاط وسطیٰ سب ذیل خطوں میں سے ایک یا دوسرے پر ہیں :

$$\frac{1}{b} \pm \frac{1}{a}$$

نیز چونکہ ج ن ک د ایک متوازی الاضلاع ہے اس لیے ج ک، ن د یا ن د کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے وہ متقاربوں میں سے ایک ہے، اس لیے د، د پر کے تماس، د اور د پر کے تماسوں سے متقاربوں پر ملتے ہیں (۷) زائدوں (۲) اور (۱) کے لحاظ سے (لا، ما) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ اور } ۱ = \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب}$$

ہیں۔ اس لیے ان منحنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ اگر (۲) پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو (۱) کے لحاظ سے اس نقطہ کا قطبی

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ یا } ۱ = \frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب}$$

ہے۔ لیکن یہ آخری مساوات نقطہ (لا، ما) پر (۲) کے تماس کی مساوات ہے اور یہ نقطہ، ن میں سے گزرنیوالے قطر کا دوسرا سر ہے۔

پس اگر ایک زائد کے کسی نقطہ سے مزدوج زائد کے دو تماس

ن ق، ن ق کھینچے جائیں تو نقطہ ق ق ابتدائی زائد کو ن میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر مس کرے گا۔

۱۵۰۔ مزدوج قطروں کے کسی زوج کو محاور قرار دیکر زائد

مساوات معلوم کرنا۔

زائد کے قاطع محور اور فردوج محور کے حوالے سے زائد کی مساوات

$$1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

ہے۔ چونکہ استحالہ میں مبداء کا مقام تبدیل نہیں ہوتا اس لیے استحالہ شدہ مساوات کو حاصل کرنے کے لیے مساوات بالا میں لا، ما کی بجائے شکل ل لا + م، ما، ل لا + م، م، م کے محلے درج کرنا ہونگے [دفعہ ۵۱]۔
پس زائد کی مساوات شکل

$$(1) \dots\dots\dots 1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

کی ہوگی۔

بموجب فرض محور لا ان دتروں کی تنصیف کرتا ہے جو محور ما کے متوازی ہیں۔ اس لیے لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے (۱) سے معلوم کردہ ما کی دو قیمتیں مساوی اور مختلف علامت ہونی چاہئیں۔ اس لئے
ھ = ۰ اور اس لیے مساوات کی شکل

$$(2) \dots\dots\dots 1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

ہوگی۔

دو نیم فردوج قطروں میں سے ایک حقیقی ہے اور دوسرا خیالی۔ اگر ان کے طول د اور ہا۔ آت ہوں تو چونکہ یہ طول محاور لا اول ما پر کے متعلق ہیں اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے
آ = ۱ = ۱ = ب ب آ

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$(3) \dots\dots\dots 1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

ہے۔

۱۵۱۔ چونکہ منحنی کی مساوات کی شکل وہی رہتی ہے جو پہلے تھی اس لیے

وہ تمام تحقیقاتیں جن میں یہ فرض نہیں کیا گیا تھا کہ محاور ایک دوسرے کے
 علی القیاس ہیں اب بھی درست رہتی ہیں۔ مثلاً دفعہ ۴۴ کی مساواتیں
 (۱) (۲) (۳) (۵) اور (۹) میں کسی تبدیلی کی ضرورت نہیں۔ دفعہ
 ۴۷ میں بھی کوئی تبدیلی نہیں کرنی پڑے گی چنانچہ زائد کے متقاربوں کی مساوات

$$\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۰ \text{ مائل ہوگی جبکہ زائد کی مساوات } \frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۱ \text{ ہو۔}$$

(۱۹۷) مثال ۱۔ $\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۱$ کے لحاظ سے $\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} = ۱$ پر کے

کسی نقطہ کا قطبی، $\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کو مس کرے گا۔

مثال ۲۔ اگر $\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۱$ کے لحاظ سے نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما)

کے قطبی ایک دوسرے کے علی القیاس ہوں تو $\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} = ۱$ ۔

مثال ۳۔ اگر $\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۱$ کے لحاظ سے نقطہ (ع، ب) کا قطبی

$\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کو مس کرے تو نقطہ (ع، ب) قائم زائد لا۔ ما۔ $\frac{لا}{۳} = ۱$ ۔

پیر ہوگا۔
 مثال ۴۔ ایک دائرہ دو ثابت عمود وار خطوں کو اس طرح قطع کرے گا
 کہ ہر ایک مقطع معلومہ طول کا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک
 قائم زائد ہے۔

مثال ۵۔ $\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۱$ کے لحاظ سے $\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کے ماسوں کے
 قطب زائد $\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۱$ پر واقع ہوں گے۔

نیز $\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۱$ کے لحاظ سے $\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کے ماسوں کے
 قطب دائرہ لا۔ ما پر واقع ہوں گے۔

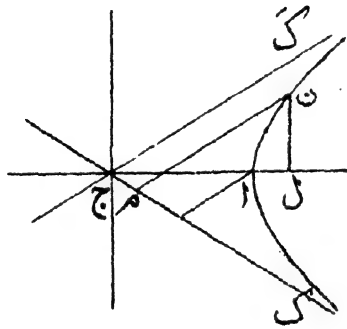
۱۵۲۔ زائد کے متقاربوں کو محدودوں کے محور قرار دیکر ان کے

حوالے سے زائد کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ شکل میں متقارب ج ک، ج گ ہیں اور فرض کرو کہ

زاد یہ (ج ک = ع اس لیے س ع = $\frac{ب}{ا}$ -

فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ (لا، ما) ن ہے اور فرض کرو کہ ن کے
محدد ج ک اور ج گ کے حوالے سے لا، ما ہیں۔ ن کو ج ک
کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ج گ سے مل پڑتا ہے۔ ن ل کو
قاطع محور پر عمود کھینچو۔



تب ج م = لا، م ن = ما، ج ل = لا، ل ن = ما

اب ج ل = ج م جم ع + م ن جم ع

یا لا = (لا + ما) جم ع (۱)

نیز ل ن = م ن جب ع - ج م جب ع

یا ما = (لا - ما) جب ع (۲)

پس مساوات

$$۱ = \frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ا}$$

(۱۹۸)

میں ابدال کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{جم}^2 \text{ع} (لا + ما) = \frac{\text{جیا}^2 \text{ع} (ما - لا)}{ب^2} \quad (۳)$$

لیکن مس ع = $\frac{ب}{ا}$ ، اس لیے $\frac{ب}{ا} = \frac{\text{جم}^2 \text{ع}}{ب^2} = \frac{ا}{ا + ب}$ ، اس لیے
 زبروں کو اڑا دینے سے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ لا ما = لا + ب$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔
 متقاربوں کے حوالے سے مزدوج زائد کی مساوات

$$۲ لا ما = - (ا + ب)$$

ہوگی۔
 ۱۵۳۔ زائد متقارب، اور مزدوج زائد کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لا}{ا} - \frac{ب}{ب} = ۱، \frac{لا}{ا} - \frac{ب}{ب} = ۰، \text{اور} \frac{لا}{ا} - \frac{ب}{ب} = -۱$$

ہیں۔
 اگر محدودوں کے محوروں کو کسی طریقہ پر تبدیل کیا جائے تو نئی
 مساواتیں حاصل کرنے کے لیے ہمیں تینوں صورتوں میں وہی اندراج
 عمل میں لانے چاہئیں۔

پس محدودوں کے محوروں کے تمام محلوں کے لیے زائد کی
 مساوات اور مزدوج زائد کی مساوات میں جو دو مستقلات شامل ہوتے
 ہیں وہ مساوی اور مختلف علامت ہوتے ہیں اور ان مساواتوں اور
 متقاربوں کی مساوات میں جو فرق ہے وہ صرف مستقلوں کا ہے۔

۱۵۴۔ جب ایک زائد کے متقاربوں کے درمیان قائمہ زاویہ (۱۹۹)
 ہوتا ہے تو زائد کو قائم زائد کہتے ہیں۔

زائد کے متقاربوں کے درمیان زاویہ ۲ مس ۱ ب کے مساوی ہوتا ہے اور اس لیے جب یہ زاویہ قائمہ ہو تو ب = ۱۔ اسی سبب کی بنا پر بعض اوقات اس منحنی کو مساوی المجاور زائد کہتے ہیں۔

۱۵۵۔ زائد لا ما = ج کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

نقطہ (ج ع، ج ع) صریحاً لا ما - ج = ۰ پر ہے خواہ ع کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اس نقطہ کو 'ع' سے موسوم کرو۔
تب دو نقطوں 'ع'، 'ع' کو ملانے والا خط

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

یعنی $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$ ہے۔ اس لیے 'ع' - 'ع' سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$(۱) \dots \dots \dots = ۰ = (ع + ع) - ع$$

اب رکھو ع = ع تو ع پر کے مماس کی مساوات

$$(۲) \dots \dots \dots = ۰ = ۲ ع - ع$$

حاصل ہوگی۔

(۲) سے

$$\frac{لا ج}{ع} + ما ج = ۲ ج$$

یا مساوات (۳) کو استعمال کرتے دفعہ ۱۱۹ کی طرح ہم معلوم

کرتے ہیں کہ لا ما - ج = ۰ کے لحاظ سے نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

$$لا ما + ما لا = ۲ ج$$

ہے۔

مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مخروطی قائم زائد ہے تو ع پر کے عماد کی مساوات

$$(لا - ج ع) - (ع - ما) = \frac{ج}{ع} = ۰$$

یا لا ع - ع ما - ج ج + ج = ۰ (۴) ہے۔

مثال ۱۔ لا ما = ج میں ایک مثلث بنایا گیا ہے (۲۰۰)

جس کے دو ضلع علی الترتیب ما + م لا = ۰ اور ما + م لا = ۰

کے متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع زائد م م لا ما

$$= ج (م + م) کو لف کرتا ہے۔$$

ع، ع کو ملانے والا خط

$$لا - ما ع - ج (ع + ع) = ۰$$

ہے۔ یہ خط، ما + م لا = کے متوازی ہوگا اگر م، ع، ع = ۱۔
اسی طرح ع، ع کو ملائیو لا خط، ما + م لا = کے متوازی ہے
اگر م، ع، ع = ۱

پس م، ع = م، ع = (۱)
اب ع، ع کو ملائے والا خط

$$لا + ما، ع، ع - ج (ع + ع) = ۰$$

ہے، یا (۱) سے م لا + ما، ع - ج (م + م) ع = ۰
اس کا لفاف، ع کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$۲ م، م لا = ج (م + م) ۲$$

مثال ۲۔ کوئی خط مستقیم ایک زائد کو نقطوں ق اور ق پر اور
اس کے متقاربوں کو نقطوں م اور م پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق ق
اور م م کے وسطی نقطے ایک ہی ہیں۔

مثال ۳۔ ایک زائد کے کسی تماس کا وہ حصہ جو متقاربوں
درمیان منقطع ہوتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک زائد کا کوئی تماس متقاربوں سے ایک ایسا
مثلث قطع کرتا ہے جس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ خطوط ما - م لا = ۰ اور ما + م لا = ۰
م کی تمام قیمتوں کے لیے زائد لا ما = ج کے مزدوج قطر ہیں۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ خط لا = ۰ زائد لا ما + لا م لا = ۰ کا
ایک متقارب ہے۔

دوسرے متقارب کی مساوات کیا ہے؟
مثال ۷۔ لا ما - لا م - لا م = ۰ کے متقارب معلوم کرو۔

امدادی دائرہ کا تماس لی ق ہو تو ج لی = ا ق ا ج ق۔ اسلئے
ا ج ق زاویہ طہ ہے۔

نقطوں طہ، طہ میں سے گزرنے والے وتر کی مساوات

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

اس لیے حسب دفعہ ۱۲۳

$$\frac{1}{a} \text{ حجم } \frac{1}{b} (\text{طہ} - \text{طہ}) = \frac{1}{b} \text{ جب } \frac{1}{a} (\text{طہ} + \text{طہ}) + \text{حجم } \frac{1}{a} (\text{طہ} + \text{طہ}) \dots (۱)$$

طہ پر کے تماس کی مساوات

$$\frac{1}{a} = \text{حجم } \text{طہ} + \frac{1}{b} \text{ جب } \text{طہ} \dots (۲)$$

ہے۔ نیز طہ پر کا عماد

$$1 (\text{لا} - \frac{1}{a}) + b (\text{ما} - \text{ب مس طہ}) \backslash \text{ب ب طہ} =$$

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ ب ما} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ ب ما} \dots (۳)$$

ہے۔

مثال۔ اگر چار نقطوں (ا ق طہ، ب مس طہ) وغیرہ پر
عماد ایک نقطہ پڑیں تو ثابت کرو کہ

$$\pi (1 + n^2) = \text{طہ} + \text{طہ} + \text{طہ} + \text{طہ}$$

اور جب $(ط_۱ + ط_۲) + جب (ط_۲ + ط_۳) + ميب (ط_۳ + ط_۴) = [خسب ۱۳۹]$
 ۱۵۸ - ایک ناقص یا زائد کی مساوات کو جبکہ اس کو مبدا قرار دیا جائے (۲۰۲)

اس مساوات میں لا کی بجائے لا۔ لکھ کر معلوم کیا جاسکتا ہے جو مرکز کو مبدا لینے سے معلوم کیجا چکی ہے۔ چنانچہ یہ مساوات ہوگی

$$۱ = \frac{۲}{ب} - \frac{۲(۱-۱)}{۲}$$

$$یا \quad ۱ = \frac{۲}{ب} - \frac{۲}{۲} \quad (۱)$$

اب اگر اس سے قریبی ماسک کا فاصلہ ثابت رہے (فرض کرو ف) اور خروج مرکز اکائی ہو جائے تو یعنی ایک مکانی ہو جائے گا جس کا وتر خاص ۴ ف ہوگا۔

مکانی کی مساوات کو (۱) سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ (۱-۱) = ۰
 = ف (۱+ز) = ۲ ف اس لیے $\frac{۲}{ب} = ۲ ف - پس (۱) سے$

$$۱ = \frac{۲}{ب} - \frac{۲}{۲} = ۰$$

یا چونکہ لا لامتناہی ہے

$$۲ = ۴ ف - لا$$

اس لیے مکانی ایک ناقص یا زائد کی انتہائی شکل ہے جس کا وتر خاص محدود ہے لیکن محور اعظم اور محور اصغر لامتناہی ہیں اور مرکز اور

دوسرا ماسک لامتناہی ہیں۔
 مکانی کے خواص کو ناقص یا زائد کے خواص سے اخذ کرنا طالب علم کے لیے بہت مفید ہوگا۔

۱۵۹ — فرض کرو کہ ایک مخروطی کا ماسکہ مرتب پر ہے۔
ماسکہ کو مبدا، قرار دو اور فرض کرو کہ مرتب محور ما ہے، تب
مخروطی کی مساوات ہوگی

$$\begin{aligned} \text{یا} \quad \text{لا}^2 + \text{ما}^2 &= \text{زا}^2 \\ \text{لا}^2 (1 - \text{زا}^2) + \text{ما}^2 &= 0 \end{aligned}$$

(۲-۳) یہ مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو حقیقی ہونگے اگر زاکائی
سے بڑا ہو، منطبق ہونگے اگر زاکائی کے مساوی ہو، اور خیالی ہونگے اگر
زاکائی سے کم ہو۔
پس ہمیں نہ صرف ناقص، مکانی اور زائد کو ہی مخروطیاں سمجھنا
چاہیے بلکہ دو حقیقی یا خیالی خطوط مستقیم کو بھی۔
یہ ذہن نشیں رہے کہ ایک دائرہ کا مرتب لامتناہی فاصلہ پر
ہوتا ہے، نیز دو متوازی خطوط مستقیم کے ماسکے اور مرتب سب کے سب
لامتناہی پر ہوتے ہیں۔

ساتویں باب پر مثالیں

- ۱۔ اوب، ج و د دو خطوط مستقیم ہیں جو ایک دوسرے کو
علی القواکم تضییف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ ن کا طریق جو اس طرح
حرکت کرتا ہے کہ $\text{ا} \times \text{ن} = \text{ب} \times \text{ن} = \text{ج} \times \text{ن} = \text{د} \times \text{ن}$ ، ایک قائم قطع زائد
- ۲۔ ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو
ثابت خطوط مستقیم و لا، و ما کو علی الترتیب سر پر قطع کرتا ہے۔ خط
ن سر پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے ایسا کہ $\text{ن} = \text{د} \times \text{ن}$ ۔ ثابت کرو کہ
ن کا طریق ایک زائد ہے جس کے مقارب و لا، و ما ہیں۔
- ۳۔ ایک خط مستقیم کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم پر ہیں اور وہ

ایک ثابت نقطہ میں سے بھی گذرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔
 ۴۔ ایک خط مستقیم کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم پر ہیں اور وہ ان سے مستقل رقبہ کا ایک مثلث قطع کرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۵۔ ۱۰ اور ۱۱ دو ثابت خطوط مستقیم ہیں اور ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے ۱۰ اور ۱۱ پر عمود ن م اور ن ل ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو اگر دو اربعۃ الاضلاع و م ن ل مستقل رقبہ کا ہو۔

۶۔ ایک قائم قطع زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کا فاصلہ اس عمودی فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقطہ کے قطبی کا زائد کے مرکز سے ہے۔

۷۔ ایک زائد کے نقطہ ن کا معین ن ل ہے اور ن گ عماد ہے جو محور سے گ پر ملتا ہے۔ اگر ل ن کو خارج کیا جائے اور وہ متقارب سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق گ متقارب کے علی القوائم ہے۔

۸۔ اگر ایک زائد اور اس کے مزدوج زائد کے مزدوج المکز زائد (۲۰۴)

ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{r''}$

۹۔ وہ دو خطوط مستقیم جو ان نقطوں کو ملاتے ہیں جن پر ایک زائد کے کوئی دو مماس متقاربوں سے ملتے ہیں مماسوں کے وتر مماس کے متوازی اور اس سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک زائد کے کسی نقطہ پر کے مماس کا وہ حصہ جو نقطہ مماس اور قاطع محور کے درمیان منقطع ہوتا ہے ان عمودوں کے طولوں کے درمیان موسیقی اوسط ہے جو مماسوں سے اس نقطہ پر کے عماد پر کھینچے گئے ہوں۔

۱۱۔ اگر کسی نقطہ و میں سے خط و ن ق کو ایک زائد کے ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہو اور یہ خط زائد کو ن پر اور و کے قطبی کو ق پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن ق کا نقطہ وسطی ہے۔

۱۲۔ ایک متوازی الاضلاع کو اس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کے اضلاع

ایک زائد کے متقاربوں کے متوازی ہیں اور اس کا ایک وتر زائد کا ایک وتر ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے وتر کی سمت مرکز میں سے گزرے گی۔

۱۳۔ ایک قائم زائد کے راس A ، B ہیں اور اس پر کوئی نقطہ C ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ ACB کے داخلی اور خارجی ناصف متقاربوں کے متوازی ہیں۔

۱۴۔ ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر کے سرے A ، B ہیں اور اس قطر کے عمود وار کسی وتر کے سرے C ، D ہیں۔ ثابت کرو کہ ACB کے نقطہ تقاطع کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۱۵۔ ایک زائد کے متقاربوں کو حوالے کے محاور قرار دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ زائد کے دو محاسوں کے نقطہ تقاطع کے مجدد نقاط تماس کے مجددوں کے درمیان موسیقی اوسط ہیں۔

۱۶۔ ایک زائد کے کسی نقطہ سے دوسرے زائد کے تماس کھینچے گئے ہیں جس کے متقارب وہی ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر تماس متقاربوں سے ایک مستقل رقبہ قطع کرتا ہے۔

۱۷۔ وہ خطوط مستقیم جو ایک مساوی الزام زائد کے کسی نقطہ سے کسی قطر کے سرے تک کھینچے گئے ہوں متقاربوں کے ساتھ مساوی المیلاں ہوتے ہیں۔

۱۸۔ قائم زائد ABC کے عمادی وتروں کے نقاط وسطی کا طریق $(A^2 - B^2) = C^2$ ہے۔

(۲۰۵)

۱۹۔ مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاورہ دو دئے ہوئے خطوط مستقیم پر ہیں اور یہ تمام مخروطی ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط کے قطب ایک قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔

۲۰۔ مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاورہ دو دئے ہوئے خطوط مستقیم پر ہیں اور یہ سب مخروطی ایک دئے ہوئے خط مستقیم کو مس کرتے

ہیں۔ ثابت کرو کہ ان محروطیوں کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا لغاف ایک مکانی ہے۔

۲۱۔ دو خطوط لا۔ ع۔ ما۔ بہ۔ = ۰، زائد لا ما = ج کے لحاظ سے مزدوج ہیں (یعنی ہر خط دوسرے کے قطب میں سے گذرتا ہے)۔

ثابت کرو کہ (ع، بہ) زائد لا ما = ۲ ج = ۰ پر ہے۔
۲۲۔ ایک دائرہ ایک زائد کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک متقارب سے ان چار نقاط تقاطع کے فاصلوں کا حاصل ضرب، دوسرے متقارب سے ان کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ اگر ایک قائم قطع زائد ایک دائرہ کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ان چار نقطوں کے اوسط محل کا مرکز مخینون کے مرکزون کے درمیان وسط میں ہے۔

۲۴۔ اگر ایک قائم زائد پر چار نقطے لے جائیں ایسے کہ کسی دو کو ملا کر وتر دوسرے دو کو ملانے والے وتر پر عمود ہو اور اگر ع، بہ، ج، ضہ، کسی ایک متقارب کے ساتھ ان خطوط مستقیم کے میلان ہوں جو ان نقطوں کو مرکز سے علی الترتیب ملانے سے حاصل ہو گئے ہیں تو ثابت کرو کہ مس مس عس بہ مس جہ مس ضہ = ۱

۲۵۔ زائد $\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۲} = ۱$ کے وتروں کا ایک سلسلہ اس دائرہ کے مماس ہیں جو زائد کے ماسکوں کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ زائد کے لحاظ سے ان وتروں کے قطبوں کا طریق $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ ہے۔

۲۶۔ اگر دو خطوط مستقیم ثابت نقطوں میں سے گذریں اور ان کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہمیشہ ایک ثابت خط کے متوازی رہے تو ثابت کرو کہ خطوط کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ ایک زائد کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خط مستقیم (۲۰۶)

سورج میں منقطع ہوتے ہیں۔

۲۸ — ایک مثلث کے دو اضلاع 'ا ب'، 'ج' کو دو تیرمان کر ان پر دو مساوی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کے تقاطع کا طریق ایک قائم زائد ہے جس کا مرکز 'ج' کا نقطہ وسطی ہے اور جو 'ا ب'، 'ج' میں سے گذرتا ہے۔

۲۹ — نصف قطر کا ایک دائرہ ایک قائم زائد کو جس کا مرکز 'ج' ہے چار نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ج' 'ف' + 'ج' 'ق' + 'ج' 'س' = 'ج' 'س' = ۲

۳۰ — اگر قائم زائد لا = 'ج' کے نقطوں ('لا'، 'ا')، ('لا'، 'ب')، ('لا'، 'پ')، ('لا'، 'م')

('لا'، 'م') پر کے عماد نقطہ (ع، 'ب') پر ملیں تو ثابت کرو کہ
ع = لا + لا + لا + لا اور ب = م + م + م + م + م + م

نیز لا لا لا لا لا = م م م م م = ج

۳۱ — ایک قائم زائد کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد زائد ایک نقطہ 'س' پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ زائد کا مرکز مثلث 'ف' 'ق' 'س' کا مرکز ہندسی ہے۔

۳۲ — اگر ایک قائم زائد کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ 'ف' 'ق' 'س' اس قطر کے دوسرے سرے میں سے گذرے گا جو 'س' میں سے گذرتا ہے۔

۳۳ — قائم قطعات زائد کے ایک سلسلہ کو جن کے متقارب لا = ہیں خط ما = ک نقطوں 'ف'، 'ق'، 'ف'، 'ق'، 'م' وغیرہ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق' وغیرہ پر کے عماد مساوی لا = م (ک) = کو مس کرتے ہیں۔

۳۴ — قائم زائد لا = ج = میں لا انتہا مثلث بنائے جاسکتے ہیں

جن کے سب اضلاع مکافی $ما^۲ = م$ والا کو مس کرتے ہوں۔
نیز مکافی میں لا انتہا مثلث بنائے جاسکتے ہیں جن کے اضلاع قائم زائد
کو مس کرتے ہوں۔

۳۵۔ ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر اس سے ایک
دائرہ کا تماس کھینچا جائے تو اس تماس کا طول ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو
ن سے دائرہ کے ایک ثابت تماس پر کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق
ایک مخروطی ہے جس کا دوتر خاص دائرہ کے قطر کے مساوی ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز ایک قائم زائد کے کسی نقطہ
ن پر ہے اور جس کا نصف قطر ن میں سے گزرنیوالے زائد کے قطر کے
مساوی ہے زائد کو تین دیگر نقطوں پر قطع کرتا ہے جو ایک مساوی الاضلاع
مثلث کے راس ہیں۔

۳۷۔ ایک زائد پر چار نقطے ا، ب، ج، ن ہیں اور ن میں
دو خطوط متقابلوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو مثلث ا، ب، ج کے اضلاع
سے علی الترتیب ل، م، ق اور ن، م، ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
ل : م : م : ق = ل : م : م : ق۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ کوئی خط مستقیم جو $ما^۲ = م$ والا = ۰ اور $لا^۲ = م$ ب ما
= ۰ کو ایسے نقطوں پر قطع کرے جو موسیقی مزدوج ہوں زائد لا ما + ۲ و ب = ۰
کو مس کرے گا۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا + ۲ ما - ۲ و = ۰ کا کوئی تماس دو زائدوں
لا (لا + ما) - ۳ و = ۰ اور ما (ما - لا) - ۳ و = ۰ سے موسیقی طور پر تقسیم
ہوتا ہے۔

۴۰۔ ہم مرکز مخروطیوں کے ایک نظام کے مرتب دے گئے ہیں۔

ثابت کرو کہ (۱) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دے ہوئے خط مستقیم کے
قطبوں کا طریق ایک مکافی ہے اور (۲) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دے ہوئے
نقطہ کے قطبی کا لاف ایک مکافی ہے۔

متفرق امثلہ (۲)

(۲-۸)

$$۱۔ \text{خطوں } لا + \frac{ا + ب}{ب} لا + ما - ا + ب + (ب - لا - ما) =$$

کے درمیانی زاویوں کے ناصف معلوم کرو۔

$$۲۔ \text{جواب : } (لا + ما) \{ (ب - لا - ما) - ۲ا + ب \} =$$

اُن دائروں کا مشترک وتر معلوم کرو جن کی مساواتیں

$$۲ = ۲ا + ب ط \text{ اور } ۲ - ۲ج - ج ط - ب = ۱$$

ہیں۔

$$\text{جواب : } ۲ (ا + ب ط - ج جم ط) - ب =$$

۳۔ ثابت کرو کہ اگر ایک دائرہ ایک دے ہوئے دائرہ کو علی القوام قطع کرے اور نیز ایک دے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرے تو دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

$$۴۔ \text{ایک ثابت نقطہ (ف گ) میں سے ایک خطِ مستقیم کو } \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲ا} =$$

کے کسی قطر کے متوازی کیلینچا گیا ہے اور یہ خطِ مستقیم مزدوج قطر سے قی پرمت ہے۔ ثابت کرو کہ قی کا طریق قائم زائد

$$(ا - ب) لا - ا ف + ما + ب گ لا =$$

ہے۔

$$۵۔ \text{اس مخروطی کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو جس کا خروج المکز}$$

$$۲۱ \text{ 'ماسکہ' (۰۰) اور مرتب لا + ما + ۱ = ۰ ہے۔}$$

$$\text{جواب : } (لا + ۱) (ا + ما) =$$

۶۔ اگر ان عمودوں کے پائین لی، ہوں جو ثابت نقطہ (ج) سے
 سے خطوط ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا = ۰ پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ
 لی ص کی مساوات (۱۔ ب) لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا = ۰ ہے۔ اس
 اخذ کرو کہ اگر خطوط کو مبدا کے گرد اس طرح گھمایا جائے کہ ان کے درمیان
 زاویہ مستقل رہے تو نقطہ (۱۔ ج) سے لی ص کا فاصلہ مستقل رہے گا۔
 ۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا قطر دائروں

$$لا + ۲ لا - ۳ = ۰ \text{ اور } لا + ۲ لا + ۳ لا - ۴ = ۰$$

کا مشترک وتر ہے۔

جواب: ۵ لا + ۵ لا - ۲ لا - ۳ لا - ۴ لا = ۱۸ = ۰
 ۸۔ اگر مکافی ۲ لا - ۳ لا = ۰ کے وتر ق کے عمادی مکانی (۲۰۹)
 کے اس پر قائمہ زاویہ بنے تو ق پر کے عماد مکانی
 ۱۶ لا - ۲ لا = (۱۶ - لا) = ۰

پر ملیں گے۔

۹۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص اور اس دائرہ کے مشترک مماس جو
 ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کے بیروں میں سے گزرتا ہے ایک مربع
 بناتے ہیں۔

۱۰۔ مخروطی (ل - ۲) لا - ۳ لا - ۴ لا - ۵ لا - ۶ لا = ۱۰
 کی مساوات اس کے متغیروں کو حوالے کے محاور قرار دیکر معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } لا = \frac{۱}{۲ لا + ۲ لا}$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے پائین جو مبدا سے خطوط مستقیم
 لا + ۲ لا - ۳ = ۰، لا + ۵ لا - ۶ = ۰، اور لا + ۱۵ لا - ۲۴ = ۰

پر کھینچے جائیں سب کے سب خط مستقیم ۳ لا + ما - ۸ = ۰ پر واقع ہوتے ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ اگر دائروں میں ۱ = ۰، ۲ = ۰، ۳ = ۰ (دونوں میں لا) اور ما کے سرکائی ہیں) کے نصف قطر ۱ اور ۲ ہوں تو وہ نقطے جن پر

دائروں کے محاذی مساوی زائدے بنتے ہیں دائرہ $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ سے ۲ پر ہیں۔

اگر اُس دائرہ کو جس کا قطر دئے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کو ملانے والا خط ہو ان کے ”مشابہت کا دائرہ“ کہا جائے تو ثابت کرو کہ کسی تین دائروں کے مشابہت کے تین دائرے جیکہ انہیں دو دو کو لیا گیا ہو ہم محور ہوتے ہیں۔

۱۳۔ ما - ۱۲ لا = ۰ کے دو نقطوں پر جن کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ ۲ ج ہے ماس پھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ ماس مکانی ما = ۱۲ (لا + ج - ۱) پر متقاطع ہوں گے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$ کے نقطوں (لا، ما) (لا، ما) ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{لا} \times \frac{۱}{ما} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = ۲$$

۱۵۔ دو دائرے جن کے قطر ایک قائم زائد کے متوازی وتروں کا ایک سلسلہ ہوں زائد کے دو ثابت نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ خطوط

$$لا - ۲ لا ما ق م ۲ = ۰ + ما = ۰$$

کے درمیانی زاویوں کے ناصف لا - ما = ۰ ہیں خواہ محوروں کے درمیان زاویہ کچھ ہی ہو۔

۱۷۔ ہم محو دائروں کا ایک نظام ایک دے ہوئے خط مستقیم سے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'ف'، 'ق'، وغیرہ پر قطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جن کے قطر 'ق'، 'ق'، 'ف'، 'ق'، وغیرہ ہیں ہم محوریوں کیونکہ مشترک بنیادی محور دے ہوئے خط مستقیم پر عمود ہے۔

۱۸۔ اگر ایک دائرہ جس کا مرکز (ع) ہے 'ما' = 'لا' = کو چار نقطوں پر قطع کرے جن میں سے تین ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں تو ثابت کرو کہ (۱) چوتھے نقطہ کے محدد (ع) = 'ا' = '۳' ہے (۲) اور (۲) دائرہ کا مرکز مکانی 'ا' = 'لا' = '۳' پر ہے۔

۱۹۔ ت سے ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کا محاس کھینچا گیا جو (۱) پر کے محاس سے محور اصغر کے مساوی طول قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ت مکانی $\frac{ما}{ب} = \frac{لا}{ا} + ۲$ پر ہے۔

۲۰۔ ایک دائرہ ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے ایک قطر کے سروں میں سے گزرتا ہے اور نیز ناقص کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا مرکز ناقص

$$ا' لا' + ا' ما' = (ا' - ب')$$

پر ہے۔

۲۱۔ ایک مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر عمودوں پائین نقاط (۲۵'۲۰)، (۱۶'۸)، اور (۹'۸) ہیں۔ مثلث کے راسوں کے محدد معلوم کرو۔

جواب: چار نقطوں (۱۵'۱۰)، (۱۰'۵)، (۵'۰)، اور (۳'۱۵) میں سے کوئی تین۔

۲۲ — دائروں کے ہم محور نظام $لا + ما + ۲گ - لا - ج = ۲$ میں سے دو دائرے لیے گئے ہیں جو ایک دوسرے کو علی القوام قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ اگر دائروں کے کسی ایسے زوج کے مشترک تماس پر نقطوں (ج، ۰) اور (۰، ج) سے عمود $ع' ع$ ہوں تو $ع' ع = ج = ۲$ —
 ۲۳ — مکانی $ما - ۲ = لا = ۰$ پر کوئی نقطہ ن ہے اور محور پر نقطہ ق ایسا ہے کہ $ق = ن$ ا جہاں ا مکانی کارا ہے —
 ثابت کرو کہ $ق، ن$ مکانی $ما + ۳۲ = لا = ۰$ کو لف کرتا ہے —

۲۴ — $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کے نقطہ (لا، ما) پر کا تماس دائرہ $لا + ما - ۲ = ۰$ سے نقطوں ق اور ق' پر ملتا ہے — ثابت کرو کہ مرکز اور ق، ق' میں سے گزرنے والے خطوط $لا + ما = ۰$ (لا ± ۲) ہیں —
 ۲۵ — ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُس مقطع کے محاذی جو اس پر خطوط $لا = ± ۱$ منقطع کرتے ہیں نقطہ (ج، ۰) پر ایک قائمہ زاویہ بنتا ہے — ثابت کرو کہ خط مستقیم محزوطی $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کو مس کرتا ہے —

۲۶ — ثابت کرو کہ اس مثلث کا نو نقطی دائرہ جو خطوط $لا + ۳ + ما$ —
 $۱۲ = ۰$ ، $لا - ۳ - ما - ۳۶ = ۰$ اور $لا = ۰$ سے بنتا ہے
 $۴ لا + ۴ ما - ۲۵ لا + ۲۴ ما + ۳۶ = ۰$
 ہے — نیز ثابت کرو کہ (۱) مثلث کا اندرونی دائرہ
 $لا + ما - ۱ لا + ۱ ما + ۹ = ۰$
 ہے اور (۲) وہ دائرہ جو پہلے ضلع کو اور دوسرے دو محدودہ ضلعوں کو
 مس کرتا ہے
 $لا + ما - ۱ لا - ۱۱ ما - ۴۹ = ۰$ ہے —

ثابت کرو کہ فوقی دائرہ دوسرے دو دائروں کو مس کرتا ہے۔

۲۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دائروں $لا + ما$

$- ۴ = ۰$ ، $لا + ما - ۶ - لا - ۸ + ۱۰ = ۰$ ، اور $لا + ما + ۲ - لا$

$- ۴ - ما - ۲ = ۰$ میں سے ہر ایک کو ایک قطر کے سروں پر مس کرتا ہے۔

جواب: $لا + ما - ۴ - لا - ۶ - ما - ۴ = ۰$

۲۸۔ ثابت نقطہ (مہک) سے مکانی $ما = ۴ - لا + لا + ۱$

کے ماس ت ف، ت ق کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف اور ق

پر کے عماد، د کی تمام قیمتوں کے لیے، خط $لا + ک + ما + ۶ + ک = ۰$

پر ملتے ہیں۔

۲۹۔ مکانی $ما - ۴ - لا = ۰$ کے گرد متساوی الاضلاع مثلث

کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے راس مخروطی

$$ما = (لا + ۱ + ۳) (لا + ۱) = ۴$$

پر ہیں۔

۳۰۔ اگر $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} =$ اپر دو نقطے ف، ق ہوں جنکے

خارج المرکز زاوے ط اور فہ رشتہ ق ط ط + ق فہ = ۲ کو پورا کرتے ہیں

تو ثابت کرو کہ ف ق ناقص

$$= \frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} + \frac{لا}{۱}$$

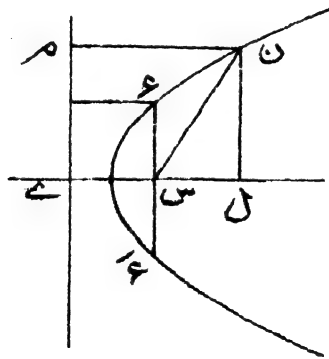
کو لف کرتا ہے۔



آٹھواں باب

مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو

۱۶۰۔ ایک مخروطی کی قطبی مساوات معلوم کرنا جبکہ ماسکہ قطب ہو۔
فرض کرو کہ ماسکہ میں اور سے مرتب ہے۔ فرض کرو کہ خروج مرکز
ز ہے۔



س سے کو مرتب پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ س سے ابتدائی
خط ہے۔

فرض کرو کہ وتر خاص e سے e' ہے تو z سے e

= س = ل (فرض کرو)
 فرض کرو کہ تختی کے کسی نقطہ ن کے محدود رطہ ہیں۔ فرض کرو کہ
 (۲۱۳) ن م ن لی علی الترتیب مرتب پر اور میں سے پر عمود ہیں۔ تب
 میں ن = ن م = ن ل = ن س + ن م میں سے
 یا ر = - زر جم طہ + ل

$$\therefore z+1 = \frac{1}{r}$$

اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ ϕ بنا ہے تو منحنی کی مساوات

$$\frac{d}{r} = 1 + z_j (p - e)$$

ہوگی۔ کیونکہ اس صورت میں سن سن، سن کے ساتھ زراویہ
 طہ۔ عہ بننا ہے۔

۱۶۱۔ اگر مرتبہ کے کسی نقطہ کے محدود راہ ہوں تو

رحم طہ = سس = ے = ل

اس لئے مرتب کی مساوات

$$\frac{U}{r} = z \text{ جمط}$$

ہے۔ اسی طرح $\frac{L}{r} = 1 + z$ (طہ - ص) کے مرتب کی مساوات

$$\frac{L}{r} = \text{زجم (ط - ع)}$$

-4-

اگر ماسکی وتر n میں n ہو اور n کا سمتی زاویہ θ تو n کا سمتی
زاویہ $\theta + \pi$ ہو گا۔ پس اگر $n = r$ میں $n = r$ تو

$$\frac{r}{r} = 1 + \text{زجم } \theta \text{ اور } \frac{r}{r} = 1 + \text{زجم } (\theta + \pi)$$

$$2 = \frac{r}{r} + \frac{r}{r} \therefore$$

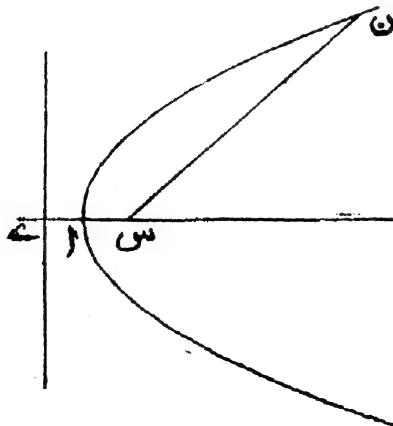
$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \text{ پس}$$

اس لئے کسی مخروطی میں نیم وتر خاص کسی ماسکی وتر کے
مقطعوں کے درمیان موسیقی اوسط ہوتا ہے۔

۲۶۲ — مخروطی $\frac{r}{r} = 1 + \text{زجم } \theta$ کو اس کی مساوات سے قسم کرنا۔ (۲۱۴)

(۱) فرض کرو $n = a$ تو منحنی مکانی ہے اور مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{a}{r} = 1 + \text{زجم } \theta$$



نقطہ ۱ پر جہاں منحنی محور کو قطع کرتا ہے

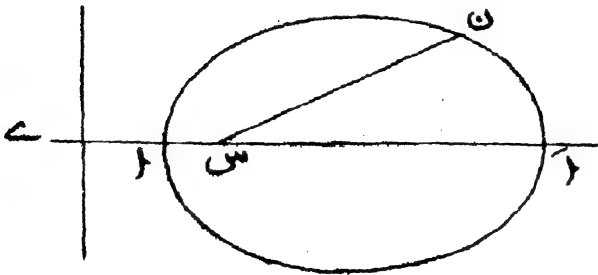
$$\text{طہ} = ۰ \text{ اور } \text{ر} = \frac{\text{ل}}{\text{پ}}$$

جیسے زاویہ طہ بڑھتا ہے (۱+ جم طہ) گھٹتا ہے یعنی ل گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے، اور ر بغیر کسی حد کے بڑھتا ہے یہاں تک کہ طہ = ۰ تو ر لانتہا ہی ہو جاتا ہے۔ جیسے طہ = ۲۲ کے آگے بڑھتا ہے (۱+ جم طہ) مسلسل بڑھتا ہے اور اس لیے ر مسلسل گھٹتا ہے یہاں تک کہ طہ = ۲۲ تو وہ پھر $\frac{\text{ل}}{\text{پ}}$ کے مساوی ہو جاتا ہے۔ پس منحنی کی شکل وہ ہے جو نقشہ میں دکھائی گئی ہے اور وہ سمت ۱ میں لانتہا فاصلہ تک جاتی ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ز اکائی سے کم ہے تو منحنی ایک ناقص ہے۔

$$\text{نقطہ ۱ پر طہ} = ۰ \text{ اور } \text{ر} = \frac{\text{ل}}{۱ + \text{ز}}$$

جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے ل گھٹتا ہے یعنی ر بڑھتا ہے یہاں تک کہ طہ = ۲۲ تو $\text{ر} = \frac{\text{ل}}{۱ - \text{ز}}$ [چونکہ $\text{ز} > ۱$ ، ر کی یہ قیمت مثبت ہے]۔



اس لیے منحنی محور کو مکرر ایک ایسے نقطہ آپر قطع کرتا ہے کہ $\frac{L}{r} = \frac{L}{r+z}$ ۔
 جیسے طہ سے π تک بڑھتا ہے جم طہ مسلسل۔ ۱ سے ۱ تک
 بڑھتا ہے، اسلئے $\frac{L}{r}$ مسلسل بڑھتا ہے اور مسلسل $\frac{L}{r}$ سے $\frac{L}{r+z}$ تک گھٹتا ہے۔

چونکہ طہ کی کسی قیمت کے لیے جم طہ = جم (طہ - π) اس لیے
 منحنی محور کے گرد متشکل ہے۔

اس لیے جب، ز اکائی سے چھوٹا ہوتا ہے تو مساوات ایک
 بند منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی خط کے گرد متشکل ہوتی ہے۔
 (۳) فرض کرو کہ ز اکائی سے بڑا ہے تو منحنی ایک زائد ہے۔

نقطہ ۱ پر طہ = ۰، اور $r = \frac{L}{r+z}$

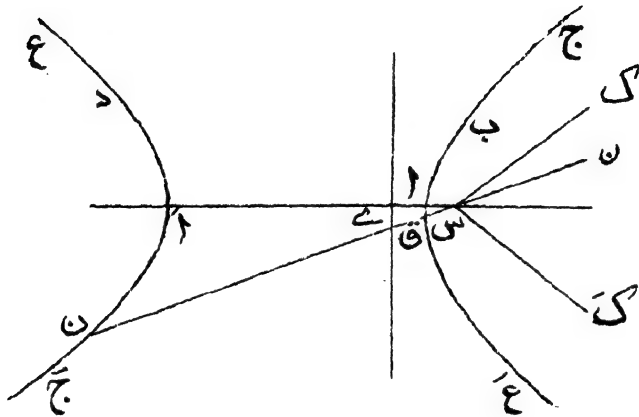
جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے
 یہاں تک کہ $1+z$ جم طہ = ۰۔ طہ کی اس قیمت کے لیے جس کو ہم عم کھینکے
 (زاویہ ۱) شکل میں) کی قیمت لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے۔
 جیسے طہ، عم کے آگے بڑھتا ہے $(1+z)$ جم طہ منفی ہو جاتا ہے

اور جب طہ = π تو $r = \frac{L}{r}$ = س (۱) (شکل میں) اور $(1+z)$ جم طہ

منفی رہے گا یہاں تک کہ طہ، $(\pi - ۲۲)$ عم کے مساوی ہو یعنی زاویہ اس ک
 (شکل میں) کے مساوی ہو۔ جب طہ = $\pi - ۲۲$ عم تو ر پھر لا متناہی
 ہو جاتا ہے۔ اگر طہ اس سے قدرے کم ہو تو ر بہت بڑا اور منفی
 ہو گا اور اگر طہ قدرے بڑا ہو تو ر بہت بڑا اور مثبت ہو گا۔ ر کی
 قیمتیں مثبت رہیں گی جبکہ طہ، $\pi - ۲۲$ عم سے π تک بدلے۔

پس منحنی حسب ذیل ترتیب میں مرتب ہوتا ہے :-

اول حصہ اب ج پھر ج ن ا اور ا د ع اور آخر میں
ع ق ا۔



منحنی دو جداگانہ شاخوں پر مشتمل ہے اور پوری شاخ ج ن ا د ع
کے لیے سمتی نیم قطر منحنی ہے۔
اگر ایک خط م س ق ن (حسب شکل) کھینچا جائے جو منحنی کو دو
نقطوں ن اور ق پر جو مختلف شاخوں پر ہوں قطع کرے تو ان دو نقطوں
ق اور ن کے متعلق یہ نہیں سمجھنا چاہیے کہ ان کا سمتی زاویہ ایک
ہی ہے۔ سمتی نیم قطر م س ن منحنی ہے یعنی م س ن کو اس سمت میں
کھینچا گیا ہے جو اس سمت کے مخالف ہے جو اس کے سمتی زاویہ کی
تحدید کرتی ہے، اس لیے سمتی زاویہ ا س ن ہونا چاہیے جہاں
ن م س محدودہ پر ہے۔ پس اگر ق کا سمتی زاویہ ط ہے تو
ن کا طہ - π ہوگا۔

۱۶۳۔ ایک مخروطی پر کے دو دے ہوئے نقطوں میں سے

گذرنے والے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر
کے تماس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دو نقطوں N اور Q کے سمتی زاوے علی الترتیب
(ع۔ یہ) اور (عہ + یہ) ہیں۔
فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم طہ} \dots \dots \dots (1)$$

ہے۔ وہ خط مستقیم جس کی مساوات

$$\frac{L}{r} = (\text{اجم طہ} + \text{بجم طہ} - \text{عہ}) \dots \dots (2)$$

ہے کسی دو نقطوں میں سے گزرے گا کیونکہ اس کی مساوات میں دو
غیر تابع مستقلات $(\text{ا} \text{ اور } \text{ب})$ شامل ہیں۔ چنانچہ وہ دو نقطوں N
اور Q میں سے گزرے گا اگر (۲) میں r کی وہی قیمتیں ہوں جو
اسکی (۱) میں ہیں جبکہ $\text{طہ} = \text{عہ} - \text{بہ}$ اور جبکہ $\text{طہ} = \text{عہ} + \text{بہ}$ ۔ یہ صورت
اس وقت ہوگی جبکہ

$$\text{ا} + \text{زجم} (\text{عہ} - \text{بہ}) = (\text{اجم} (\text{عہ} - \text{بہ}) + \text{بجم بہ})$$

$$\text{اور } \text{ا} + \text{زجم} (\text{عہ} + \text{بہ}) = (\text{اجم} (\text{عہ} + \text{بہ}) + \text{بجم بہ})$$

$$\therefore \text{ا} = \text{ز} \text{ اور } \text{بجم بہ} = \text{ا}$$

$(\text{ا} \text{ اور } \text{ب})$ کی ان قیمتوں کو (۲) میں درج کرنے سے ہمیں وتر
کی مطلوبہ مساوات

$$\frac{L}{r} = \text{زجم طہ} + \text{قط بہجم} (\text{طہ} - \text{عہ}) \dots \dots \dots (3)$$

ماصل ہوتی ہے۔

اُس نقطہ پر جس کا سمتی زاویہ عہ ہے تماس کی مساوات معلوم

کرنے کے لیے (۳) میں بہ = رکھنا چاہیے چنانچہ اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{ل}{ر} = زجم ط + جم (ط - ع) \dots \dots \dots (۴)$$

نتیجہ صریح۔ اگر مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + زجم (ط - ج)$$

ہو تو اس وتر کی مساوات جو نقطوں (ع - بہ) اور (ع + بہ) کو ملاتا ہے (۲۱۸)

$$\frac{ل}{ر} = زجم (ط - ج) + قط بہ جم (ط - ع)$$

ہے اور عہ پر گئے مماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = زجم (ط - ج) + جم (ط - ع)$$

ہے۔

۱۶۴۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی کی

مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + زجم ط \dots \dots \dots (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ نقطہ کے محدد ر، ط، ہیں۔

فرض کرو کہ ان نقطوں کے سمتی زاوے عہ ± بہ ہیں جن پر کے مماس

نقطہ (ر، ط) میں سے گذرتے ہیں۔

اس خط کی مساوات جو ان نقطوں میں سے گذرتا ہے

$$\frac{ل}{ر} = زجم ط + قط بہ جم (ط - ع) \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔ ان نقطوں پر کے ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{L}{r} = \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ + بہ)}$$

$$\frac{L}{r} = \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ - بہ)}$$

ہیں۔ چونکہ یہ ماس (۱، طہ) میں سے گذرتے ہیں اس لیے

$$\frac{L}{r} = \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ + بہ)}$$

$$\frac{L}{r} = \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ - بہ)}$$

$$\text{طہ} = \text{عہ اور جم بہ} = \frac{L}{r} - \text{زجم طہ}$$

مساوات (۲) میں عہ اور بہ کی بجائے اندراج کرو تو

$$\left(\frac{L}{r} - \text{زجم طہ} \right) \left(\frac{L}{r} - \text{زجم طہ} \right) = \text{جم (طہ - طہ)} \dots (۳)$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۶۵۔ ایک مخروطی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی قطبی مساوات

معلوم کرنا جبکہ ماسکے قطب ہو۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات $\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم طہ}$ ہے تو کسی نقطہ

عہ پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{L}{r} = \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ)}$$

ہے۔

اس ماس پر کسی عمودی خط کی مساوات

$$\frac{J}{r} = \text{زجم (طہ} + \frac{\pi}{r}) + \text{جم (طہ} + \frac{\pi}{r} - \text{عہ)}$$

$$\frac{J}{r} = \text{زجم طہ} - \text{جم (طہ - عہ)}$$

ہے۔

یہ عماد کی مطلوبہ مساوات ہوگی اگر ج کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ نقطہ $(\frac{ل}{ل+زجم عه})$ خط پر ہو۔ اس لیے حاصل ہونا چاہئے

$$ج = \frac{ل + زجم عه}{ل} = - زجب عه$$

$$یا ج = \frac{ل - زجب عه}{ل + زجم عه}$$

پس عماد کی مساوات

$$\frac{ل}{ل + زجم عه} \times \frac{1}{ر} = زجب طه + جب (طه - عه)$$

مثال ۱۔ دو نقطوں پر جن کے سمتی زاویے علی الترتیب عه اور به ہیں ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = زجم طه + جم (طه - عه)$$

$$اور \frac{ل}{ر} = زجم طه + جم (طه - به)$$

پس۔ یہ ماس جہاں ملتے ہیں وہاں

$$جم (طه - عه) = جم (طه - به)$$

$$طه = \frac{عه + به}{۲}$$

پس اگر ایک مخروطی کے نقطوں ن، ق پر کے ماسوں کا

نقطہ تقاطع ت ہو تو ن س، ت زاویہ ن س ق کی تضيف کرے گا۔ لیکن اگر مخروطی قطع زائد ہو اور نقطے مختلف شاخوں پر ہوں

س ن 'خارجی زاویہ ن س ق کی تصنیف کرے گا کیونکہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ن کا سمتی زاویہ (اگر ن بعید تر شاخ پر ہو) وہ زاویہ نہیں ہے جو س ن 'س سے کے ساتھ بناتا ہے بلکہ وہ زاویہ ہے جو ن س محدودہ س سے کے ساتھ بناتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا ماس مرتب سے گ پر ملے تو زاویہ گ س ن قائم ہوگا۔
اگر ن کا سمتی زاویہ ع ہو تو ن پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = زجم ط + جم (ط - ع)$$

ہے۔ یہ ماس مرتب سے جس کی مساوات ل = ز رجم ط ہے وہاں ملیگا جہاں جم (ط - ع) = ۰۔

پس نقطہ گ پر ط - ع = $\frac{ل}{ر}$ اس لیے زاویہ گ س ن قائم ہے

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کے وتروں کے محاذی ایک ماسکہ پر ایک مستقل زاویہ بنے تو وتر کے سروں پر کے ماس ایک ثابت مخروطی پر ملیں گے اور وتر ایک دوسرے ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ ۲ بہ وہ زاویہ ہے جو وتر کے محاذی ماسکہ پر بنتا ہے۔
فرض کرو کہ وتر کے سروں کے سمتی زاویے ع - بہ اور ع + بہ ہیں۔
وتر کی مساوات ہوگی

$$\frac{ل}{ر} = زجم ط + قط بہ جم (ط - ع)$$

یا
$$\frac{ل}{ر} \text{ جم بہ} = ز \text{ جم بہ} + ط + جم (ط - ع) \dots (۱)$$
 لیکن (۱) مخروطی

$$\frac{ل}{ر} \text{ جم بہ} = ۱ + ز \text{ جم بہ} + ط \dots (۲)$$

کے اُس نقطہ پر کے ماس کی مساوات ہے جس کا سمتی زاویہ عہ ہے۔
پس دتر ہمیشہ ایک ثابت مخروطی کو مس کرتا ہے جس کا خروج المرکز
ز جم بہ ہے اور وتر خاص ۲ ل جم بہ ہے۔
وتر کے سروں پر کے ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم ط} + جم (ط - ع + بہ)$$

اور
$$\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم ط} + جم (ط - ع - بہ)$$

ہیں۔ یہ دونوں خط مخروطی

$$\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم ط} + جم بہ$$

سے ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں یعنی وہاں جہاں ط = عہ اور $\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم عہ} + جم بہ$

پس وتر کے سروں پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق مخروطی

$$\frac{ل}{ر} \text{ ق ط بہ} = ۱ + ز \text{ ق ط بہ} + ط \dots (۳)$$
 (۲۲۱)

ہے۔ مخروطی (۲) اور (۳) دونوں کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو دے ہو

مخروطی کے ہیں۔ مثال ۴۔ اُس مثلث کے حاطد دائرہ کی مساوات معلوم

کرو جو ایک مکانی کے تین محاسوں سے بنتا ہے۔

فرض کرو کہ تین نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے سمتی زاوے علی الترتیب
عہ، 'بہ'، 'جہ' ہیں۔
فرض کرو کہ مکانی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + \text{جم طہ}$$

ہے۔ تب 'ا'، 'ب'، 'ج' پر کے محاسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = \text{جم طہ} + \text{جم (طہ - عہ)}$$

$$\frac{ل}{ر} = \text{جم طہ} + \text{جم (طہ - بہ)}$$

$$\frac{ل}{ر} = \text{جم طہ} + \text{جم (طہ - جہ)}$$

ہیں۔ ب اور ج پر کے محاس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$\text{طہ} = \frac{۱}{۲} (\text{بہ} + \text{جہ}) \text{ اور } \frac{ل}{ر} = ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲}$$

ج اور ا پر کے محاس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$\text{طہ} = \frac{۱}{۲} (\text{جہ} + \text{عہ}) \text{ اور } \frac{ل}{ر} = ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲}$$

اور ا اور ب پر کے محاس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$\text{طہ} = \frac{۱}{۲} (\text{عہ} + \text{بہ}) \text{ اور } \frac{ل}{ر} = ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲}$$

اندراج سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تین نقاط تقاطع محاس دائرہ پر ہیں جس کی
مساوات

$$= \frac{ل}{جم \frac{ع}{ط} جم \frac{ز}{ط} جم \frac{ح}{ط}} (جم (ط - \frac{ع}{ط} - \frac{ز}{ط} - \frac{ح}{ط}))$$

ہے۔

یہ دائرہ ہمیشہ مکانی کے ماسکہ میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۵۔ مخروطی $\frac{ل}{ط} = ۱ + ز$ جم ط

کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرنا۔

عہ پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ط} = ز جم ط + جم (ط - ع) \dots \dots (۱)$$

ہے۔ نقطہ عہ، مخروطی پر لاتنا ہی پر کا نقطہ ہوگا اگر

$$۱ + ز جم ع = ۰ \dots \dots (۲)$$

مطلوبہ مساوات، (۱) اور (۲) سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی چنانچہ وہ

$$\left\{ \frac{ل}{ط} + (۱ - ز) جم ط = ز جب ط جب ع = (ز - ۱) جب ط \right\}$$

ہے۔

آٹھویں باب پر مثالیں

(۲۲۲)

۱۔ ایک مکانی کے کسی دو ماسوں کے درمیان خارجی زاویہ ان کے نقاط تماس کے سمتی زاویوں کے فرق کا نصف ہوتا ہے۔

۲۔ ایک مکانی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طرعی جبکہ ماس ایک دوسرے کو ایک مستقل زاویہ پر قطع کریں ایک قطع نہ آئے ہے جس کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو ابتدائی مکانی کے ہیں۔

۳۔ اگر ایک مخروطی کے کوئی دو ماسکی وتر n و n اور q سے q ایک دوسرے کے علی القوالم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{n}{n} \times \frac{n}{n} + \frac{q}{q} \times \frac{q}{q} = \frac{1}{1} \text{ مستقل ہے۔}$$

۴۔ اگر ایک مکافی پر { 'ب' ج کوئی تین نقطے ہوں اور ان نقطوں پر کے ماسوں سے مثلث 'آ ب ج' بنے تو ثابت کرو کہ $n \times n \times n = n \times n \times n$ ج = $n \times n \times n$ ج جہاں n مکافی کا ماسکہ ہے۔

۵۔ اگر ایک ناقص کا ایک ماسکی وتر محور کے ساتھ زاویہ بنا لے تو ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو اس کے سروں پر کے ماسوں کے درمیان بنتا ہے

$$\frac{1}{2} \text{ ز جب } \frac{1}{2} \text{ ز}$$

ہے۔

۶۔ مساوات $\frac{1}{r} = 1 + \text{زجم طہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ ناقص کی سکون ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے ہو سکتی ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔}$

۷۔ ایک وتر کے محاذی مخروطی کے ماسکہ پر مستقل زاویہ (۲۷) بنتا ہے، وتر کے قطب کا طریق معلوم کرو، ان صورتوں میں تمیز کرو جنکے لیے $\text{جم } < = > \text{ ز}$ ۔

۸۔ ایک مخروطی کا ایک وتر n q ہے جو ایک ماسکہ پر قائم زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ n q کے قطب کا طریق اور وہ طریق جنکو n q لف کرتا ہے مخروطیاں ہیں جن کے وتر خاص اور ابتدائی مخروطی کے وتر خاص میں نسبتیں علی الترتیب ۲۷ : ۱ اور ۱ : ۲۷ ہیں۔

۹۔ ایک مخروطی کا ماسکہ اور مرتب دیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۲۲۳)
اس کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔
۱۰۔ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان کے مشترک
وتروں میں سے دو وتران کے مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزریں گے۔

۱۱۔ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہے اور اس ماسکہ میں سے
کوئی وتر کھینچا گیا ہے جو مخروطیوں سے علی الترتیب N ، K اور Q ، Q' پر
لمتا ہے۔ ثابت کرو کہ N ، K پر کے مماس، Q اور Q' پر کے مماسوں
سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزریں گے
دو خطوط مستقیم پروجی ہیں، یہ خطوط علی القوام ہوں گے اگر مخروطیوں کا
خروج المرکز ایک ہی ہو۔

۱۲۔ ایک مکافی کے ماسکہ میں سے کوئی دو وتر SL ، M
سے M' کھینچے گئے ہیں۔ L پر کا مماس نقطوں M ، M' پر کے مماسوں سے
نقطوں K ، K' پر ملتا ہے اور L پر کا مماس ان سے G ، G' پر ملتا ہے۔
ثابت کرو کہ خطوط KG ، $K'G'$ علی القوام ہیں۔

۱۳۔ دو مخروطی ایک مشترک ماسکہ رکھتے ہیں جس کے گرد ایک کو
گھمایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے مشترک وتروں میں سے دو ایسے مخروطیوں
میں سے گزریں گے جن کا ماسکہ ثابت ماسکہ ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ $\frac{L}{r} = 1 + \text{زحم طہ کے دو مماسوں کے (جو باہم)}$

علی القوام ہیں) نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات
 $r^2 (z^2 - 1) - 2L \text{ زحم طہ} + 2L^2 = 0$

۱۵۔

۱۵۔ اگر ایک ناقص کے ماسکوں S ، H میں سے گزریں گے

دو وتر SN ، QN ہوں تو $\frac{SN}{SQ} + \frac{HN}{SH} = 1$ کے مطابق

منحصر نہیں ہوگا۔

۱۶۔ دو مخروطی ایک ہی ماسکہ کے ساتھ بنائے گئے ہیں اور اس ماسکہ کا فاصلہ ہر ایک کے متناظر مرتب سے وہی ہے۔ اگر یہ مخروطی ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ قاطع محوروں کے درمیانی زاویہ کے نصف کی جیسے 'وگنا' خروج المرکزوں کے متکافوں کے فرق کے مساوی ہے۔

۱۷۔ دئے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ جو ایک دئے ہوئے مخروطی کے ماسکہ میں سے گذرتا ہے مخروطی کو نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ

$$س ا \times س ب \times س ج \times س د$$

مستقل ہے۔

۱۸۔ ایک دائرہ ایک مخروطی کے ماسکہ میں سے جس کا وتر خاص ۲ ہے گذرتا ہے اور مخروطی سے چار نقطوں پر ملتا ہے جن کے فاصلے ماسکہ سے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{ل} = \frac{۱}{س ا} + \frac{۱}{س ب} + \frac{۱}{س ج} + \frac{۱}{س د}$$

۱۹۔ ایک دیا ہوا دائرہ جس کا مرکز ایک مکانی کے محور پر ہے ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور کسی مخروطی سے جس کا وتر خاص دیا گیا ہے اور ماسکہ میں سے اور مکانی کا ایک مماس اس کا مرتب ہے چار نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر منقطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ فاصلوں میں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کا مجموعہ مستقل ہے۔

۲۰۔ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ میں مشترک ہے اور ان کے

محاور ایک ہی سمت میں ہیں۔ ان مخروطیوں میں سے ایک پر نقطہ ن اور دوسرے پر نقطہ ق لیے گئے ہیں ایسے کہ ن س اور ق س علی القویم ہیں۔ ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے مماس ایک مخروطی پر ملتے ہیں جس کے خروج المرکز کا مربع ابتدائی مخروطیوں کے خروج المرکزوں کے مربعوں کے

مجموعہ کے مساوی ہے۔

۲۱۔ ایک مشترک وتر خاص کے ساتھ مخروطیوں کا ایک سلسلہ مرتسم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان کے ان نقطوں کا طریق جن پر ماسکہ سے حاصل عمودیم وتر خاص کے مساوی ہے مساوات $l = r - \text{زجم طہ}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۲۔ اگر ایک ثابت نقطہ $و$ میں سے گزرنیوالا وتر $و ن$ ہو تو $\frac{1}{p} ن$ مس و مس $\frac{1}{p} ن$ س و مستقل ہوگا جہاں $س$ مخروطی کا ایک ماسکہ ہے۔

۲۳۔ مخروطی مرتسم کئے گئے ہیں جن کے وتر خاص مساوی ہیں اور ایک ماسکہ مشترک ہے۔ نیز متناظر مرتب ایک ثابت ہم ماسکی مخروطی کو لف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مخروطی سب کے سب دو ثابت مخروطیوں کو مس کرتے ہیں جن کے وتر خاص کے شکافی علی الترتیب متغیر مخروطی اور اس کے ہم ماسکہ ثابت مخروطی کے وتر خاص کا مجموعہ اور فرق ہیں اور جن کا مرتب وہی ہے جو ثابت ہم ماسکی مخروطی کا ہے۔

۲۴۔ ایک مخروطی کو مرتسم کیا گیا ہے جس کا ماسکہ اور خروج المرکز وہی ہیں جو مخروطی $\frac{l}{r} = 1 + \text{زجم طہ}$ کے ہیں اور یہ دو مخروطی نقطہ $\text{طہ} = \text{عہ}$ پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے وتر خاص کا

$$\text{طول} = \frac{l(1 - r)}{r + 2 + \text{زجم طہ} + 1} \text{ ہوگا۔}$$

۲۵۔ نقطہ $(ر، طہ)$ سے مخروطی $\frac{l}{r} = 1 + \text{زجم طہ}$ کے

ماسوں کا زوج کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان ماسوں کے زوج کی مساوات

$$\left\{ \frac{l}{r} - \text{زجم طہ} \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{l}{r} - \text{زجم طہ} \right) \right\} = 1$$

$$= \left[\frac{L}{r} - \text{زحم طہ} \right] \left(\frac{L}{r} - \text{زحم طہ} \right) - \text{جم طہ} - \text{طہ}]^2$$

سے حاصل ہوتی ہے۔
نیز ثابت کرو کہ متقارب

$$\frac{ZL}{r} = (1 - z^2) \text{ جم طہ } \pm \text{ جب طہ } \sqrt{1 - z^2}$$

ہیں۔

$$۲۶۔ \text{ اگر } \frac{L}{r} = 1 + \text{جم طہ کے نقطوں عہ}، \text{ بہ}، \text{ جہ پر کے عماد نقطہ}$$

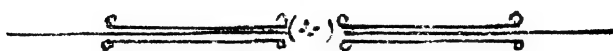
(غہ، فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ ۲ فہ = عہ + بہ + جہ۔

$$۲۷۔ \text{ اگر } \frac{L}{r} = 1 + \text{زحم طہ کے ان نقطوں پر کے عماد جن کے}$$

سمتی زاوے طہ، طہ، طہ، طہ ہیں نقطہ (غہ، فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ
طہ + طہ + طہ + طہ - ۲ فہ = (۱ + ۲) π -

$$۲۸۔ \text{ اگر } \frac{L}{r} = 1 + \text{جم طہ کے ان نقطوں ن، ق، س پر کے}$$

عماد جن کے سمتی زاوے طہ، طہ، طہ، طہ ہیں نقطہ و (غہ، عہ) پر ملیں تو
ثابت کرو کہ اُس مثلث کے حاطہ دائرہ کا قطر جو ن، ق، س پر کے عمادوں
سے بنتا ہے س و کے مساوی ہوگا جہاں س مس کافی کا ماسکہ ہے۔



نواں باب

درجہ دوم کی عام مساوات

۱۶۶ — ہم ابواب ماسبق میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی مخروطی کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوتی ہے، اب ہم ثابت کریں گے کہ درجہ دوم کی ہر مساوات ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے اور نیز معلوم کریں گے کہ کسی ایسی مساوات سے اس مخروطی کی نوعیت اور محل کس طرح متعین کئے جاسکتے ہیں جس کو وہ تعبیر کرتی ہے۔

۱۶۷ — ثابت کرو کہ ہر منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ کی ہے ایک مخروطی ہے۔

ہم محدودوں کے محوروں کو قائم فرض کر سکتے ہیں کیونکہ اگر مساوات مکمل محوروں کے حوالے سے دی گئی ہو اور اگر ہم قائم محوروں میں تبدیل کریں تو مساوات کا درجہ نہیں بدلتا [دفعہ ۵۳]۔
پس فرض کرو کہ منحنی کی مساوات

$$1) \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0 \quad (1)$$

ہے۔ چونکہ درجہ دوم کی مساوات کی یہ عام سے عام شکل ہے اس لئے اس میں تمام ممکنہ صورتیں شامل ہیں۔

ہم رقم لا ما کو اس طرح خارج کر سکتے ہیں کہ محوروں کو ایک خاص زاویہ میں سے گھمایا جائے کیونکہ محوروں کو ایک زاویہ طہ میں سے گھمانے کے لیے ہمیں لا اور ما کی بجائے علی الترتیب

لاجم طہ - ماجب طہ اور لاجب طہ + ماجم طہ
درج کرنا ہوگا۔

چنانچہ مساوات (۱) ہو جائے گی

(۲۲۷)

۱) (لاجم طہ - ماجب طہ) + ۲ (لاجم طہ - ماجب طہ)

(لاجم طہ + ماجم طہ)

+ ب (لاجم طہ + ماجم طہ) + ۲ گ (لاجم طہ - ماجب طہ)

+ ۲ ف (لاجم طہ + ماجم طہ) + ج = ۰ (۲)

(۲) میں لا ما کا سر

۲ (ب - ۱) بب طہ جم طہ + ۲ (جم طہ - جب طہ)

ہے اور یہ صفر ہوگا اگر

مس ۲ طہ = $\frac{۲}{ب-۱}$ (۳)

چونکہ کسی ایسے زاویہ کو معلوم کیا جاسکتا ہے جس کا محاس کسی حقیقی

مقدار کے مساوی ہے اس لیے زاویہ طہ = $\frac{۱}{۲}$ مس $\frac{۲}{ب-۱}$ تمام صورتوں میں

حقیقی ہے۔

اب مساوات (۲) کو لکھا جاسکتا ہے

۱) لا + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ (۴)

اگر لا اور ب میں سے کوئی بھی صفر نہیں ہے تو ہم مساوات (۴) کو شکل

۱) $(\frac{لا}{ب} + ۱) + ب (\frac{ف}{ب} + ۱) = ۲ (\frac{گ}{ب} + ۱) - ج = گ$

میں لکھ سکتے ہیں، یا مبادا کو نقطہ (-)۔ $\frac{۲}{۱}$ گ - $\frac{۱}{۲}$ ف) پر لینے سے

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} = ۱ \text{ گ} \quad (۵)$$

اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر ہو تو مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی [دفعہ ۳۵]۔
لیکن اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر نہ ہو تو ہمیں مساوات

$$۱ = \frac{۲}{\frac{۱}{\text{ب}}} + \frac{۱}{\frac{۲}{\text{گ}}}$$

حاصل ہوتی ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرے گی اگر دونوں نسب نامہ مثبت ہوں اور ایک زائد کو تعبیر کرے گی اگر ایک نسب نامہ منفی اور دوسرا مثبت ہو۔
اگر دونوں نسب نامہ منفی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کر سکیں گی۔ اس صورت میں منحنی ایک خیالی ناقص ہوتا ہے۔

پھر فرض کرو کہ ۱ یا ب صفر ہے، مثلاً فرض کرو ۱ صفر ہے۔ (۲۲۸)
[۱ اور ۲ ب دونوں بوجب دفعہ ۵۳ صفر نہیں ہو سکتے] تب مساوات (۴) لکھی جاسکتی ہے

$$\text{ب} (۱ + \frac{۲}{\text{ب}}) = ۲ \text{ گ} - ۱ \text{ لا} - \frac{۱}{۲} \text{ ف} \quad (۶)$$

اگر گ = ۰۔ تو یہ مساوات متوازی خطوط کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے جو منطبق ہونگے اگر گ = ۰۔ اور نیز ف = ۰۔ ب ج = ۰۔
اگر گ صفر نہیں ہے تو ہم مساوات کو لکھ سکتے ہیں

$$(۱ + \frac{۲}{\text{ب}}) = ۲ \text{ گ} - ۱ \text{ لا} - \frac{۱}{۲} \text{ ف} \quad (۷)$$

جو ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور محور لا کے متوازی ہے۔
پس تمام صورتوں میں وہ منحنی جو درجہ دوم کی عام مساوات سے
تعبیر ہوتا ہے خزوطی ہے۔

۱۶۸۔ ایک خزوطی کے مرکز کے محدود معلوم کرنا۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب محدودوں کا مبداء کسی خزوطی کا مرکز ہوتا ہے تو
خزوطی کی مساوات میں وہ رقیں شامل نہیں ہوتیں جن میں متغیروں کا درجہ
پہلا ہوتا ہے پس خزوطی کا مرکز معلوم کرنے کے لیے مبداء کو کسی نقطہ (لا، ما)
پر تبدیل کرنا چاہئے اور لا، ما کا ایسا انتخاب کرنا چاہئے کہ احتمال شدہ
مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہو جائیں۔
فرض کر دو کہ خزوطی کی مساوات

$$۱ + لا + ۲ھ + لا + ب + ما + ۲گ + لا + ف + ما + ج = ۰$$

ہے۔

(لا، ما) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات
اس طرح حاصل کجا سکتی ہے کہ لا کی بجائے لا + لا اور ما کی بجائے ما + ما درج
کیا جائے چنانچہ احتمال شدہ مساوات ہوگی

$$۱ + (لا + لا) + ۲ھ + (لا + لا) + (ب + ما + ما) + ۲گ + (لا + لا)$$

$$+ ۲ف + (ما + ما) + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ۲ھ + لا + ما + ب + ما + ۲گ + لا + ۲ھ + لا + ب + ما + ۲ف + لا + ج = ۰$$

اس مساوات میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہونے اگر لا اور ما کو اس طرح

منتخب کیا جائے کہ

$$(۱) \quad ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۳ \text{ گ} = ۰$$

$$(۲) \quad ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ با} + ۴ \text{ ف} = ۰$$

تب (لا، ما) کو مبداء، مانکر اس کے حوالے سے استعمال شدہ مساوات (۲۳۹)

$$(۳) \quad ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ با} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ ما} + ۵ \text{ ج} = ۰$$

ہوگی جہاں

$$(۴) \quad ۱ \text{ ج} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ با} + ۴ \text{ ما} + ۵ \text{ گ} + ۶ \text{ ف} + ۷ \text{ ج} = ۰$$

پس محروطی کے مرکز کے محدود لا اور ما کی وہ قیمتیں ہیں جو مساواتوں (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتی ہیں۔

اس لیے مرکز نقطہ

$$\left(\frac{\text{ف} - \text{ب} \text{ گ}}{\text{ا} \text{ ب} - ۲ \text{ ج}}, \frac{\text{گ} - ۲ \text{ ف}}{\text{ا} \text{ ب} - ۲ \text{ ج}} \right)$$

ہے۔ اگر ا ب - ۲ ج = ۰۔ تو مرکز کے محدود لا متناہی ہوتے ہیں اور اس لیے

منحنی ایک مکانی ہوتا ہے [دفعہ ۱۵۸]

لیکن اگر ف - ب گ = ۰ اور ا ب - ۲ ج = ۰۔ یعنی اگر

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۳} = \frac{۳}{۴}$$

تو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ایک ہی خط مستقیم تعبیر ہوتا ہے اور اس خط کا کوئی نقطہ مرکز ہے۔ اس صورت میں طریق متوازی خطوں کا ایک

زوج ہے۔ اوپر کی تحقیق میں محاور قائم یا مائل ہو سکتے ہیں۔

آئندہ وہ نتائج جو مائل محوروں کے لیے درست رہتے ہیں علاوہ (سہ) کے ذریعہ دکھائے جائیں گے۔

۱۶۹۔ دفعہ ماسبق کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو علی الترتیب لا اور ما

سے ضرب دو اور مجموعہ کو (۴) کے بائیں جانبی رکن سے تفریق کرو تو

$$\text{ج} = \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} \quad (۵)$$

$$\text{گ} = \frac{\text{ب} - \text{ف}}{\text{ا} - \text{ب}} + \frac{\text{ف} - \text{گ}}{\text{ا} - \text{ب}} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{ا} - \text{ب} + ۲ + \text{ف} - \text{گ} - \text{ا} + \text{ب} - \text{ف} - \text{ج} + \text{ج}}{\text{ا} - \text{ب}} = \frac{\text{ا} - \text{ب} - \text{ج}}{\text{ا} - \text{ب}}$$

یا مساواتوں (۱)، (۲) اور (۵) سے لا، ما کو ساقط کرنے پر فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} \text{گ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} \\ \text{ف} & \text{ج} & \text{ا} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{گ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} \\ \text{ف} & \text{ج} & \text{ا} \end{vmatrix} \text{ یعنی } \begin{vmatrix} \text{گ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} \\ \text{ف} & \text{ج} & \text{ا} \end{vmatrix} = ۰$$

$$(۲۳۰) \quad ۱۷۰ - \text{جملہ } ۱ + \text{ج} + ۲ + \text{ف} - \text{گ} - \text{ا} - \text{ب} - \text{ج} = \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج}$$

علامت Δ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو

$$۱ + \text{لا} + ۲ + \text{ف} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ا} + \text{گ} + \text{لا} + ۲ + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج}$$

کا ممیز کہتے ہیں۔

$\Delta = ۰$ سے وہ شرط حاصل ہوتی ہے کہ مخروطی دو خطوط مستقیم ہو سکے۔

کیونکہ اگر Δ صفر ہے تو ج صفر ہے اور اس صورت میں دفعہ ۱۶۸ کی مساوات (۳) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔

یہ وہ شرط ہے جو ہم نے دفعہ ۳۷ میں معلوم کی تھی۔

$$۱۷۱ - \text{اس مخروطی کے محوروں کا محل اور مقدار معلوم کرنا جسکی}$$

مساوات $۱ + \text{لا} + ۲ + \text{ف} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ا} = ۰$ ہے۔

اگر ایک مخروطی کسی ہم مرکز دائرہ سے منقطع ہو تو نقاط تقاطع میں گزرنے والے قطر مخروطی کے محوروں کے ساتھ مساوی المیلان ہوں گے اور وہ منطبق ہونگے اگر دائرہ کا نصف قطر مخروطی کے کسی ایک نیم محور کے مساوی ہو۔

وہ خطوط جو مبدأ میں سے اور مخروطی اور دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گذرتے ہیں مساوات

$$(1) \left(1 - \frac{1}{r}\right) \lambda^2 + 2\lambda + \mu \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \mu^2 = 0 \dots \dots (1)$$

سے حاصل ہوتے ہیں اگر دائرہ کی مساوات $\lambda^2 + \mu^2 = r^2$ ہو۔
یہ خطوط منطبق ہونگے اگر

$$(2) \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \mu^2 = 0 \dots \dots (2)$$

اور اس صورت میں وہ مخروطی کے محوروں میں سے ایک یا دوسرے پر منطبق ہونگے۔

پس مخروطی کے نیم محوروں کے طول مساوات (۲) کی اصلیں ہیں
یعنی مساوات

$$(3) \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \mu \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \mu^2 = 0 \dots \dots (3)$$

کی اصلیں ہیں۔

اب (۱) کو $\left(1 - \frac{1}{r}\right)$ سے ضرب دو تب اگر $\frac{1}{r}$ مساوات (۲) کی
اصلوں میں سے کوئی ایک ہو تو

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right) \lambda^2 + 2\lambda + \mu \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \mu^2 = 0$$

اس لیے (۴) $\left(1 - \frac{1}{r}\right) \lambda^2 + 2\lambda + \mu \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \mu^2 = 0$ (۴)
پس اگر ہم (۴) میں مساوات (۳) کی کوئی ایک اصل درج کریں تو
متناظر محور کی مساوات حاصل ہوگی۔

ادھر کی تحقیق میں ہم نے محوروں کو قائم فرض کیا ہے۔ لیکن اگر محور زاویہ
سہ پر مائل ہوں تو اس قدر سے ترمیم کرنی ہوگی کیونکہ نصف قطر کے دائرہ کی

مساوات لا + ۲ لا ما جم سہ + ما = را ہوگی۔

۱۷۲۔ ایک مکانی کا محور اور وتر خاص معلوم کرنا۔

اگر مساوات

لا + ۲ لا + ۳ لا ما + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
ایک مکانی کو تعبیر کرے تو دوسرے درجہ کی ارقام کامل مربع ہونگی [صفحہ ۱۰۴]۔
اس لیے مساوات

(ع لا + ب ما) + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ (۱)
کے حاصل ہے جہاں $ع^۲ = ۱$ اور $ب^۲ = ۲$ ۔

(۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خط ع لا + ب ما = ۰ پر عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے خط ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ پر کا عمود۔ ان خطوط کا علی القوام ہونا ضروری نہیں ہے لیکن ہم مساوات (۱) کو شکل

(ع لا + ب ما + ل) = ۲ لا (ل ع - گ) + ۲ ما (ل ب - ف) + ل ج
میں لکھ سکتے ہیں اور وہ دو خطوط مستقیم جن کی مساواتیں
ع لا + ب ما + ل = ۰ اور ۲ لا (ل ع - گ) + ۲ ما (ل ب - ف) + ل ج = ۰
ہیں علی القوام ہونگے اگر

ع (ل ع - گ) + ب (ل ب - ف) = ۰
یا اگر ل = (ع گ + ب ف) / (ع + ب)

اب

ع لا + ب ما + ل = ۰ اور ۲ (ل ع - گ) + ۲ ما (ل ب - ف) + ل ج = ۰
کو علی الترتیب لا اور ما کے نئے محور قرار دو تو حاصل ہوگا

ما = ۲ ع لا

اور ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک مکانی کی مساوات ہے جو اس کے محور اور اُس
پر کے تماس کے حوالے سے حاصل ہوتی ہے۔

وتر خاص معلوم کر نیکیے لیے ہم مساوات کو شکل

$$\left\{ \frac{(ع-ل-گ)^2 + ۲(ب-ل-ف) + ۲(ج-ل-ف)}{۲(ع-ل-گ)^2 + ۲(ب-ل-ف) + ۲(ج-ل-ف)} \right\} ع = \left(\frac{ع+ل+ب+ج}{ع+ب} \right)$$

$$\frac{۲(ع-ل-گ)^2 + ۲(ب-ل-ف) + ۲(ج-ل-ف)}{ع+ب} = ع$$

اس لیے (۱) مکانی ہے جس کا محور
ع+ل+ب+ج = ۰

ہے اور جس کا وتر خاص

$$\frac{۲(ع-ل-گ)^2 + ۲(ب-ل-ف) + ۲(ج-ل-ف)}{ع+ب} = ۲$$

ہے کیونکہ ل = (ع+گ+ب) (ع+ب)

۳۔ اب ہم ان محروطیوں کا محل اور انکی نوعیت معلوم کریں گے جن کی مساواتیں حسب ذیل ہیں:

$$(۱) ل-۴ = ۲۰-۶۲-۲۳+۶۶+۱۱۴ = ۰$$

$$(۲) ل-۵ = ۱۵+۲۰-۵۸+۶۶+۱۱۴ = ۰$$

$$(۳) ل-۳۶ = ۸۱+۱۲۶+۵۲-۲۹+۶۶+۱۱۴ = ۰$$

$$(۴) (۵-۱۲) ل-۲ = ۱-۶۲۹-۵۲+۶۶+۱۱۴ = ۰$$

(۱) مرکزوں کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں [دفعہ ۱۶۸ (۱) (۲)]

$$ل-۱۴ = ۲۳+۱۴ = ۰$$

$$ل-۱۲ = ۲ = ۰$$

ہیں۔ ان سے ل = ۲ اور ل = ۳۔ اس کے مرکز نقطہ (۲، ۳) ہے۔

مرکز میں سے گزرنیوالے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات [دفعہ ۱۶۹]

$$ل-۴ = ۲۰-۳ \times ۱ - ۲ \times \frac{۲۳}{۲} + ۶۶+۱۱۴ = ۰$$

ہے، یا
پس مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ $(۲، ۳)$ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ وہ محور لاکو وہاں قطع کرتے ہیں جہاں $x = ۲$ اور $y = ۳$ ۔ یعنی جہاں
 $x = ۲$ اور جہاں $y = ۳$ ۔

$$(۲) \quad x^2 - ۵x + ۸ + y^2 - ۲y - ۱۵ = 0$$

مرکز معلوم کر نیکی لیے مساواتیں

$$x^2 - ۵x + ۸ = 0 \text{ اور } y^2 - ۲y - ۱۵ = 0$$

ہیں چنانچہ $x = ۴$ اور $y = ۳$ ۔

مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات

$$x^2 - ۵x + ۸ + (y - ۳)^2 - ۱۵ = 0$$

$$x^2 - ۵x + ۸ + y^2 - ۶y + ۹ - ۱۵ = 0$$

ہو گی۔

اس مخروطی کے نیم محور مساوات

(۲۳۳)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [دفعہ ۱ (۳)]$$

کی اصلیں ہیں۔

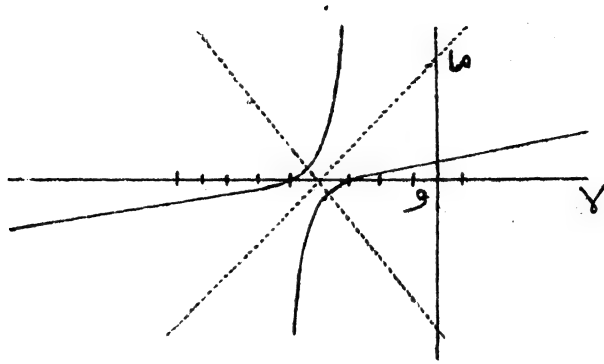
$$0 = \frac{x^2}{a^2} - 1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}$$

$$0 = \frac{x^2}{a^2} - 1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 0$$

اس لیے منحنی ایک زائد ہے جس کا حقیقی نیم محور $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ ہے اور خیالی نیم محور

$$\frac{1}{2}\sqrt{6}$$



حقیقی محور کی سمت [دفعہ ۱۷۱ (۴)] مساوات

$$0 = 6 \frac{5}{2} - 11 \left(\frac{4}{2} - 1 \right)$$

$$0 = 6 + 11$$

سے حاصل ہوگی۔

$$0 = 81 + 6 \cdot 126 + 11 \cdot 29 - 6 \cdot 29 + 6 \cdot 12 + 11 \cdot 36$$

مرکز معلوم کرنے کے لیے مساواتیں ہیں

$$0 = 63 + 6 \cdot 29 + 11 \cdot 12 \text{ اور } 0 = 36 - 6 \cdot 12 + 11 \cdot 36$$

$$\therefore 11 \cdot 2 = 6 \cdot 3$$

مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات ہوگی

$$0 = 81 + (3 - 6) \cdot 63 + 29 - 6 \cdot 29 + 6 \cdot 12 + 11 \cdot 36$$

$$1 = \frac{29}{180} + 6 \cdot \frac{2}{15} + \frac{11}{5}$$

یا

اس مخروطی کے نیم محور مساوات

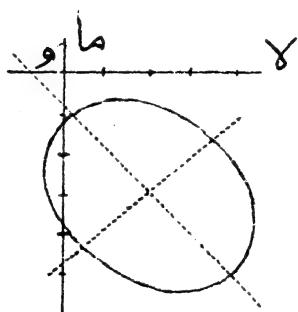
$$0 = \frac{2}{a^2} - 1 + \frac{1}{b^2} (b + 1) - \frac{1}{b^2}$$

$$\frac{13}{36} = \frac{65}{180} = 1 + b \quad \text{کی اعلیں ہیں اور}$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{225} - \frac{29}{900} = b - \frac{29}{900}$$

$$0 = 13 - 36 + 13 + \frac{29}{900}$$

اس لیے نیم محوروں کے مربع ۹ اور ۴ ہیں۔



محور اعظم کی مساوات [دفعہ ۱، (۴)]

$$0 = 6 \frac{1}{15} + لا \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{5} \right)$$

$$0 = 62 + لا ۴$$

یا

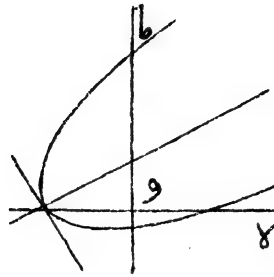
— ۴

$$(۴) \quad 0 = 1 - 629 - لا ۲ - (612 - لا ۵)$$

اس مساوات کو شکل

$$1 + لا ۲ + (622 - ۲۹) لا + (۵ + لا ۲) = 612 - لا ۵$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔



(۲۳۵)

$$\text{خطوط } ۵ - ۱۲ + ۱ = ۰$$

$$\text{اور } ۲ (۵ + ۱) + ۱۱ + (۲۲ - ۲۹) + ۱ + ۲ = ۰$$

علی القوم ہیں اگر

$$۰ = ۱۰ - ۷۵ + ۳۳۸ + ۲۸۸$$

یعنی اگر $۱ = ۰$

اس لیے دی ہوئی مساوات

$$(۱) \dots \dots \frac{۲ + ۵ + ۱۱ + ۱۲}{۱۳} \frac{۱}{۱۳} = \left(\frac{۵ - ۱۲ + ۱}{۱۳} \right)^۲$$

کے مثل ہے۔ اس لیے مکانی کے محور کی مساوات $۵ - ۱۲ + ۱ = ۰$ ہے اور

اس پر کے تماس کی مساوات $۲ + ۵ + ۱۱ + ۱۲ = ۰$ ہے۔

منحنی کا ہر نقطہ صریحاً خط $۲ + ۵ + ۱۱ + ۱۲ = ۰$ کی مثبت جانب ہونا چاہئے

کیونکہ مساوات (۱) کی دائیں جانب ہمیشہ مثبت ہے۔

۴۷۱ - مخروطی کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرنا۔

ہم (صفحہ ۱۴۷ میں) دیکھ چکے ہیں کہ مخروطی کی مساوات اور متقاربوں کی

مساوات میں صرف ایک مستقل مقدار کا فرق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$1) \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = ۰ \dots (۱)$$

ہے۔ تب متقاربوں کی مساوات ہوگی

$$1) \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = ۰ \dots (۲)$$

بشرطیکہ ہم لہ کو ایسی قیمت دیں کہ وہ (۲) کو خطوطِ مستقیم کا ایک زوج بنادے۔

وہ شرط کہ (۲) خطوطِ مستقیم کے زوج کو تغییر کرے یہ ہے کہ [دفعہ

۱۷۱]

$$۰ = \begin{vmatrix} \text{گ} & \text{ب} & ۱ \\ \text{ف} & \text{ن} & \text{گ} \\ \text{ل} + \text{ج} & & \end{vmatrix}$$

$$۰ = \Delta + (۱ \text{ ب} - ۲ \text{ لا})$$

اس لیے (۱) کے متقاربوں کی مساوات

$$1) \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = \frac{\Delta}{\text{ب} - ۲ \text{ لا}}$$

ہے۔

دو مزدوج قطعات زائد کی مساواتوں اور ان کے متقاربوں کی مساوات میں صرف مستقلات کا فرق ہوگا جو ایک دوسرے کے مساوی مگر علامت میں مختلف ہوں گے [دفعہ ۱۵۳] اس لیے (۱) کے مزدوج زائد کی مساوات (۲۳۶)

$$1) \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = \frac{\Delta ۲}{\text{ب} - ۲ \text{ لا}}$$

ہے۔

نتیجہ صریح۔ وہ خطوط جو مساوات

$$1) \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = ۰$$

سے تعمیر ہوتے ہیں مخروطی کے متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔ (سم)

$$\text{مثال۔ مخروطی لا} - \text{لا} - ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} - ۴ \text{ لا} = ۰$$

کے متقارب معلوم کرو۔

مقارب لا۔ لا ما۔ لا ما ۲۔ لا ما ۳۔ لا ما ۴۔ لا ما ۵۔ لا ما ۶۔ لا ما ۷۔ لا ما ۸۔ لا ما ۹۔ لا ما ۱۰۔ ہونگے اگر یہ مساوات خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔ اس کو لائیں دو درجہ سمجھ کر حل کرنے سے

$$لا = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 + لا - لا ۲ + لا ۳ - لا ۴ + لا ۵ - لا ۶ + لا ۷ - لا ۸ + لا ۹ - لا ۱۰}$$

اس لیے خطوط مستقیم کے لیے (دفعہ ۳۷) ۹ (لا - ۲) = ۰ یا لا = ۱ ہے۔ ایسے مطلوبہ مقارب

$$لا - لا ما - لا ما ۲ + لا ما ۳ - لا ما ۴ + لا ما ۵ - لا ما ۶ + لا ما ۷ - لا ما ۸ + لا ما ۹ - لا ما ۱۰ = ۰$$

ہیں۔

۱۷۵۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ مخروطی قائم زائد ہو۔
اگر مخروطی کی مساوات

$$لا + لا ۲ + لا ۳ + لا ۴ + لا ۵ + لا ۶ + لا ۷ + لا ۸ + لا ۹ + لا ۱۰ = ۰$$

ہو تو مساوات لا + لا ۲ + لا ۳ + لا ۴ + لا ۵ + لا ۶ + لا ۷ + لا ۸ + لا ۹ + لا ۱۰ = ۰ (۱)

دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو متقاربوں کے متوازی ہیں۔

اس لیے اگر عام مساوات سے تعبیر شدہ مخروطی قائم زائد ہے تو خطوط

(۱) کو باہم علی القوام ہونا چاہیے۔ اس لیے مطلوبہ شرط [دفعہ ۴۴]

$$لا + لا ۲ + لا ۳ + لا ۴ + لا ۵ + لا ۶ + لا ۷ + لا ۸ + لا ۹ + لا ۱۰ = ۰ \quad (۲)$$

ہے۔

اگر محدودوں کے محاور باہم علی القوام ہوں تو شرط

$$لا + لا ۲ + لا ۳ + لا ۴ + لا ۵ + لا ۶ + لا ۷ + لا ۸ + لا ۹ + لا ۱۰ = ۰ \quad (۳)$$

ہوگی۔

۱۷۶۔ کسی مرکز دار مخروطی کے محوروں کے طول جو درجہ دوم کی عام مساوات سے حاصل ہوتے ہیں دفعات ۱۶۹ اور ۱۷۱ کے نتیجوں سے

معلوم کئے جا سکتے ہیں۔
 مبداء کو مخروطی کے مرکز پر تبدیل کرنے سے مساوات

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$
 ہو جاتی ہے۔

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 0$$
..... (۱)

جہاں
$$\Delta = \frac{1}{2} (b^2 - 4ac)$$
..... (۲)

اب دفعہ ۱ کی رُو سے مخروطی (۱) کے نیم محوروں کے مربع مساوات

$$r^2 = (b - \frac{1}{2}b) + (b + \frac{1}{2}b) = 2$$

کی اصلیں ہیں، یا (۲) سے

$$r^2 = (b - \frac{1}{2}b) + (b + \frac{1}{2}b) = 2$$

کی اصلیں ہیں۔

مثال ۱۔ مخروطی
$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

کے محوروں کے طول معلوم کرو۔

$$\Delta = 192 \text{ اور } b = 16$$

یہاں $b = 16$ اور $\Delta = 192$

$$r^2 = 16 \times 16 - 192 = 16$$

ہے۔ اس لیے

$$r = 4$$

∴ نیم محوروں کے طول 4 اور 4 ہیں۔

مثال ۲۔ مخروطی
$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

کے محوروں کے طول معلوم کرو۔

$$\Delta = \frac{5}{4} \text{ اور } b = \frac{5}{2}$$

اس لیے نیم محوروں کے مربع مساوات

$$۰ = ۲۰ - ۲۸ - ۲$$

ہے اور اس لیے $۲ = ۶۰$ یا $۲ = ۱۲$
اس لیے محرومی کی مساوات سادہ ترین شکل میں

$$۱ = \frac{۲۸}{۱۲} - \frac{۲۰}{۶۰}$$

—

نویں باب پر مثالیں

(۲۳۸)

۱۔ حسب ذیل مخنیوں کے مراکز معلوم کرو:

$$(۱) ۳ - لا - لا ۵ + ما ۶ + لا ۱۱ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۲) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۳) ۳ - لا ۲ - لا ۵ + ما ۶ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

نیز مرکزوں میں سے گزرنے والے محوروں کے حوالے سے ان مخنیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۲۔ حسب ذیل مساواتوں سے کون سے منحنی تبصیر ہوتے ہیں؟

$$(۱) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۲) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۳) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۴) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۵) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۶) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۷) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۸) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۹) لا ۱۱ + لا ۱۳ - لا ۱۳ + ما ۱۳ = ۰$$

$$(۵) \quad ۰ = ۲ + ۶۲ + ۱۱۲ + ۲(۱۳ + ۱۱۲)$$

$$(۶) \quad ۰ = ۱۱۲ - ۱۱۲ + ۱۰ + ۱۱۲ + ۱۰ + ۱۱۲$$

$$(۷) \quad ۰ = ۱۱۲ + ۱۱۲ + ۱۱۲ + ۱۱۲ - ۱۱۲ - ۱۱۲ - ۱۱۲ - ۱۱۲$$

۴۔ اگر ایک مخروطی کے دو وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں تو ثابت کرو کہ ان کا نقطہ تقاطع منحنی کا مرکز ہوتا چاہیے۔

۵۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$۱۰ = (۳ - ۶۲ + ۱۱۲) + (۱ + ۶۲ - ۱۱۲)$$

کے نیم محوروں کا حاصل ضرب اکائی ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ ناقص

$$۰ = ۷ + ۶۲ - ۱۱۲ - ۱۱۲ + ۱۱۲$$

کے نیم محوروں کا حاصل ضرب $\frac{۲}{۷}$ ہے اور اس کے محوروں کی مساوات

$$۰ = ۸ - ۶۲ + ۱۱۲ - ۱۱۲ + ۱۱۲$$

۷۔

۷۔ کہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

(۲۳۹)

$$۰ = ۹ - ۶۲ + ۱۱۲ - ۱۱۲ + ۱۱۲$$

خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے گی؟

۸۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے متقارب خطوط ۲ لا

+ ۵ - ۶۲ = ۰ اور ۵ + ۱۱۲ - ۶۲ = ۰ ہیں اور جو نقطہ (+۱، -۱) میں سے گزرتا ہے۔

$$۹۔ مخروطی ۳ لا - ۱۱۲ - ۶۲ + ۵ لا - ۶۲ = ۰$$

کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو اور نیز اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے متقارب وہی ہیں اور جو نقطہ (۲، ۲) میں سے گزرتا ہے۔

$$۱۰۔ زائد ۶ لا - ۱۱۲ - ۶۲ + ۵ لا - ۶۲ = ۰$$

کے متقارب معلوم کرو اور نیز مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو۔

۱۱۔ اگر $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ھ}$ لا ما + ب ما = ۱ اور $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ھ}$ لا ما + ب ما = ۱
ایک ہی محروطی کو تعبیر کریں اور محاورہ قائم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(۱ - ب) + ۲ = ۲ (ب - ۱) + ۲$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ محوروں کے تمام محلوں کے لیے بشرطیکہ وہ قائم رہیں
اور مبداء نہ بدلے مساوات

$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ھ}$ لا ما + ب ما + ۲ گ لا + ف ما + ج = ۰ میں گ + ف
کی قیمت مستقل رہتی ہے۔

۱۳۔ ایک دئے ہوئے خط کے کسی نقطہ سے دو دائروں میں سے ہر ایک کے
ماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر تماس کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے
جس کے متقارب دئے ہوئے خط پر اور اس خط پر عمود ہیں جو دائروں کے مرکزوں کو
ملتا ہے۔

۱۴۔ ایک متغیر دائرہ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور ایک
محروطی کو نقطوں ف، ق، س پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ف \times ق \times س = \text{دائرہ کا نصف قطر}$$

(دائرہ کا نصف قطر)

مستقل ہے۔

۱۵۔ اگر $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ھ}$ لا ما + ب ما = ۱ اور $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ھ}$ لا ما + ب ما = ۱
دو محروطیوں کی مساواتیں ہوں تو قائم محوروں کی کسی تبدیلی کی وجہ سے ۱ لا
+ ب ب + ۲ ھ نہیں بدلیگا۔

۱۶۔ لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے قائم زائدوں لا، ما، ۲ لا، ۲ ھ کے
(۲۴۰)

راسوں کا طریق وہ منحنی ہے جس کی مساوات $(۱ + ما) = ۱ (لا - ما) = ۰$ ہے۔

۱۷۔ اگر $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ھ}$ لا ما + ب ما + ۲ گ لا + ف ما + ج = ۰ دو خطوط مستقیم
کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ مبداء سے ان کے نقطہ تقاطع کے فاصلہ کا مربع

$$(ج ۱ - گ ۲ + ب ج - ف ۲)$$

$$۱ ب - ۲ ھ$$

ہے۔

۱۸۔ اگر $۱ لا + ۲ ھ لا + ۳ ب ما + ۴ گ لا + ۵ ف ما + ج = ۰$ ایک قائم زائد ہو تو ثابت کرو کہ اس کے متقاربوں کے حوالے سے اس کی مساوات $۲ (۱ ب - ۲ ھ) لا + ما - ۵ = ۰$ ہوگی۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ مخروطی $۱ لا + ۲ ھ لا + ۳ ب ما + ۴ گ لا + ۵ ف ما + ج = ۰$ کے متقاربوں کی مساوات $ب لا - ۲ ھ لا + ۳ ما + ۴ ما = ۰$ ہے جہاں

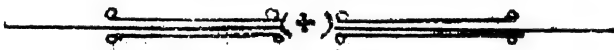
$۴ = لا + ۵ ھ ما + گ$ اور $ما = ھ لا + ب ما + ف$ ثابت کرو کہ وہ منحنی جو مساواتوں

$لا = ۱ ت + ۲ ب ت + ج$ اور $ما = ۱ ت + ۲ ب ت + ج$ سے حاصل ہوتا ہے مکانی ہے جس کا وتر خاص

$$(۱ ب - ۲ ب)$$

$$۲ (۱ ۲ + ۲ ۱)$$

ہے۔



دسواں باب

متفرق مسائل

(۲۴۱)

۱۷۷۔ ہم (دفعہ ۱۶۷) میں ثابت کر چکے ہیں کہ وہ منحنی جو درجہ دوم کی مساوات سے تعبیر ہوتا ہے ہمیشہ ایک مخروطی ہوتا ہے۔
ہم اس پورے باب میں مخروطی کی مساوات کو

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz = 0$$

فرض کریں گے الا انکہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔
اس مساوات کے دائیں جانب جو جملہ ہے اس کو بعض اوقات علامت (لا، ما) سے تعبیر کیا جائے گا۔

۱۷۸۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو ایک مخروطی کے دو نقطوں میں سے گزرے اور نیز کسی نقطہ پر تماس کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مخروطی پر دو نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

$$\{ (لا-لا)(لا-لا) + (لا-لا)(لا-لا) + (لا-لا)(لا-لا) \}$$

$$+ \text{ب} (\text{ا} - \text{م}) (\text{أ} - \text{م}) = \text{ال} + \text{لا} + \text{ما} + \text{با} + \text{مگ} + \text{لا} + \text{رف} + \text{ما} + \text{ج}$$

(1).....

وہ کسی خاص خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

وہ کسی خاص خطِ ستیم کو بغیر کر رہی ہے۔
 اگر ہم مساوات (۱) میں $\lambda = 0$ لائیں اور $\mu = 0$ رکھیں تو دائیں جانبی
 رکن متانلاً معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن کے معدوم ہونے کی وجہ
 یہ ہے کہ نقطہ (۱، ۰) منحنی پر ہے۔ اس لیے نقطہ (۱، ۰) خطِ ستیم (۱) پر
 واقع ہے، اسی طرح نقطہ (۰، ۱) بھی اس خط پر واقع ہے۔

پس نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات (۱) ہے اور یہ مساوات

$(\text{لَا} + \text{لَا}) + (\text{مَا} + \text{لَا}) + (\text{مَا} + \text{لَا}) + (\text{ب} + \text{مَا} + \text{لَا})$

۲+ لا + ف + ج = لا لا لا + (لا ما + لا ما) + ب ما ما (۲)

مساوات سے اس طرح حاصل ہو جاتی ہے کہ لا کی بجائے لاا ۲ لاا ۲ لاا کی بجائے لاا + لاا ۲ لاا کی بجائے لاا + لاا ۲ اور لاا کی بجائے لاا + لاا لکھا جائے۔

۹۷۱۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط مستقیم ایک مخروطی کا تماس ہو سکے۔

فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

$$ل + لا + م + ن = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔

ان خطوط مستقیم کی مساوات جو میدار کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں خط (۱) منحنی فہ (لاا، ما) = کو قطع کرتا ہے مساوات (دفعہ ۳۸)

$$لاا + لاا + م + ب - ما - ۲ (گ لا + ف ما) \frac{ل + لا + م + ن}{ن} + ج = \frac{ل + لا + م + ن}{ن}$$

$$۰ = \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

اب اگر خط (۱) مخروطی فہ (لاا، ما) = کا تماس ہے تو وہ مخروطی کو منطبق نقطوں پر قطع کرے گا اور اس لیے خطوط (۲) منطبق ہونے چاہئیں اس کے لیے شرط ہے

$$(۲۳) \quad (۱ن - ۲گ ل ل ن + ج ل) (بن - ۲ف م ن + ج م) =$$

$$= (ھ ن - ۲ف ل ن - گ م ن + ج ل م)$$

$$یا ل ۲ (ب ج - ف ن) + م (ج ل - گ ن) + ن (ا ب - ھ ن) + م ۲ (ن گ - ھ ف)$$

$$+ ۲ ل (ھ ف - گ ب) + ل م (ف گ - ھ ج) = ۰ \dots (۳)$$

اس مساوات (۳) کو شکل

۱. ل + ب + م + ج + ن + ۲ + ف + م + ن + ۲ + گ + ن + ل + ۲ + ھ + ل + م = ۰

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں سر (ب، ج وغیرہ منقطع

۱	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ن	ج

(سہ)

میں ل، ب، ج وغیرہ کے ہم جزو نہ رہی ہیں۔

ثبوت دیگر۔ نقطہ (لا، ما) پر کاماس

لا (لا + ھ + ما + گ) + ما (ھ + لا + ب + ما + ف) + گ (لا + ف + ما + ج) = ۰

ہے۔ یہ ماس دئے ہوئے خط پر منطبق ہوگا اگر

۱. لا + ھ + ما + گ - ل = ۰

ھ + لا + ب + ما + ف - ل = ۰

گ + لا + ف + ما + ج - ل = ۰

نیز چونکہ (لا، ما) دئے ہوئے خط پر ہے اس لیے

ل + لا + م + ما + ن = ۰

پس لا، ما، ل کو ساقل کرنے پر حاصل ہوگا

۱	ھ	خ	ل
ھ	ب	ف	م
گ	ن	ج	ن
ل	م	ن	۰

= ۰

اس کو پھیلا یا جائے تو

۱. ل + ب + م + ج + ن + ۲ + ف + م + ن + ۲ + گ + ن + ل + ۲ + ھ + ل + م = ۰

۱۸۰۔ ایک محفوظی کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کی مساوات

معلوم کرنا۔

حسب دفعات ۶، ۱۰، ۱۱ یا ۱۱۹ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ قطبی کی مساوات اُسی شکل کی ہوتی ہے جو ماس کے مساوات کی ہے۔
پس نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

$$لا لا + لا = (لا لا + لا ما) + ب ما + گ (لا لا) + ف (ما + ما) + ج = ۰$$

$$یا لا (لا لا + لا ما + گ) + ما (لا لا + ب ما + ف) + گ لا + ف ما + ج = ۰$$

ہے۔
مبدأ کے قطبی کی مساوات کو اوپر کی مساوات میں لا = ما = ب رکھ کر (۲۴۴)
ماصل کیا جاتا ہے چنانچہ یہ مساوات
گ لا + ف ما + ج = ۰

ہے۔
۱۸۱۔ اگر دو نقطے 'ف' 'ق' ایسے ہوں کہ ایک مخروطی کے لحاظ سے 'ف' کے قطبی پر 'ق' واقع ہو تو اُسی مخروطی کے لحاظ سے 'ق' کے قطبی پر 'ف' واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ 'ف' کے محدد لا، ما اور 'ق' کے محدد لا، ما ہیں۔
'ف' کے قطبی کی مساوات ہے

$$لا لا + لا = (لا لا + لا ما) + ب ما + گ (لا لا) + ف (ما + ما) + ج = ۰$$

اب چونکہ نقطہ (لا، ما) 'ف' کے قطبی پر ہے اس لیے

$$لا لا + لا = (لا لا + لا ما) + ب ما + گ (لا لا) + ف (ما + ما) + ج = ۰$$

اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یہ وہ شرط بھی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گزرے۔

اگر دو نقطوں 'ف' ق کے قطبی نقطہ سر پر ملیں تو خط ف ق کا قطب سر ہو گا۔ چونکہ 'ف' ق کے قطبی پر ہے اس لیے 'س' کا قطبی 'ف' میں سے گزرے گا اور اسی طرح 'س' کا قطبی 'ق' میں سے بھی گزرے گا اس لیے اس کو خط ف ق ہونا چاہیے۔

اگر مخروطی کا کوئی وتر ایک ثابت نقطہ ق میں سے کھینچا جائے اور اس وتر کا قطب 'ف' ہو تو چونکہ 'ق' 'ف' کے قطبی پر ہے اس لیے نقطہ ف ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہو گا یعنی ق کے قطبی پر۔

تعریف۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو نقطوں کو اس وقت

مزدوج کہا جاتا ہے جبکہ ہر ایک دوسرے کے قطبی پر واقع ہو۔

تعریف۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو خطوط مستقیم کو اس وقت

مزدوج خطوط کہا جاتا ہے جبکہ ہر ایک دوسرے کے قطب میں سے گزرے۔

مزدوج قطب 'حسب تعریف دفعہ ۱۲' مرکز میں سے گزرنے والے مزدوج

خطوط ہوتے ہیں۔ ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ دو خطوط مستقیم

$$ل، لا، م، ما، ن، نا، = ۰$$

$$ل، لا، م، ما، ن، نا، = ۰$$

اور

مخروطی ف (لا، ما) = ۰ کے لحاظ سے مزدوج ہوں، طریقہ حسب ذیل ہے۔

فرض کرو کہ ل، لا، م، ما، ن، نا، = ۰ کا قطب (لا، ما) ہے پس ل، لا،

$$م، ما، ن، نا، = ۰ وہی ہے جو$$

$$لا (لا، ما، گ) + (ما، لا، ب، ما، ف) + گ (لا، ف، ما، ج) = ۰$$

ہے اور اس لیے (۲۴۵)

$$لا، لا، م، ما، گ - ل، ل، = ۰$$

$$ما، لا، ب، ما، ف - ل، ل، = ۰$$

اور
اب اگر دے ہوئے خطوط مزدوج ہیں تو (لا، مار)
ل_۲ لا + م_۲ ما + ن_۲ ن = ۰

پر ہے، اس لیے

ل_۲ لا + م_۲ ما + ن_۲ ن = ۰
پس لا، مار، لہ کو ساقل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= (ل ل + ب م + ج ن + ف م) (م ل + م ن + ل م) +$$

$$+ (ن ل + ن م + ل ن) ہ + (ل م + ل ن + م ل) = ۰$$

۱۸۲۔ اگر مخروطی کا کوئی وتر ایک نقطہ میں سے گزرتا ہو

کیسے بچا جائے تو وہ منحنی اور و کے قطبی سے موسیقی طور پر منقطع ہوگا۔

فرض کرو کہ وف ق سا کوئی وتر ہے جو منحنی کو ف، سا پر اور و کے قطبی کو ق پر قطع کرتا ہے۔

و کو مبدأ قرار دو اور خط وف ق سا کو محور لا۔ فرض کرو کہ مخروطی

کی مساوات

$$۱ لا^۲ + ۲ لا ما + ۲ ما ب + ۲ ب گ + لا ن + ۲ ن ف + ما ج = ۰$$

ہے۔ جہاں ما = مخروطی کو قطع کرتا ہے

$$۱ لا^۲ + ۲ ب گ + لا ج = ۰$$

$$\therefore \frac{۱}{و ف} + \frac{۱}{و سا} = - \frac{۲ ب گ}{ج} \dots \dots (۱)$$

و کے قلم کی مساوات

گ لا ف ۱ + ج = .

ہے۔ اس لیے

(۲)، $\frac{1}{\text{وق}} = \frac{\text{گ}}{\text{ج}}$ سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{۲}{وق} = \frac{۱}{و۱} + \frac{۱}{و۲}$$

ملا آتا ہے تو $۲لا = لا + لا$ ، $۲ما = ما + ما$ اور اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

یا $لا + ۲ما + گ + م (۲لا + ب + م + ف) =$
 $لا (۱ + م + ۲) + ما (۲ + م + ب) + گ + م + ف = (۳) \dots$
 جو مطلوبہ مساوات ہے۔
 اگر خط (۳) کو شکل $ما = م + لا$ ک میں لکھا جائے تو

$$م = \frac{۱ + م + ۲}{۲ + م + ب}$$

یا $لا + ۲ (م + م) + ب + م = م =$ (۴)
 یہ وہ شرط ہے کہ خطوط $ما = م + لا$ اور $ما = م + لا$ مخروطی
 $لا + ۲ (۲لا + ما + ب + م + گ + لا + ۲ف + ما + ج) =$
 کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں۔ (سہ)

۱۸۴۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ خطوط $لا + ۲ (۲لا + ما + ب + م + گ + لا + ۲ف + ما + ج) =$
 مخروطی $لا + ۲ (۲لا + ما + ب + م + گ + لا + ۲ف + ما + ج) =$ کے مزدوج قطر ہو سکیں۔
 اگر خطوط $لا + ۲ (۲لا + ما + ب + م + گ + لا + ۲ف + ما + ج) =$ وہی ہیں جو $ما = م + لا$ اور
 $ما = م + لا$ سے حاصل ہوتے ہیں تو

$$م + م = ۲ - \frac{۲}{ب} \text{ اور } م + م = \frac{۱}{ب}$$

(۲۴۴) لیکن $ما = م + لا$ اور $ما = م + لا$ مزدوج قطر ہیں اگر
 $لا + ۲ (م + م) + ب + م + م =$

اس لیے مطلوبہ شرط

$$لا - ۲ - \frac{۲}{ب} + \frac{۱}{ب} =$$

یا $لا + ب = ۲ - \frac{۱}{ب}$ (سہ)

ہے۔

[نتیجہ بالا کو دفعات ۱۵۶ اور ۵۸ سے فوراً ماخوذ کیا جاسکتا ہے]

مثال ۱۔ مخروطی ۱ لا + ۲ ھ لا + ب ما = ۱ کے مساوی

مزدوج قطروں کی مساوات معلوم کرنا۔

اُن خطوط مستقیم سے جو مخروطی کے مرکز اور مخروطی اوری ہم مرکز دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے

ہیں مساوی قطر حاصل ہوتے ہیں۔ مخروطی اور دائرہ ل (لا + ما + ۲ لا + جم) = ۱ کے نقاط تقاطع میں سے خطوط

$$(۱-ل) لا + ۲ (ھ-ل جم) لا + ب (ب-ل) ما = ۰$$

گزرتے ہیں۔ یہ خطوط مزدوج ہوں گے اگر

$$ب (۱-ل) لا + ۱ (ب-ل) = ۲ (ھ-ل جم) (ب-ل) جم$$

اس سے ل کی جو قیمتیں حاصل ہوں اُن کو درج کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$۱ لا + ۲ ھ لا + ب ما - ۲ (۱ ب - ھ) (لا + ما + ۲ لا + جم) = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کسی دو ہم مرکز مخروطیوں میں بالعموم

مشترک مزدوج قطروں کا ایک اور صرف ایک زوج ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$۱ لا + ۲ ھ لا + ب ما = ۱ اور ۱ لا + ۲ ھ لا + ب ما = ۱$$

ہیں۔

قطر (لا + ۲ ھ لا + ب ما)۔ دونوں مخروطیوں کے لحاظ سے مزدوج ہوں گے اگر

$$۱ ب - ۲ ھ ھ + ب ب = ۰$$

$$۱ ب - ۲ ھ ھ + ب ب = ۰$$

اور

وہ قیمتیں جو اوپر کی مساوات سے حاصل ہوں گی مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی۔ اس لیے رکاسر معدوم ہونا چاہیے چنانچہ

$$(1) (لا + ہ + م + گ) + جم ط + (ہ + لا + ب + م + ف) جب ط = ۰$$

پس اگر وتروں کو ہمیشہ ایک مستقل سمت میں کھینچا جائے یعنی ط مستقل ہو تو ان کے وسطی نقطوں کا طریق [دفعہ ۱۸۳]

$$1) لا + ہ + م + گ + (ہ + لا + ب + م + ف) مس ط = ۰$$

ہے۔

۱۸۶۔ وہ مستطیل جو اس وتر کے مقطوعوں سے بنتا ہے جو نقطہ (لا، م) میں سے گذرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے رکی ان دو قیمتوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے جو دفعہ ۸۵ کی دو درجی مساوات سے حاصل ہوتی ہیں چنانچہ وہ (مستطیل)

$$فہ (لا، م)$$

$$1) جم ط + ۲ ہ جب ط + ب جب ط$$

کے مساوی ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر اسی نقطہ (لا، م) میں سے دوسرا وتر کھینچا جائے اور یہ وتر محور لا کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو اس وتر کے مقطوعوں کا مستطیل

$$فہ (لا، م)$$

$$1) جم ط + ۲ ہ جب ط + ب جب ط$$

ہوگا۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہوئے کسی مخروطی کے دو وتر دی ہوئی سمتوں میں کھینچے جائیں تو وتروں کے مقطوعوں کے مستطیلوں کی نسبت تمام نقطوں کے لیے (بشمول مخروطی کے مرکز کے) مستقل ہوتی ہے چنانچہ یہ نسبت مخروطی کے متوازی قطروں کے مربعوں کی نسبت مساوی ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ ان دو ماسوں کی نسبت جو کسی نقطہ سے مخروطی پر

ب ا : ج ا = ر : ر ج ا : ج ب = ر : ر ج ا = ر : ر

ا ج : ا ب = ر : ر

ب ا × ج ا × ج ب = ا ج × ج ا ± ا ج × ج ب ا ج × ج ب
جس سے ظاہر ہے کہ تینوں خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں کیونکہ ا ب ج
ایک خط مستقیم بنیں ہو سکتے۔

مثال ۲۔ اگر ایک مخروطی ایک مثلث کے اضلاع کو علی الترتیب
نقطوں ا اور ا ب اور ب ج اور ج ا پر قطع کرے تو

ب ا × ج ا × ج ب = ا ج × ج ا × ج ب

= ج ا × ج ب × ج ا × ج ب × ا ب × ا ب

(کارنو کا مسئلہ)

[ب ا × ج ا : ج ا × ج ب = ر : ر اور علی الترتیب اور سروں کیلئے

ر : ر ر : ر مخروطی کے وہ نیم قطر ہیں جو مثلث کے اضلاع کے متوازی ہیں]
مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی ایک کثیر ضلعی ا ب ج د ... کے
تمام ضلعوں کو مس کرے اور اضلاع ا ب ب ج ج د ... کے نقاط تماس
ف ق ق س س ... ہوں تو

ا ف × ب ق × ج ر × د س = ... ف ب × ق ج

× د س ...

۱۸۷۔ اگر مساوات

ا ل + ب م + ج ن = ا ل + ب م + ج ن

کے دائیں بائیں رکن کو اختصار آس لکھا جائے اور

ا ل + ب م + ج ن = ا ل + ب م + ج ن

کے دائیں جانبی رکن کو $س$ کو لکھا جائے تو $س$ ۔ $ل$ $س$ ۔ = ایک ایسے مخروطی کی مساوات ہوگی جو مخروطیوں $س$ ۔ = اور $س$ ۔ = کے مشترک نقطوں میں سے گزرے گا۔

کیونکہ مساوات $س$ ۔ $ل$ $س$ ۔ = دوسرے درجہ کی ہے اور اسلئے ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز اگر کوئی نقطہ دئے ہوئے دونوں مخروطیوں $س$ ۔ = اور $س$ ۔ = کے محدود دونوں مساواتوں $س$ ۔ = اور $س$ ۔ = کو پورا کریں گے اور اس لئے وہ مساوات $س$ ۔ $ل$ $س$ ۔ = کو بھی پورا کریں گے۔
 $ل$ کو کوئی مناسب قیمت دیکر مخروطی $س$ ۔ $ل$ $س$ ۔ = سے کوئی اور شرط پوری کرائی جاسکتی ہے۔

پس $س$ ۔ $ل$ $س$ ۔ = ایک ایسے مخروطی کی عام مساوات ہے جو دو دئے ہوئے مخروطیوں $س$ ۔ = اور $س$ ۔ = کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

اگر مخروطی $س$ ۔ = دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے جنکی مساواتیں $ل$ $ل$ $م$ $ن$ ۔ = اور $ل$ $ل$ $م$ $ن$ ۔ = ہیں جن کو ہم اختصاراً $ع$ ۔ = اور $و$ ۔ = لکھیں گے تو $س$ ۔ $ل$ $و$ ۔ = ایک ایسے مخروطی کی عام مساوات ہوگی جو ان نقطوں میں سے گزرے گا جہاں خطوط $ع$ ۔ = اور $و$ ۔ = مخروطی $س$ ۔ = کو قطع کرتے ہیں۔

اب اگر خط $و$ ۔ = خط $ع$ ۔ = کی جانب حرکت کر کے بالآخر اس منطبق ہو جائے تو مساوات $س$ ۔ $ل$ $ع$ ۔ = کی تمام قیمتوں کے لئے ایک ایسے مخروطی کو تعبیر کرے گی جو مخروطی $س$ ۔ = کو منطبق نقطوں کے دو زوجوں پر قطع کرے گا یعنی وہاں جہاں $س$ ۔ = سے خط $ع$ ۔ = ملتا ہے۔ اس کا

یہ مطلب ہے کہ س۔ لہ ع۔ = ایک مخروطی ہے جو س۔ = کو ان دو نقطوں پر مس کرتا ہے جہاں س۔ = خط ع۔ سے منقطع ہوتا ہے۔
مثال ۱۔ دو قائم زائد کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے تمام مخروطی

قائم زائد ہوتے ہیں۔

اگر قائم زائد کی مساواتیں س۔ = اور س۔ = ہوں تو وہ تمام مخروطی جو ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں مساوات س۔ لہ س۔ = میں شامل ہیں اب س۔ لہ س۔ = میں لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہوگا کیونکہ س۔ = اور س۔ = میں یہ مجموعہ صفر ہے، محاور قائم فرض کئے گئے ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اس کی حسب ذیل مخصوص صورتیں ہیں:

(۱) اگر دو قائم زائد چار نقطوں پر متقاطع ہوں تو ان میں سے کسی دو نقطوں کو ملا کر الاخط مستقیم دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم پر عمود ہوگا۔ (کیونکہ خطوط کا زوج نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہوا مخروطی ہے)۔

(۲) اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کے راسوں میں سے گزرے تو وہ مرکز عمودی میں سے بھی گزرے گا۔ (کیونکہ اگر مثلث کے راس ۱، ۲، ۳ ج ہوں اور راس ۱ سے ۲ ج پر کھینچا ہوا عمود مخروطی کو ۳ ج پر قطع کرے تو خطوط ۱، ۲، ۳ ج کا زوج ایک قائم زائد ہے کیونکہ یہ خطوط علی القوائم ہیں۔ اس لیے زوج ۲، ۳ ج بھی ایک قائم زائد ہے یعنی یہ خطوط علی القوائم ہیں۔)

مثال ۲۔ اگر دو مخروطیوں کے محاور متوازی ہوں تو ان کے نقاط تقاطع میں سے ایک دائرہ گزرے گا

محدوں کے محوروں کو مخروطیوں کے محوروں کے متوازی لو تو ان کی مساواتیں ہوں گی

$$لا + ب + ۲ گ + لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰$$

قطر اور اس کے مزدوج کو محاور قرار دو تو مخروطی کی مساوات ۱ لا
 + ب ما = ا ہوگی۔ فرض کرو کہ دتروں کی مساواتیں ما۔ م (لا۔ ج) = اور
 ما۔ م (لا + ج) = ۰ ہیں۔ اب ان کے سروں میں سے گزرنے والے کسی
 مخروطی کی مساوات

$$۱ لا + ب ما - ا - ل (ما - م (لا - ج) \{ (ما - م (لا + ج) \} = ۰$$

سے حاصل ہوگی۔

محور لا اس مخروطی کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جو لا۔ ا۔ لم م (لا۔ ج) =
 سے حاصل ہوتے ہیں اور لا کی یہ دو قیمتیں صرفاً مساوی اور مختلف العلامت
 ہیں خواہ ل، م، اور م کچھ ہی ہوں۔

مخصوص صورت میں اگر ق س ق اور ف س ق، ایک مخروطی
 کے دو ماسکی وتر ہوں تو خطوط ف ق اور ق ق، محور کو مرکز سے مساوی الفضل
 نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

مثال ۵۔ اگر ایک دائرہ اور ایک مخروطی میں دو ہر تاس ہو تو
 وتر تاس محوروں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر لا + ب ما - ا + ل (لا + م + ن) = ۰ ایک دائرہ ہو تو
 لا ما کا سر صفر ہے اور اس لیے ل یا م صفر ہے۔

مثال ۶۔ اگر دو دائرے ایک مخروطی کے ساتھ دو ہر تاس لگیں
 اور وتر تاس متوازی ہوں تو دائروں کا بنیادی محور تاس کے ان دتروں کے
 درمیان وسط میں ہوگا۔

دائروں

$$۱ لا + ب ما - ا + (ب - ل) (لا - د) = ۰$$

$$۱ لا + ب ما - ا + (ب - ل) (لا - د) = ۰$$

$$۲ لا - د - د = ۰$$

کا بنیادی محور

ہے۔

مثال ۷۔ اگر دو دائرے ایک مخروطی کے ساتھ دو ہر تاس کھیں (۲۵۳)
اور دو تاس ایک دوسرے پر عمود ہوں تو ان کا نقطہ تقاطع اس ہم محور نظام
کے ایک انتہائی نقطہ پر ہوتا ہے جو دائروں سے متعین ہوتا ہے۔
دائرہ کی مساواتیں جبکہ مخروطی کی مساوات $1 + a + b + c = 0$ ہو

$$1 + a + b + c = 0 \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

$$1 + a + b + c = 0 \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

ہیں۔ پس تفریق کرنے پر نقطہ دائرہ

$$(1) - (2) \Rightarrow a - b = 0$$

دئے ہوئے دائروں کے ساتھ ہم محور ہے۔

۱۸۸۔ ماسوں کے اس زوج کی مساوات معلوم کرنا جو کسی
نقطہ سے مخروطی پر کھینچے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$1 + a + b + c = 0 \quad (1)$$

ہے۔ اگر (a, b, c) وہ نقطہ ہو جس سے ماس کھینچے گئے ہیں تو وہ تاس کی مساوات

$$1 + a + b + c = 0 \quad (2)$$

ہوگی۔

مساوات

$$1 + a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$1 + a + b + c = 0 \quad (2)$$

$$1 + a + b + c = 0 \quad (3)$$

ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی مخروطی کو ان دو نقطوں پر مس کرتا ہے

(۲۵۵)

۱۹۰۔ مخروطی کے مرتب دائرہ کی مساوات معلوم کرنا۔

اُن ماسوں کی مساوات جو (لا، ما) سے مخروطی ذہ (لا، ما) = کے
کھینچے گئے ہوں

$$(1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = (لا، ما)$$

$$= (1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = (لا، ما)$$

ہے۔ یہ دو ماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر مساوات بالا میں
لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔ اس کے لیے ضرورت ہے کہ

$$(1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = (لا، ما)$$

$$= (1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = (لا، ما)$$

اس لیے نقطہ (لا، ما) اُس دائرہ پر ہے جس کی مساوات

$$(1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = (لا، ما)$$

ہے۔

یا ج لا + ج ما۔ ۲ لا۔ ۲ ف + ۱ + ب = ۰۔ (۱)
ہے جہاں 'ب'، 'ج'، 'ف'، 'گ'، 'ہ' کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۱۹۰ میں
بیان کئے جا چکے ہیں۔

اگر ۲۔ ۱ + ب = ۰ تو اوپر کی مساوات

$$۲ لا (ب گ - ف ۲ + ۲ ما (ف ۱ - گ) + ج (۱ + ب) - ف ۲ گ = ۰$$

یا ۲ گ لا + ۲ ف ما - ۱ - ب = ۰۔ (۲)
میں تحویل ہوتی ہے۔

اس صورت میں مخروطی ایک مکافی ہے اور (۲) مرتب کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ معنی

$$۱۱ لا + ۲۲ لا + ۳۳ لا + ۴۴ لا + ۵۵ لا + ۶۶ لا + ۷۷ لا + ۸۸ لا + ۹۹ لا = ۰$$

کے مرتب دائرہ کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ - لا^۲ - لا^۲ = ۱$$

۶۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ مکافی

$$لا^۲ + لا^۲ + ما^۲ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ = ۰$$

کے مرتب کی مساوات $لا^۳ - لا^۳ + ما^۳ = ۰$ ہے۔

۱۹۱۔ ثابت کرو کہ ایک مرکزدار مخروطی میں چار اور صرف چار ماسکے (۲۵۶)

ہوتے ہیں جن میں سے دو حقیقی ہوتے ہیں اور دو خیالی۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$لا^۲ + ب^۲ - ما^۲ = ۰ \dots \dots (۱)$$

۷۔

فرض کرو کہ ایک ماسکے (لا، ما) ہے اور نظیری مرتب کی مساوات

لاجم ع + ماجب ع - ع = ۰ ہے۔ اگر مخروطی کا خروج المکرز ہو تو مخروطی کی مساوات ہوگی

$$(لا - لا) + (ما - ما) - ز^۲ = (لاجم ع + ماجب ع - ع) = ۰ \dots (۲)$$

چونکہ (۱) اور (۲) ایک ہی منحنی کو تعبیر کرتے ہیں اور (۱) میں لا ماکام

صفر ہے اس لیے (۲) میں لا ماکام صفر ہونا چاہیے پس ع صفر ہے

یا $\frac{۱}{۲}$ ۔

اس لیے ایک مرتب، محوروں میں ایک یا دوسرے کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ ع = ۰ تو چونکہ (۱) میں لا اور ما کے سر صفر ہیں اس لیے

ما = ۰ اور لا = ز ع - نیز (۱) اور (۲) میں دوسرے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\frac{۱ - لا^۲}{ز^۲} = \frac{ب^۲}{۱} = \frac{۱}{۱ - ز^۲}$$

$$ن \quad ز = \sqrt{1 - \frac{1}{ب}} \quad (۳) \dots\dots\dots$$

$$(۴) \dots\dots\dots ۱ ع لآ = ۱$$

$$اور \quad (۵) \dots\dots\dots ۱ لآ = \frac{1}{ب} - \frac{1}{ب}$$

(۵) سے ہم دیکھتے ہیں کہ محور لاپردو ماسکے ہیں جن کے فاصلے

مرکز سے $\pm \sqrt{1 - \frac{1}{ب}}$ ہیں۔ (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک مرتب نظیری ماسکہ کا قطبی ہے۔

اگر $e = \frac{۱}{ب}$ تو اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ محور لاپردو ماسکے

ہیں جن کے فاصلے مرکز سے $\pm \sqrt{1 - \frac{1}{ب}}$ ہیں۔ ماسکوں کے ان دو

زوجوں میں سے ایک صرفاً حقیقی ہے اور دوسرا خیالی خواہ ۱ اور ب کی قیمتیں (حقیقی) کچھ ہی ہوں۔

محور لاپر کے ایک ماسکہ کے حوالے سے محروطی کا خروج المرکز (۲۵۷)

حسب مساوات (۳) $\sqrt{1 - \frac{1}{ب}}$ کے مساوی ہے اسی طرح محور لاپر کے

ایک ماسکہ کے حوالے سے خروج المرکز $\sqrt{1 - \frac{1}{ب}}$ ہوگا۔ اگر منحنی ناقص ہے

تو ۱ اور ب کی علامت ایک ہی ہوگی اور ان میں سے ایک خروج المرکز

حقیقی اور دوسرا خیالی ہوگا۔ لیکن اگر منحنی ایک زائد ہو تو

۱ اور ب کی علامتیں مختلف ہونگی اور دونوں خروج المرکز حقیقی ہوں گے۔

کسی محروطی میں اگر ز ۱ اور ز پر خروج المرکز ہوں تو

$$1 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{b-1} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{b-1}$$

۱۹۲۔ درجہ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ مخروطی کا خروج المرکز معلوم کرنا۔

محوروں کو بدلنے سے ہم مخروطی کی مساوات کو شکل

عہ لا^۱ + بہ ما^۱ + جہ = ۰ (۱) میں تبدیل کر سکتے ہیں۔
اگر مخروطی کا ایک خروج المرکز ز ہو تو

عہ = بہ (۱ - ز^۱) (۲) لیکن (دفعہ ۵۲) ہم جانتے ہیں کہ

عہ + بہ = ۱ + ب (۳)

اور عہ بہ = ۱ ب - ۲ (۴) مساواتوں (۲) (۳) اور (۴) سے عہ اور بہ کو ساقط کرنے پر

$$\frac{(1 - z^1)(1 + b)}{1 - 2b} = \frac{(1 - z^1)}{1 - 2b}$$

یا ز^۱ + (۱ - ب) ۱ + ۲ (۵) عہ = (۱ - ز^۱) ۱ + ۲

اگر منحنی ایک ناقص ہے تو ۱ ب - ۲ مثبت ہے اور ز^۱ کی ایک مثبت ہے اور دوسری منفی۔ ز کی حقیقی قیمت ناقص کا وہ خروج المرکز ہے جو ایک حقیقی ماسکہ کے حوالے سے ہوتا ہے اور خیالی قیمت وہ خروج المرکز ہے جو خیالی ماسکہ کے حوالے سے ہوتا ہے۔

اگر منحنی ایک زائد ہے تو ز^۱ کی دونوں قیمتیں حقیقی ہیں اور اس لیے دونوں خروج المرکز حقیقی ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۹۰ میں معلوم ہو چکا ہے۔ اس لیے ان دو خروج المرکزوں میں تمیز پیدا کرنا چاہیے۔

(۱) میں عہ اور بہ کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں جبکہ منحنی زاہد ہوتا ہے اور اگر عہ کی علامت جبہ کی علامت سے مختلف ہو تو حقیقی ماسکے محور لا پیر واقع ہوں گے۔ پس حقیقی ماسکے کے حوالے سے خروج المرکز معلوم کر نیکی لیے (۳) اور (۴) سے عہ اور بہ کی قیمتیں حاصل کر دو تو (۲) سے مطلوبہ خروج المرکز معلوم ہوگا اگر عہ کی وہ قیمت دلجائے جس کی علامت جبہ کی علامت سے مختلف ہے۔

مثال۔ اُس مخروطی کا خروج المرکز معلوم کرو جس کی مساوات ہے

$$لا - م لا م - م ۲ + م ۱۰ + لا ۱۰ + م ۴ = ۰$$

مرکز کے حوالے سے مساوات لا - م لا م - م ۲ + م ۱۰ = ۱ ہے۔ یہ عہ لا + یہ م ۱ = ۰ ہو جائے گی جہاں عہ + بہ = - (اور عہ بہ = -۶ - پس عہ = ۲ اور بہ = -۳ - حقیقی ماسکے کے حوالے سے خروج المرکز مساوات ۲ = -۳ - (۱ - ز) سے حاصل ہوگا، اس لیے $ز = \frac{5}{3}$ ۔

۱۹۳۔ مخروطی کے ماسکے اور مرتب کی تعریف سے مخروطی کے ماسکے، مرتب، اور خروج المرکز حسب ذیل طریقہ پر فوراً معلوم کئے جاسکتے ہیں: اگر (عہ، بہ) ایک ماسکے ہے تو مخروطی

$$لا + م ۲ لا م + م ۱۰ + م ۲ گ لا + م ۲ ف م + ج = ۰ \dots (۱)$$

بموجب تعریف

$$(لا - عہ) + (م - بہ) - (ل لا م + م + ن) = ۰ \dots (۲)$$

کے مائل ہے جہاں نظیری مرتب ل لا م + م + ن = ۰ ہے اور خروج المرکز $ز = ل + م$ سے حاصل ہوتا ہے۔

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے پر

$$ل - ۱ = ل + م \quad ل م = ل م \quad م - ۱ = ل ب$$

$$ل ن + عہ = ل گ \quad م ن + بہ = ل ف \quad ن - عہ = بہ = ل ج$$

پس

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لہ (اے + ہ + گ) = ل (ل + ع + م + ہ + ن)} \\ \text{لہ (ع + ہ + ب + ف) = م (ل + ع + م + ہ + ن)} \\ \text{لہ (گ + ع + ف + ہ + ج) = ن (ل + ع + م + ہ + ن)} \end{array} \right. \dots (۱)$$

نیز

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لہ (۱ - ہ) = م - ل} \\ \text{لہ = ل م} \end{array} \right. \dots (ب)$$

۱۔ ماسکے۔
مساواتوں (۱) کو ترتیب وار عہ، ہ، ا سے ضرب دو اور جمع

کرو تو

$$(ل + ع + م + ہ + ن) = لہ (ع + ہ)$$

نیز

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(ل - م) (ل + ع + م + ہ + ن) = لہ (اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف) } \\ \text{اور ل م (ل + ع + م + ہ + ن) = لہ (اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف) } \end{array} \right.$$

اس لیے مساواتوں (ب) سے حاصل ہوتا ہے

$$(اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)$$

۱ - ب

$$\frac{(اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)}{۱ - ب} =$$

اس لیے ماسکے دو مخروطیوں کے نقاط تقاطع ہیں جو مساواتوں

$$(اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)$$

۱ - ب

$$= \frac{(اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)}{۱ - ب} = \text{ف (لا، ما)}$$

یعنی

$$لا + ما = ۰$$

ان ماسوں کا وتر ماس نظیری مرتب ہے۔
چونکہ ماسکے سے کھینچے ہوئے ماسوں کی مساوات مرتب کے محل پر
منحصر نہیں ہوتی اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مخروطیوں میں ایک ماسکے
مشترک ہو تو ان کے دو خیالی ماس مشترک ہوتے ہیں اور یہ کہ ہم ماس
مخروطیوں میں چار مشترک ماس ہوتے ہیں۔

اب اگر محدودوں کے مبدا، اور مخروطوں کو کسی طریقہ پر بدلا جائے لیکن
وہ قائم رہیں تو ایک ماسکے سے کھینچے ہوئے ماسوں کی مساوات

$$لا + ما = ۰$$
 سے بدل کر $لا + ما + ۲ گ + ۲ ف + ۲ ج = ۰$
ہو جائے گی۔

پس ایک مخروطی کے ماسوں کی مساوات جبکہ ماس ایک
ماسکے سے کھینچے گئے ہوں ان شرطوں کو پورا کرتی ہے جو ایک
دائرہ کے لیے ہیں۔

اس کے بالکس اگر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے مخروطی کے
ماسوں کی مساوات دائرہ کی شرطوں کو پورا کرے تو نقطہ ایک
ماسکے ہونا چاہیے۔

دائرہ نقطے لائن ہی پر۔ وہ خطوط جو مبدا سے کسی دائرہ پر
لائن ہی پر کے نقطوں تک کھینچے گئے ہوں مساوات $لا + ما = ۰$ سے حاصل

ہوتے ہیں، اس لیے تمام دائروں میں لاتنا ہی پر دو خیالی مشترک نقطے ہوتے ہیں۔ ان نقطوں کو ماسکہ ناما کہتے ہیں۔
 اوپر کے بیان سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی مخروطی کے حقیقی ماسکوں کچھنے ہوئے ماس ایک خیالی ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع ہیں جس کے دوسرے دو متقابلہ راس ماسکہ ناما اور بے ہیں اور دوسرے دو متقابلہ راس مخروطی کے خیالی ماسکے ہیں۔

پس وہ مساوات جس سے مخروطی کے ماسکے اور مرتب حاصل ہوتے ہیں حسب ذیل طریقہ پر معلوم کیجا سکتی ہے۔

۱۔ ماسکے معلوم کرنا۔

نقطہ (لا، ما) سے مخروطی فہ (لا، ما) کے ماسوں کی مساوات
 (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + گ + لا + ۲ ف + ما + ج) فہ (لا، ما)
 = { (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + گ + لا + لا + ۲ ف + ما + ج) فہ (لا، ما) }

ہے۔
 اگر (لا، ما) مخروطی کا ایک ماسکہ ہو تو یہ مساوات ایک دائرہ کی شرطوں کو پورا کرتی ہے یعنی یہ کہ لا اور ما کے سر مساوی ہیں اور لا ما کا سر صفر ہے۔

پس
 فہ (لا، ما)۔ (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + گ) = ب فہ (لا، ما)۔ (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + ف)
 اور ۲ فہ (لا، ما) = (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + گ) (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + ف)

اس لیے ماسکے وہ نقطے ہیں جو مساواتوں
 (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + گ) = (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + ف)

$$= \text{فہ (لا' ما)}$$

ہیں۔ پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$۳(۳ - ۶ + ۴ - ۲) + ۲(۲ - ۴ + ۳ - ۱) = ۰$$

$$۲(۲ - ۴ + ۳ - ۱) - ۳(۳ - ۶ + ۴ - ۲) = ۰$$

$$۳ - ۴ + ۲ - ۱ = ۰ \quad یا \quad ۴ - ۳ + ۱ - ۲ = ۰$$

پس اگر ہم

$$(۱ - ۶ + ۴ - ۲)(۳ - ۶ + ۴ - ۲) = \text{فہ (لا' ما)} \dots \dots (۱)$$

میں ۲ ما کی بجائے ۱-۳ لا درج کریں تو عمل تحویل کے بعد لا' ۱-۳ = حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } ۱ = ۱ \quad \text{تو } ۱ = ۱$$

$$\text{جب } ۱ = ۱ \quad \text{تو } ۲ = ۲$$

اس لیے حقیقی ماسکے (۱-۶) اور (۱-۲) ہیں۔

خیالی ماسکے مخروطی (۱) اور خط ۴-۶ لا' ۳+۳ = کے نقاط تقاطع ہیں

مرتب ماسکوں کے قطبی ہیں اور حقیقی مرتبوں کی مساواتیں

$$۲ - ۳ - ۱ = ۰ \quad \text{اور} \quad ۲ - ۳ - ۴ = ۰$$

حاصل ہوں گی۔

لیکن مرتبوں کی مساواتیں ماسکوں کو پہلے معلوم کئے بغیر بھی اوپر کے ضابطوں

سے معلوم کیجا سکتی ہیں۔

یہ معلوم ہو گا کہ

$$۱ = ۴ - ۳ - ۱ \quad ۲ = ۴ - ۳ - ۲ \quad ۳ = ۴ - ۳ - ۳ \quad ۴ = ۴ - ۳ - ۴$$

(۲۶۳)

$$\Delta = ۴ - ۳ - ۴$$

$$\frac{۲ - ۳}{۴} = \frac{۳ - ۴}{۳} = \frac{۴ - ۳}{۲} = \frac{۳ - ۴}{۱}$$

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۳}{۲} \quad یا \quad \frac{۳}{۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$۲ - ۳ = ۳ - ۴ \quad ۳ - ۴ = ۴ - ۳ \quad ۴ - ۳ = ۳ - ۴$$

جب $۳ل + ۲م = ۰$ تو

$$۱۲ل - ۲۴ل - ۱۸ل + ۱۲ن = ۰$$

$$\therefore \frac{۲}{۳} = \frac{ن}{۱} = \frac{ل}{۲} \text{ یا } \frac{۴}{۳} = \frac{ن}{۲} = \frac{ل}{۱}$$

اس لیے حقیقی مرتبوں کی مساواتیں

$$۲ل - ۳م = ۰ \text{ اور } ۲ل - ۳م - ۱ = ۰$$

ہیں۔

جب $۳م - ۲ل = ۰$ ہو تو مرتب خیالی ہوتے ہیں۔
 ناقص اور اس کے مرتب دائرہ کی مساواتوں $\frac{۲}{۳}م + \frac{۱}{۲}ل = ۱$
 اور $۲ل + ۳م = ۲$ سے آسانی معلوم ہوتا ہے کہ مخروطی کے مرتبوں کا
 ایک زوج 'مخروطی' اور اس کے مرتب دائرہ کے نقاط تقاطع میں
 گذرنے والے متوازی خطوط ہوتے ہیں۔

پس مخروطی ذ (لا، ما) کے مرتب مساوات
 ذ (لا، ما) + ل (ج، لا) + ج (ما، ۲گ لا - ۲ف ما + ۱ + ب) = ۰
 سے معلوم ہوتے ہیں جہاں لہ ایسا ہے کہ دوسرے درجہ کی ارف تمام کماطل
 مربع ہیں۔

اس لیے لہ مساوات

$$۱ + ل (ج، ل + ج) + (ب + ل + ج) = ۰$$

$$\text{یا } ۱ + ل (۱ + ب) + ل (ج) = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اوپر کی مثال میں

$$۱ + ل (۳ - ۴) + ل (۰ - ۴) = ۰ \text{ اس لیے لہ } ۱ - ۴ = ۰ \text{ یا لہ } ۱ = ۰$$

مرکز سے ملتا ہے ن کے قطبی پر عمود ہے۔
فرض کرو کہ ن کے محدود لا، ما ہیں۔ تب ن کے قطبی کی مساوات
لا(ا + لا + ہ + ما + گ) + ما(ہ + لا + ب + ما + ف) + گ(لا + ف + ما + ج) =
(۱)۔ (۱)

-4-

ۛ- محروملی کے مرکز میں سے گذرنیوالے کسی خط کی مسادات

$$(2) \dots \dots \dots = (لا + با + ن) = (لا + با + ن)$$

ہے۔ اب چونکہ (۲)، (۱) پر عمود ہے اس لیے

$$(ا + زه) (لا + ه ما + گ) + (ه + ل ب) (ه لا + ب ما + ف) =$$

(۳).....

چونکہ (۲) نقطہ (لَا، يَآ) میں سے گزرتا ہے اس لیے

۱. لا + ما + گ + ل = (لا + ب + ما + ف) = (۴)

۲۶۵) کہ کو (۳) اور (۴) سے ساقط کرو تو ہم دیکھتے ہیں کہ (لَا، مَا) مخروطنی

(1 لا + ه + ما + گ) - (ه لا + ب + ما + ف) (1 لا + ه + ما + گ) (ه لا + ب + ما + ف)

23

٥-١

یہ ہونا چاہیے کہ یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

محوروں کی مسادات کو دفعہ ۱۹۳ یا دفعہ ۱۹۴ سے بھی ماخوذ کیا جاسکتا ہے کیونکہ اُن محزوطیوں میں سے ایک جن پر یا سکے واقع ہوتے ہیں خطوطِ مستقیم کا ایک زوج ہے جو مرکز میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے یہ زوج محاور ہونا چاہیے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ وہ تمام مخروطی جو ایک مخروطی کے چار اسکوں میں سے گزرتے ہیں قائم الزائید ہیں۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اس مخروطی کے ماسکے جس کی مساوات

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے منحنیوں

$$\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{a}{a-b} = \frac{a^2}{a^2 - ab}$$

پرواقع ہیں۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$a^2 - ab + b^2 = 5$$

کے حقیقی ماسکے (۱، ۱) اور (۲، ۲) ہیں۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ $a^2 - 8a + 17 = 1$ کے

حقیقی ماسکوں کے محدود

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ اور } \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}\right) \text{ ہیں۔}$$

مثال ۵۔ مکانی $a^2 + 2a + 17 = 2$ کا ماسک

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ ہے۔}$$

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے خیالی ماسکوں سے

اس کے کسی ماس پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب نیم محور اعظم کے مربع کے مساوی ہوگا۔

مثال ۷۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے ایک خیالی ماسک سے

ناقص کے کسی نقطہ کے ماس پر عمود نکالا جائے تو اس عمود کا پائین اس دائرہ پر واقع ہوتا ہے جو محور اصغر کو قطع کر کھینچا گیا ہو۔

مثال ۸۔ اگر ایک دائرہ ایک ناقص کے ساتھ دوہرا تماس رکھے

تو ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ سے دائرہ کا ماس ایسے بدلتا ہے جیسے وتر تماس سے اس نقطہ کا فاصلہ۔

۱۹۶۔ مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جبکہ محدودوں کے محاور

(۲۶۶)

مخروطی کے کسی نقطہ پر کے ماس اور عماد ہوں۔

مخروطی کی مسادات کی عام سے عام شکل
 $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$

ہے۔ چونکہ مبداء منحنی پر ہے اس لیے محدود (۵۰) اس مسادات کو پورا کرینگے اور اس لیے ج = ۵۰۔

خط ما = منحنی سے وہاں ملتا ہے جہاں $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$ ۔ اگر خط ما = مبداء پر کا محاس ہے تو لا کی وہ دونوں قیمتیں جو مسادات $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$ سے حاصل ہوتی ہیں صفر ہونی چاہئیں۔ اس لیے گ = ۵۰۔ پس مخروطی کی مسادات کی عام سے عام شکل جبکہ محاور لا اور ما کو محاس اور نظیری عماد پر لیا گیا ہو حسب ذیل ہے:

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$$

مثال ۱۔ مخروطی کے وہ تمام وتر جو مخروطی کے ایک ثابت نقطہ و پر ایک قائمہ زاویہ بناتے ہیں و پر کے عماد سے ایک ثابت نقطہ پر ملتے ہیں۔ و پر کے محاس اور عماد کو محاور قرار دو۔ تب مخروطی کی مسادات ہوگی $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$ ۔

فرض کرو کہ ایک وتر ف ق کی مسادات $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$ ہے۔ خطوط و ف، و ق کی مسادات (دفعہ ۳۸) ہوگی

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55 \quad (1)$$

لیکن و ف اور و ق ایک دوسرے کے علی التوا ٹھ ہیں اس لیے

(۱) میں لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہے۔ اس لیے $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$ جس سے معلوم ہوتا ہے کہ م مستقل ہے اور م اس نقطہ کا مستکانی ہے جو ف ق، عماد پر قطع کرتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک مخروطی کے کوئی دو و تروف اور و ق و پر کے محاس کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو خط ف ق، محاس کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرے گا۔

جو لہ کی تمام قیمتوں کے لیے ان دو وتروں کے چار بیروں میں سے گزرتا ہے، وہی ہوگا (دفعہ ۱۹۷)

جو لا (ب-۱) + ب ۵ - ا ۱ = ۰ ... (۲) ہے۔

اس آخری مساوات میں لا اور ما کے سر اور متقل رقم صفر ہیں اور اس لیے وہ قبل الذکر مساوات میں صفر ہونے چاہئیں۔ اس لیے

$$۱-ل ل ل = ۰، ب-ل م م = ۰، اور ا+ل ل = ۰$$

پس وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ وتروں ل لا + م ما = ۰ (۳۶۸)

اور ل لا + م ما = ۰ کے بیروں پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہیں کہ

$$ل ل ل = \frac{ل م م}{ب} = ۱ - ۱ = ۰ \dots \dots (۳)$$

۱۹۹۔ گزشتہ دفعہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ناقص (محاور ۲، ۲) (ب کے ان وتروں کے بیروں پر کے عماد جن کی مساواتیں

$$ل لا + م ما = ۰، اور ل لا + م ما = ۰$$

ہیں ایک نقطہ پر ملیں گے اگر

$$ل ل ل = ب م م = ۱ - ۱ = ۰ \dots \dots (۱)$$

اگر ان چار بیروں کے خارج المکرز زاوے ع، ہ اور ج، ضہ ہوں تو وتروں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ا} جم ع + \frac{ما}{ب} جب ع + \frac{م}{۲} جم ع = ۰$$

$$\frac{ل}{ا} جم ج + \frac{ما}{ب} جب ج + \frac{م}{۲} جم ج = ۰$$

ہونگی۔ اس لیے (۱) کے ساتھ مقابلہ کرنے پر

$$\text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ}) \text{ جم } \frac{1}{4} (\text{جہ} + \text{ضہ}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{بہ}) \text{ جم } \frac{1}{4} (\text{جہ} - \text{ضہ}) = ۰$$

$$\text{اور جب } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ}) \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{جہ} + \text{ضہ}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{بہ}) \text{ جم } \frac{1}{4} (\text{جہ} - \text{ضہ}) = ۰$$

تفریق کرنے پر $\text{جم } \frac{1}{2} (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}) = ۰$

اس لیے $\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} = ۰ \quad (۲) \dots\dots\dots$
نیز پہلی مساوات سے

$$\text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ})$$

$$+ \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{جہ} - \text{بہ} - \text{ضہ}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ}) = ۰$$

اور شرط (۲) کو استعمال کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{جب } (\text{عہ} + \text{بہ}) + \text{جب } (\text{بہ} + \text{جہ}) + \text{جب } (\text{جہ} + \text{ضہ}) = ۰ \quad (۳) \dots\dots\dots$$

(نیز دیکھو دفعہ ۱۳۹)

مثال ۱۔ اگر (ج، ب) وہ اعظم مثلث ہو جو ایک ناقص میں بنایا جائے
تو ثابت کرو کہ 'ب' ج پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں گے۔

(۲۶۹)

$$\text{خارج المکرز زاویے عہ} + \frac{\pi}{3} + \text{عہ} + \frac{\pi}{3} \text{ اور عہ} + \frac{\pi}{3} \text{ ہو گئے [دفعہ ۱۳۸] -}$$

وہ شرط کہ عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہے (دفعہ ۱۹۸) (۳)

$$\text{جب } ۲ + \text{عہ} + \text{جب } (\frac{\pi}{3} + ۲ + \text{عہ}) + \text{جب } (\frac{\pi}{3} + ۲ + \text{عہ}) = ۰$$

جو صحیح ثابت ہے۔

مثال ۲۔ ایک مرکز دار خزوطی کے چار نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے گزرنے والا دائرہ خزوطی کو کمر 'س' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'س'، 'س' خزوطی کا ایک قطر ہے۔

س میں 'مخروطی کا ایک قطر ہوگا اگر س میں اور س میں 'مزدوج
قطروں کے متوازی ہوں (دفعہ ۱۳۴)۔

اب اگر ف ق 'ل لا م ما۔ ۱ = ہو تو س میں 'ل لا م ما۔ ۱ = ہوگا (دفعہ ۱۹۹) نیز س میں 'ل لا م ما۔ ۱ = کے متوازی ہوگا کیونکہ
ف ق 'س 'م 'ل لا م ما۔ ۱ = کے متوازی ہوگا کیونکہ
[دفعہ ۱۸۲] ل لا م ما۔ ۱ = اور 'ل لا م ما۔ ۱ = کے متوازی ہوگا کیونکہ

مزدوج قطر ہیں۔

[اس مسئلہ کو دفعہ ۱۹۹ (۲) اور دفعہ ۱۳۶ سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے]
مثال ۳۔ اگر ایک ناقص کے نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' پر کے عماد
ایک نقطہ پر ملیں تو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے گزرنے والے ایک مکافی کا محور
ساوی مزدوجوں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہوگا۔
اگر (دھ) وہ نقطہ ہو جہاں عماد ملتے ہیں تو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' مخروطیوں

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ اور لا ما } \left(\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ا} \right) + \frac{ما}{ب} - \frac{ک لا}{ا} = ۰$$

کے چار نقاط تقاطع ہیں۔

ان نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے تمام مخروطی مساوات

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} - ۱ = \left\{ لا ما \left(\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ا} \right) + \frac{ما}{ب} - \frac{ک لا}{ا} \right\} = ۰$$

میں شامل ہیں۔

اگر یہ ایک مکافی ہو تو دوسرے درجہ کی ارقام ایک کامل مربع ہونی

چاہئیں اور اس لیے $\frac{لا}{ا} \pm \frac{ما}{ب}$ کا مربع ہونی چاہئیں۔ اس لیے ہر ایسے
مکافی کی مساوات شکل $\left(\frac{لا}{ا} \pm \frac{ما}{ب} \right)^2 + لا + ب + ما + ج = ۰$ کی ہے۔ اس لیے

ان کے محاور، خطوط $\frac{لا}{۱} \pm \frac{ما}{ب} = ۰$ میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہیں (صفحہ ۱۷۲)۔

مثال ۴۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ ن کا قطبی لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے اس کے قطبی پر عمود کھینچا گیا ہے، اگر یہ عمود ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ (ع) ن کا طریق ایک قائم زاہد ہے (بہ) اس مثلث کا حائط دائرہ جون کا قطبی محوروں سے قطع کرتا ہے ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرتا ہے (ج) ایک مکانی مس کا ماسکہ و ہے محوروں کو مس کرے گا اور ایسے تمام قطبیوں کو (ف) اس مکانی کا مرتب ج و ہے جہاں ج مخروطی کا مرکز ہے، اور (ص) و اور و باہم تبدیل کئے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{ب} = ۱$ ہے اور فرض کرو کہ ثابت نقطہ و کے محدد (ھ) ک ہیں۔

اگر کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہوں تو اس خط کی مساوات جون میں سے گزرے اور اس کے قطبی پر عمود ہو

$$\frac{لا - لا}{\frac{لا}{۱}} = \frac{ما - ما}{\frac{ما}{ب}}$$

$$یا \quad \frac{لا}{۱} - \frac{ما}{ب} = \frac{لا - لا}{۱} - \frac{ما - ما}{ب}$$

ہوگی۔ اگر یہ خط نقطہ (ھ) ک میں سے گزرے تو

$$\frac{لا - لا}{۱} - \frac{ما - ما}{ب} = \frac{لا - لا}{۱} - \frac{ما - ما}{ب} \dots \dots \dots (۱)$$

(۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ (لا، ما) ایک قائم زاہد پر ہے۔۔۔۔۔ (ع) اس مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات جو (لا، ما) کا قطبی محوروں سے

قطع کرتا ہے

$$لا + ما - \frac{ا^2}{لا} = \frac{ب^2}{ما} = ۰$$

ہوگی۔ یہ دائرہ نقطہ (لہ، لک) میں سے گزریگا اگر

$$لہ (لہ + ک) = \frac{ا^2}{لا} - \frac{ب^2}{ما}$$

پس اگر (لا، ما) رشتہ (ا) کو پورا کرتا ہے تو

$$لہ = \frac{ا^2 - ب^2}{لہ + ک}$$

اس لیے ایسے تمام دائرے نقطہ و میں سے گزرتے ہیں جس کے محدود

$$\frac{ا^2 - ب^2}{لہ + ک} ، \frac{ب^2 - ا^2}{ک + لہ} ، \dots \dots \dots (بہ)$$

ہیں۔

(۲۷۱) نقطہ و اس مثلث کے حاطہ دائرہ پر ہے جو محوروں اور کسی ایک قطبی سے بنتا ہے، اس لیے وہ مکانی جس کا ماسکہ و ہے اور جو محوروں کو مس کرتا ہے ہر ایک قطبی کو مس کرے گا، (جہ)

یہ مکانی ابتدائی محزوطی کے محوروں کو مس کرتا ہے، اس لیے مرکز ج، مکانی کے مرتب پر ایک نقطہ ہے، نیز خطوط ج و اور ج و محور لا کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں جو مکانی کا ایک ٹاس ہے، اس لیے و ماسکہ ہوئی وجہ سے ج و مرتب ہے، (ضہ)

چونکہ ج و ج و = (ا - ب) اور ج و ج و مھولا کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں اور محور ما کی ایک ہی جانب واقع ہیں اس لیے و اور و باہم تبدیل پذیر ہیں، (صہ)

۲۰۰ - تعریف - دو منحنیوں کو متشاہہ اور متشاہہ واقع اسوقت

کہا جاتا ہے جبکہ ایک منحنی کے سمتی نیم قطر جو کسی نقطہ و سے کھینچے گئے ہوں دوسرے منحنی کے متوازی سمتی نیم قطروں کے ساتھ جو دوسرے نقطہ و سے کھینچے گئے ہوں ایک مستقل نسبت رکھیں۔

دو منحنیوں کو متشابہ اس وقت کہا جاتا ہے جبکہ دو ثابت نقطوں و اور و سے کھینچے ہوئے نصف قطر جو ایک دوسرے کے ساتھ ایک مستقل زاویہ بنائیں مناسب ہوں۔

ان دو ثابت نقطوں و اور و کو تشابہ کے مرکز کہا جاسکتا ہے۔

۲۰۱۔ اگر دو منحنیوں کے لیے تشابہ کے مرکزوں کا ایک زوج موجود ہو تو ایسے زوجوں کی لامتناہی تعداد ہوگی۔

فرض کرو کہ تشابہ کے مرکزوں کا دیا ہوا زوج و، و ہے اور فرض کرو کہ و ن و ن متوازی نصف قطروں کا کوئی زوج ہے۔ کوئی نقطہ ج لو اور و ج کو و ج کے متوازی اور نسبت و ن : و ن میں کھینچو۔ تب متشابہ مثلثات ج و ن اور ج و ن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ج ن، ج ن کے متوازی ہے اور اس کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ ج، ج تشابہ کے مرکز ہیں۔

۲۰۲۔ اگر دو مرکز دار مخروطی متشابہ ہوں تو ان دو منحنیوں کے

مرکز تشابہ کے مرکز ہوں گے۔

فرض کرو کہ تشابہ کے دو مرکز و اور و ہیں۔ ایک مخروطی کا کوئی وتر و ق کھینچو اور اس کے جواب میں دوسرے منحنی کا وتر و ق کھینچو۔ تب بموجب فرض و و و ق : و و و ق : نظیری وتروں کے ہر زوج کے لیے مستقل ہے۔ لیکن چونکہ ایک ثابت نقطہ ہے اس لیے و و و ق ہمیشہ پہلے مخروطی کے اُس وتر کے مرع کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے جو اس کے متوازی ہے یہی صورت دوسرے مخروطی کے لیے بھی درست ہے۔ اس لیے

ان دو مخروطیوں کے نظیری قطر ایک دوسرے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں پس ان مخروطیوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہیں۔

۲۰۳۔ وہ شرطیں معلوم کرنا کہ دو مخروطی متشابه اور متشابہا واقع ہوں۔

گذشتہ دفعہ کی روش سے ان کے مرکز تشابہ کے مرکز ہیں۔
فرض کرو کہ ان مخروطیوں کی مساواتیں ان مرکوزوں اور متوازی محور
حوالے سے

$$1 \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا ما} + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 = 0$$

$$2 \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا ما} + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 = 0 \quad \text{اور}$$

ہیں۔ ان مساواتوں کو قطبی محدودوں میں لکھا جائے تو

$$1 \text{ (اجم طہ} + 2 \text{ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب طہ} + \text{ج}^2) = 0$$

$$\text{اور } 2 \text{ (اجم طہ} + 2 \text{ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب طہ} + \text{ج}^2) = 0$$

پس اگر $2:1$ مستقل ہو تو طہ کی تمام قیمتوں کے لیے

$$1 \text{ اجم طہ} + 2 \text{ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب طہ} + \text{ج}^2 = 0$$

$$2 \text{ اجم طہ} + 2 \text{ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب طہ} + \text{ج}^2 = 0$$

کو مستقل ہونا چاہیے۔ اس کے لیے ضروری ہے کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1}$ ۔ ایسے

ان دو مخروطیوں کے متقارب متوازی ہیں [اس نتیجہ کو حسب ذیل طریقہ پر

حاصل کیا جاسکتا ہے: چونکہ $2:1$ مستقل ہے جبکہ ان دو میں سے

ایک لامتناہی ہو جاتا ہے اس لیے دوسرا بھی لامتناہی ہوگا جس سے

ثابت ہوتا ہے کہ متقارب متوازی ہیں۔]

اس کے بالعکس اگر یہ شرطیں پوری ہوں اور اگر ہر کسر لے کے مساوی ہو تو

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

اس لیے نظیری نصف قطروں کی نسبت مستقل ہے اور اس لیے منحنی متشابه ہیں -

اگر ج اور ل ج ایک ہی علامت کے نہ ہوں تو مستقل نسبت خیالی ہوتی ہے، اور صفر یا لامتناہی ہوتی ہے اگر ج یا ج صفر ہو -
تشابہ کی شرطیں ان تین منحنیوں سے جن کی مساواتیں

$$لا = ج، لا = ۰، اور لا = ج$$

ہیں پوری ہوتی ہیں - اس لیے ایک زائد اس کا مزدوج زائد اور ان کے مقاربتین متشابه اور متشابه واقع منحنی ہیں - مزدوج زائد کے لیے مستقل نسبت ۱-۱ ہے اور مقاربتوں کے لیے صفر -

لیکن یہ منحنی ایک ہی شباهت نہیں رکھتے - کیونکہ متشابه منحنیوں کے لیے جن کی شباهت وہی ہو مستقل نسبت حقیقی اور معین (محدود) ہونی چاہیے -

۲۰۴ - وہ شرط معلوم کرنا کہ دو مخروطی متشابه ہوں اگرچہ

متشابه واقع نہ ہوں -

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ان دو منحنیوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہونے چاہیے - فرض کرو کہ ان منحنیوں کی مساواتیں ان کے اپنے مرکوزوں کے حوالے سے

$$۱) لا + ۲ = لا + لا + ب + ج = ۰$$

$$۲) لا + ۲ = لا + لا + ب + ج = ۰$$

اور

ہیں اور فرض کرو کہ وہ وتر جو پہلے منحنی میں محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے طہ کی تمام قیمتوں کے لیے اس وتر کے متناسب ہے جو دوسرے منحنی میں محور لا کے ساتھ زاویہ (طہ + ع) بناتا ہے - اگر دوسرے منحنی کے محوروں کو زاویہ عہ میں سے گمایا جائے تو اس وقت ان محروطیوں کے نصف قطر ایسے ہوں گے جو متعلقہ محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں گے اور

ایک مستقل نسبت میں ہوں گے۔
فرض کرو کہ اس طرح دوسرے محروطی کی مساوات

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} \text{ لا} + \text{ب} \text{ لا} + \text{ج} = ۰$$

ہو جاتی ہے۔ تب پچھلی دفعہ کی رُو سے حاصل ہونا چاہیے

$$\frac{۱}{\text{ب}} = \frac{\text{ہ}}{\text{ج}} = \frac{۱}{۱}$$

$$\text{اس لیے } \frac{۱ + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{۱ + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{۱ + \text{ب}}{\text{ب}}$$

لیکن [دفعہ ۵۲] $۱ + \text{ب} = \text{ب} + ۱$ اور $\text{ب} - \text{ب} = ۰$ $\text{ب} - \text{ب}$

- ہ اس لیے تشابہ کی شرط

$$\frac{\text{ب} - \text{ب}}{۱ + \text{ب}} = \frac{\text{ب} - \text{ب}}{۱ + \text{ب}}$$

ہے۔

اوپر کے بیان سے ظاہر ہے کہ متشابہ محروطیوں کے متقاربوں کے درمیان زاوے مساوی ہوتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۷۴)۔

اس نتیجہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے: چونکہ ان دو منحنیوں کے سمتی نیم قطر جو ایک دوسرے کے ساتھ ایک خاص مستقل زاویہ پر مال ہیں مستقل نسبت میں ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان دو سمتوں کا درمیانی زاویہ جو ایک منحنی کے لیے لامتناہی قیمتیں دیتے ہیں دوسرے منحنی کے نظیری زاوے کے مساوی ہونا چاہیے یعنی ایک محروطی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ دوسرے محروطی کے متقاربوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

۵۔ ۲۔ مثلثات جو ایک مخروطی کے اندر اور دوسرے ہم محور مخروطی کے گرد کھینچے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ مخروطی $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} =$ اپر کے نقطوں (ب' ج کے خارج المکرز زاوے ع' بہ' جہ ہیں اور فرض کرو کہ ان نقطوں پر کے ماسوں سے مثلث (ب' ج' ج' بنتا ہے۔

ب' ج' ج' پر کے ماس نقطہ (ا' پر ملتے ہیں جہاں

$$\frac{لا}{۱} = \frac{جم}{۱} \frac{۱}{(بہ+جہ)} ، \frac{ما}{۲} = \frac{جب}{۲} \frac{۱}{(بہ+جہ)}$$

$$\frac{لا}{۱} = \frac{جم}{۱} \frac{۱}{(بہ-جہ)} ، \frac{ما}{۲} = \frac{جب}{۲} \frac{۱}{(بہ-جہ)}$$

$$نقطہ (ا' مخروطی سے = \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰ \text{ پر ہوگا اگر}$$

$$\frac{لا}{۱} \frac{۱}{(بہ+جہ)} + \frac{ما}{۲} \frac{۱}{(بہ+جہ)} - ۱ = ۰ \text{ جب } \frac{لا}{۱} \frac{۱}{(بہ-جہ)} + \frac{ما}{۲} \frac{۱}{(بہ-جہ)} - ۱ = ۰$$

یعنی اگر ل + م جم بہ جم جہ + ن جب بہ جب جہ = ۰ (۱)

$$جہاں ل = \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰ ، م = \frac{ما}{۲} - \frac{لا}{۱} - ۱ = ۰ ، ن = \frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰$$

نقطہ ب' سے پر ہوگا اگر

$$ل + م جم جہ جم ع + ن جب جہ جب ع = ۰ (۲)$$

(۱) اور (۲) سے

$$\frac{ل}{جب (عہ-بہ)} = \frac{م جم جہ}{جب بہ-جب جہ} = \frac{ن جب جہ}{جم عہ-جم بہ}$$

$$یا \frac{ل}{جم \frac{۱}{۲} (عہ-بہ)} = \frac{م جم جہ}{جم \frac{۱}{۲} (عہ+بہ)} = \frac{ن جب جہ}{جم \frac{۱}{۲} (عہ+بہ)} \dots (۳)$$

پس

$$\frac{1}{\text{ن}} \cdot \text{جم} \frac{1}{\text{پ}} (\text{ع} - \text{ب}) = \frac{1}{\text{م}} \cdot \text{جم} \frac{1}{\text{پ}} (\text{ع} + \text{ب}) + \frac{1}{\text{ن}} \cdot \text{جبا} \frac{1}{\text{پ}} (\text{ع} + \text{ب})$$

اس لیے ج کا طریق مخروطی

$$\frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ن}} \quad (۴)$$

۴۔ ج کا طریق خود مخروطی سے ہوگا اگر

$$\frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ب}}$$

$$\frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{ب}} = 1 + \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ب}}$$

جو
کے مائل ہیں یعنی

$$\frac{1}{\text{م}} \pm \frac{1}{\text{ب}} = 1 \pm \frac{1}{\text{ب}} \quad (۵)$$

چونکہ اوپر کی شرط ع اور ب پر منحصر نہیں ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے

کہ اگر ایک مثلث کو م کے اندر اور م کے گرد کھینچا جائے تو ایسے مثلثوں کی تعداد لامتناہی ہوگی۔

ہم فرض کریں گے کہ $\frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ن}}$ تب یہ معلوم ہوگا کہ

$$\frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ن}} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ن}}$$

اور پھر (۱) ہو جائے گا۔

۱ + $\frac{1}{2}$ جم بہ جم بہ + $\frac{1}{2}$ جم بہ جم بہ = ۰ (۱)

اسی طرح دو اور متشابه مساواتیں حاصل ہونگی۔

اب (۲) سے

(۲۷۶)

$$\text{جم} \frac{1}{2} (\text{عہ} + \text{بہ}) = \frac{\text{جم}}{1} \text{جم بہ} = \frac{1}{2} \text{جم بہ}$$

$$\text{جم} \frac{1}{2} (\text{عہ} + \text{بہ}) = \frac{\text{جم}}{1} \text{جم بہ} = \frac{1}{2} \text{جم بہ}$$

اس طرح ج، لا، و جم بہ اور ما = ب جم بہ سے متعین ہو جاتا ہے۔ اسی طرح ڈ اور ب کے لیے۔

پس س کے نقطوں ڈ، ب، ج کے خارج المرکز زاوے
 $\pi + \text{عہ} + \pi + \text{بہ} + \pi + \text{جہ}$ ہیں جہاں عہ، بہ، جہ، نقطوں ڈ، ب، ج کے
 خارج المرکز زاوے ہیں۔

ڈ، ب، ج کے مرکز ہندسی کا طریق معلوم کرنا۔

مساواتوں

$$1 + \frac{1}{2} \text{جم بہ جم بہ} + \frac{1}{2} \text{جم بہ جم بہ} = ۰ \text{، وغیرہ}$$

سے ہم دیکھتے ہیں کہ عہ، بہ، جہ، حسب ذیل مساوات کی تین اصلیں ہیں:

$$\frac{1}{2} \text{جم عہ جم بہ جم بہ} + \frac{1}{2} \text{جم بہ جم بہ جم بہ} + \frac{1}{2} \text{جم جہ جم بہ جم بہ} = ۰$$

دسویں باب پر مثالیں

(۲۷۷)

۱۔ اگر ق اور ف کوئی دو نقطے ہوں اور ج ایک مخروطی کامرکز ہو تو ثابت کرو کہ مخروطی کے لحاظ سے نقطہ ف کے قطبی پر ق اور ج سے کھینچے ہو عمود ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ق کے قطبی پر ف اور ج سے کھینچے ہوئے عمودوں میں ہے۔

۲۔ اگر کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے دو ماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو ان میں وہی نسبت ہوتی ہے جو نظیری عمودوں میں ہے۔

۳۔ ایک مخروطی پر و کے مختلف مقاموں کے لیے دفعہ ۱۹۶ میں مندرجہ مثالوں کے ثابت نقطوں کے طریق معلوم کرو۔

۴۔ ایک ناقص کے متوازی وتروں کے ایک نظام میں سے ایک وتر ف و ق ہے اور اس پر ایک نقطہ و ایسا ہے کہ ف و + و ق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ و کے مختلف محلوں کے لیے و کا طریق ایک ہم مرکز مخروطی ہے۔

۵۔ اگر و ایک ثابت نقطہ ہو اور و ن کوئی وتر جو ایک مخروطی کو ن پر قطع کرتا ہے، اور اگر اس خط پر ایک نقطہ د ایسا لیا جائے کہ $\frac{1}{و} = \frac{1}{د} + \frac{1}{و}$

+ $\frac{1}{و}$ تو ثابت کرو کہ د کا طریق ایک مخروطی ہوگا جس کامرکز و ہوگا۔

۶۔ اگر متوازی خطوط مستقیم کے ایک نظام میں سے ایک خط و ف ق ق ہو جو ایک دے ہوئے مخروطی کو ف، ف پر اور دوسرے کو ق، ق پر قطع کرتا ہے اور و ایسا ہو کہ مستطیلوں و ن x و ن اور و ق x و ق کی نسبت مستقل ہے تو ثابت کرو کہ و کا طریق ایک مخروطی ہے جو تبدیلی مخروطیوں کے

نقاطِ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

۷۔ ایک مخروطی کے کوئی دو وتر $ف$ و $ق$ اور $ق$ و $ف$ ہیں جو ایک دوسرے کے علی التواءم ہیں اور ایک ثابت نقطہ $و$ میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$ف \times و + ق \times و = \text{مستقل ہے۔}$$

۸۔ اگر ایک ناقص کے محورِ اعظم پر ایک نقطہ لیا جائے جس کا فاصلہ

$$\sqrt{\frac{ا^2 - ب^2}{ا^2 + ب^2}}$$

کسی وتر کے مقطوعوں کے متکافوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۹۔ اگر ایک قائم الزامہ کے متوازی وتروں کے ایک نظام میں سے ایک وتر $ف$ ہو اور اگر عمودی قطر کے سرے $ا$ ، $ب$ ہوں تو ثابت کرو کہ $ف$ اور $ف$ ایک ثابت دائرہ پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ انفاذ قائم الزامہ اور ”دائرہ“ باہم بدلے جاسکتے ہیں۔

۱۰۔ اگر ایک مکافی کا کوئی ماسکی وتر $ن$ ہو اور $ن$ م، $ن$ م، ایک ثابت خط مستقیم پر عمود ہوں تو

$$\frac{ن م}{ن س} + \frac{ن م}{ن س}$$

مستقل ہوگا۔

۱۱۔ ایک دائرہ کے وتر ایک ثابت نقطے میں سے گزرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں اور ان وتروں کو قطر مانکر دائرہ مرتسم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں میں سے کسی ایک کے لحاظ سے ثابت نقطہ کا قطبی ایک ثابت مکافی کو مس کرتا ہے۔

۱۲۔ ایک مخروطی پر کے ایک ثابت نقطے سے وتر کھینچے گئے ہیں جو

ایک ثابت قطر پر مساوی مقطوعے قطع کرتے ہیں جہاں ان مقطوعوں کو مرکز سے پیمائش کیا گیا ہے۔ ان وتروں کے دوسرے سروں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر ایک ناقص کے کسی مماسکی وتر کے سروں کے محدود (لا، ما) اور (لا، ما) ہوں اور اس کے وسطی نقطہ کے محدود (لا، ما) ہوں تو ثابت کرو کہ ما، ما ایسے بدلیں گے جیسے لا۔ مکانی کی صورت میں کیا ہو جائے گا؟

۱۴۔ ایک ناقص کے محور پر دو ثابت نقطے میں، ہاں جن کا فاصلہ مرکز ج سے مساوی ہے۔ ان نقطوں میں سے گزرتے ہوئے دو طرف سے ق اور ف ق کھینچے گئے ہیں اور معین م ق کو س تک اس طرح خارج کیا گیا ہے کہ م س، ق کے فضلہ کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ س کا طریق ایک قائم زاویہ ہے۔

۱۵۔ ایک ناقص کے محور پر دو ثابت نقطے میں، ہاں جو مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہیں اور ان نقطوں میں سے گزرتے ہوئے دو طرف سے ق اور ف ق کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف پر کا مماس اور خط ق ق محور کے ساتھ ایسے زاویے بناتے ہیں جن کے مماس ایک مستقل نسبت میں ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک ناقص کے دو متوازی وتر جو مماسوں میں سے کھینچے گئے ہیں منحنی کو نقطوں ف، ف پر محور اعظم کی ایک ہی جانب قطع کرتے ہیں اور نقطوں ف، ف میں سے گزرنے والا خط نیم محوروں ج، ج ب کو علی الترتیب ع، و پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{ج}{ع} + \frac{ج}{و}$ مستقل ہے۔

۱۷۔ ایک ناقص کے دو مماس کسی بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر وہ چار نقطے جہاں مماس محوروں کو قطع کرتے ہیں ایک دائرہ پر واقع ہوں تو نقطہ کا طریق ایک ثابت قائم زاویہ ہوگا۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے مماس محور اعظم اور محور اصغر کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں لیکن وہ علی التواءم نہ ہوں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک

تاقم زائد ہوگا جس کے راس ناقص کے ماسکے ہوں گے۔

۱۹۔ اگر ایک مخروطی کے ماسوں کا ایک زوج ایک ثابت قطر سے دو نقطوں پر ملے اور مرکز سے ان کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے اگر متکافیوں کا حاصل ضرب یا مجموعہ مستقل ہو۔

۲۰۔ نقطہ و میں سے جو ایک ناقص کے ایک وتر اب کا نقطہ وسطی ہے کوئی وتر ف وق کھینچا گیا ہے۔ ف اور ق پر کے ماس (ب سے علی الترتیب میں اور ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس = ب ت۔

۲۱۔ مخروطی $ع$ لا + $ب$ ما = $ا$ کے ماسوں کے ایسے زوج کھینچے گئے ہیں کہ وہ ہمیشہ مخروطی $ا$ لا + $ب$ لا + $ا$ کے مزدوج قطروں کے متوازی رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق

$$ا لا + ب لا + ب ما = \frac{ا}{ع} + \frac{ب}{ع}$$

ہے۔

۲۲۔ ایک ناقص کے دو ماس ف ت، ف ت ہیں جو ایک ثابت نقطہ ق پر کے ماس سے نقطوں ت، ت پر ملتے ہیں۔ ف کا طریق معلوم کرو (۱) جبکہ ق ت اور ق ت کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو، اور (۲) جبکہ مستطیل ق ت، ق ت مستقل ہو۔

۲۳۔ ایک مخروطی کے راس (ا پر کے ماس پر ایک ثابت نقطہ و ہے اور اس ماس پر و سے مساوی فاصلوں پر دو نقطے ف، ف ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف اور ف سے مخروطی کے دوسرے ماس کھینچے جائیں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۲۴۔ اگر ایک دہے ہوئے مربع کے حاطد دائرہ کے کسی نقطہ سے اس دائرہ کے ماس کھینچے جائیں جو مربع کے اندر کھینچا گیا ہو تو یہ ماس مربع کے وتروں

ایسے چار نقطوں پر ملیں گے جو ایک قائم زاہد پر واقع ہوں گے۔

۲۵۔ ایک مخروطی کے ایسے دو محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جو ایک ثابت خط مستقیم پر مستقل طول کا مقطوعہ قطع کریں۔

۲۶۔ ایک مخروطی کے دو محاس ایک ثابت خط مستقیم ص من سے نقطوں (۲۸۰)

ف اور ق پر ملتے ہیں۔ اگر ف، ق ایسے ہوں کہ ایک ثابت نقطہ و پر ف ق کے عمادی ایک قائمہ زاویہ بنے تو ثابت کرو کہ محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دوسرا مخروطی ہوگا۔

۲۷۔ ایک دائرہ کے قطر کے سروں کو کسی نقطہ سے ملایا گیا ہے اور اُس نقطہ سے دائرہ کے دو محاس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ عمود وار قطر پر کا وہ مقطوعہ جو ایک خط اور ایک محاس کے درمیان قطع ہوتا ہے اُس مقطوعہ کے مساوی ہے جو دوسرے خط اور دوسرے محاس کے درمیان قطع ہوتا ہے۔

۲۸۔ مثلثات ایک ناقص کے گرد ایک دے ہوئے قاعدہ پر جو ناقص کو نقطہ ف پر مس کرتا ہے کھینچے گئے ہیں۔ اگر قاعدہ پر کے زاوے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں تو ثابت کرو کہ راسوں کا طریق وہ عماد ہے جو ف میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر کھینچا گیا ہے۔

۲۹۔ ایک مکافی قائم مخروطوں کے درمیان پھلتا ہے۔ وہ منحنی معلوم کرو جو اس کے محور پر کا کوئی نقطہ مرسم کرتا ہے۔ اس سے ثابت کرو کہ ماسکہ اور راس ایسے منحنی مرسم کریں گے جن کی مساواتیں

$$\lambda^2 = \lambda(\lambda + \mu^2), \lambda^2 \mu^2 = (\lambda + \mu^2)(\lambda + \mu^2 + \mu^2) = \lambda^2$$

ہیں جہاں λ, μ مکافی کا وتر خاص ہے۔

۳۰۔ اگر محدود کے عماد ایک دوسرے سے زاویہ ع پر مائل ہوں اور اگر ان کے درمیان ایک ناقص پھلتے تو ثابت کرو کہ مرکز کے طریق کی مساوات

$$\text{جب } \lambda^2 = \lambda(\lambda + \mu^2) \text{ ف } \lambda^2 = \mu^2 \text{ جم } \lambda^2 = \lambda^2 \text{ جب } \lambda^2 = \lambda^2 \text{ ف } \lambda^2 = \lambda^2$$

ہے جہاں ف^۲ اور ق^۲ سے علی الترتیب ناقص کے نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ اور حاصل ضرب تغیر ہوتے ہیں۔

۳۱۔ اگر ایک ناقص کے دو ماس وف، وق ہوں اور ان کے متوازی نیم قطر ج ف، ج ق ہوں تو ثابت کر دو کہ

$$\text{وف} \times \text{وق} + \text{ج ف} \times \text{ج ق} = \text{وس} \times \text{وھ}$$

جہاں س، ھ ماسکے ہیں۔

۳۲۔ دو ثابت نقطوں ف، ق میں سے خطوط مستقیم اب ف،

ج ق دیکھئے گئے ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایک دے ہوئے خط مستقیم کو نقطوں ا، ج پر اور دوسرے دے ہوئے خط مستقیم کو نقطوں ب، د پر قطع کرتے ہیں۔ خطوط مستقیم ا، د، ب ج کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر دے ہوئے خطوط کے نقطہ تقاطع پر اس خط کے محاذی جو ف اور ق کو ملاتا ہے ایک قائم زاویہ بنے تو طریق ایک قائم زاویہ ہوگا۔

(۲۸۱) ۳۳۔ ایک ناقص کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی پر اس نقطہ سے عمود کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق ایک قائم زاویہ ہے اگر نقطہ ناقص کے ایک ثابت قطر پر واقع ہو۔

۳۴۔ دو ہم مرکز اور ہم محور خطوں کے لحاظ سے ایک نقطہ ف کے قطبی نقطہ ق پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو ق ایک قائم زاویہ منقسم کریگا۔

۳۵۔ اگر دو دے ہوئے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی (۱) متوازی ہوں یا (۲) علی القوائم ہوں تو ثابت کر دو کہ ان میں سے کسی صورت میں نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے مرکز کا طریق جبکہ دو دے ہوئے نقطوں قطبی دے ہوئے خطوط مستقیم ہوں ایک ثابت خط مستقیم ہے۔

۳۷۔ نیم محوروں ا، ب کا ایک ناقص دو ثابت عمود واز خطوں کے درمیان پھیلتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے ماسکوں کا طریق منحنی

$$(لا + ما) (لا + ما + ب) - (لا + ما) = .$$

ہے۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے ماسکوں کا طریق جنکا مرکز دیا گیا ہو اور جو دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کریں ایک زائد ہے۔

۳۹۔ مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے ماسکے ایک دئے ہوئے متوازی الاضلاع کے دو متصل اضلاع پر ہیں اور یہ مخروطی متوازی الاضلاع کے دو سرے دو ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے مرکز ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔

۴۰۔ وہ دائرے جو ایک مخروطی کے متوازی دتروں کے ایک نظام پر انہیں قطع کر کے گئے ہوں دوسرے مخروطی کو لف کرتے ہیں جس نے ماسکے ان ماسکوں کے نقاط تماس ہیں جو دتروں کے متوازی ہیں۔

۴۱۔ ایک قائم زائد ایک ثابت مرکز دار مخروطی کے ساتھ دوسرا تماس رکھتا ہے۔ اگر دوسرا تماس ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے تو قائم زائد کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہو گا جو ثابت مخروطی کے مرکز میں سے گزرے گا۔

۴۲۔ ایک دائرہ ایک قائم زائد کو نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر قطع کرتا ہے۔ مثلثات 'ق' 'س' 'ف' 'س' 'ق' اور 'ف' 'ق' 'س' کے مراکز عمودی علی الترتیب 'ف' 'ق' 'س' ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' 'س' 'س' 'ق' 'س' 'س' 'ف' 'س' 'ق' 'س' 'ف' کے قطر ہیں۔

۴۳۔ کوئی قائم زائد جس کے مقارب ایک ناقص کے محوروں کے متوازی ہوں ناقص کو ایسے نقطوں پر قطع کرے گا جن کے خارج المركز زاوے 'ع' 'ب' 'ج' 'ض' 'د' 'ش'۔

(۲۸۲)

$$ع + ب + ج + ض = \pi (۱ + ۲) =$$

کو پورا کرینگے۔

۴۴۔ نصف قطر کے ایک دائرہ پر پانچ نقطے دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان پانچ قائم زائدوں کے مرکز جن میں سے ہر ایک 'ا' پر کے نقطوں میں سے

چار نقطوں میں سے گزرتا ہے نصف قطر $\frac{1}{2}$ کے ایک دائرہ پر واقع ہوں گے۔
 ۴۵۔ اگر ایک قائم زائد کے متقارب ایک مخروطی کے محوروں کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے چار نقاط تقاطع کے اوسط محل کا مرکز انہیں کے مرکزوں کے درمیان وسط میں ہے۔

۴۶۔ تین خطوط مستقیم علی الترتیب ایک مثلث کے تین ضلعوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ چھ نقطے جہاں وہ مثلث کے اضلاع کو قطع کرتے ہیں ایک مخروطی پر واقع ہیں۔

۴۷۔ اگر ایک ناقص کے نقطہ ف پر کا عماد محوروں سے لگے گی، تو

ملے اور اس پر ایک نقطہ دایسا ہو کہ $\frac{1}{2} \text{ ف} = \frac{1}{2} \text{ ق} + \frac{1}{2} \text{ ق}$ ۔ تو وہ
 میں سے گزرنے والا کوئی وتر ف پر ایک قائمہ زاویہ بنائے گا۔

۴۸۔ ایک ناقص کے ایک ثابت نقطہ و میں سے دو تروف و ف کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر و میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے و پر کا ماس ممدوہ خطوں کو ایسے دو نقطوں ق، ق پر قطع کرے کہ مستطیل وق × وق مستقل ہو تو خط ف ف خط و و کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرے گا۔
 ۴۹۔ ایک مخروطی کے کسی نقطہ ف پر کے ماس کے متوازی وتر ل م کھینچا گیا ہے اور خط ف م جو زاویہ ل ف م کی تنصیف کرتا ہے ل م سے م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ م کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب ابتدائی مخروطی کے محوروں کے متوازی ہیں۔

۵۰۔ ایک دے ہوئے مرکز دار مخروطی کو ایک دوسرا مخروطی جو اول الذکر کے مرکز میں سے گزرتا ہے ایسے نقطوں پر مس کرتا ہے جو اول الذکر کے اس وتر کے سرے ہیں جو اس کے قاطع محور کے ایک دے ہوئے نقطہ میں سے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے مخروطی کے مرکز کا طریق بھی ایک مرکز دار مخروطی ہے۔

۵۱۔ ایک ناقص کا وتر ق ق، مساوی مزدوج فطروں میں سے ایک کے متوازی ہے۔ ناقص کا مرکز ج ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ ق ج ق کا

مرکز 'ق' کے مختلف محلوں کے لیے ایک زائد مرسم کرے گا۔

۵۲۔ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} =$ اکو کسی (۲۸۳)

نقطہ پرس کرتا ہے اور مرکز میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق جو ناقص کے مرکز سے ناقص اور دائرہ کے وتر تقاطع پر کھینچا گیا ہے ناقص

$$\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = \frac{۱}{۲} \frac{ب}{ب} \text{ ہے۔}$$

۵۳۔ ج کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ زائد ۲ لا ما ج = ۰، ناقص

$$\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = \frac{۱}{۲} \frac{ب}{ب} \text{ اکو مس کر کے اور ثابت کرو کہ نقطہ تماس ناقص کے مساوی}$$

مزدوج قطروں میں سے ایک کا ایک سر اہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ ان دو ٹخنوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی اس قطر پر ملے۔

۵۴۔ اگر دو دائروں کے متوازی وتر ج 'د' ع ف ہوں اور وہ (دائرے) اور ب پر متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ چھ نقطوں (ب، ج، د، ع، ف) میں سے ایک محروطی کھینچا جاسکتا ہے۔ محور اعظم کے محل کے لیے عمل معلوم کرو۔

۵۵۔ اگر ایک دائرہ اور ایک محروطی کے چار نقاط تقاطع میں سے دو پر محروطی کے تماس کھینچے جائیں اور ان تماسوں کا نقطہ تقاطع ف دائرہ پر واقع ہو تو دوسرے دو نقطوں پر کے تماسوں کا نقطہ تقاطع ف بھی اسی دائرہ پر واقع ہوگا۔ اس صورت میں وہ رشتہ معلوم کرو جو ایک مرکز دار محروطی میں ف اور ف کے محلوں کو مربوط کرتا ہے اور نیز اس سے ایک مکانی کی صورت میں ف اور ف کے اضافی محل متعین کرو۔

۵۶۔ اگر ایک مکانی کے مرتب سے مساوی فاصلوں پر اور اس کی مخالف سمتوں میں دو نقطے ت، ت ہوں اور ت سے تماس ت ف اور ت ق ہوں اور ت سے ت ف اور ت ق تو ثابت کرو کہ ت، ف، ق، ت، ف، ق سب کے سب ایک قائم زائد پر واقع ہوں گے۔

۵۷۔ اگر ایک دے ہوئے مکانی کے ماسوں کے دوزوج وق اور وق' وق' ہوں تو وق' وق' وق' وق' سے گزرنے والا محرومی مکانی ہوگا اگر وہ واسطی نقطہ دے ہوئے مکانی پر ہو۔

۵۸۔ ایک ثابت نقطہ کو مرکز مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں جو ایک محرومی کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ اور محرومی کے مشترک وتروں نقاط واسطی کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

(۲۸۴) ۵۹۔ ایک ثابت نقطہ کو مرکز مان کر کوئی دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک محرومی کو چار حقیقی یا خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان چار نقطوں میں سے گزرنے والے تمام محرومیوں کے مرکزوں کا طریق ایک قائم زائد ہے جو دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے۔

۶۰۔ کسی نقطہ سے $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ کے تین عماد کھینچے گئے ہیں

ثابت کرو کہ اس شلث کا مرکز ہندسی جس کے اس ان عمادوں کے پائین ہیں ناقص $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ پر ہے۔

۶۱۔ اگر کسی نقطہ سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے جائیں اور وہ ایک محو نقطوں گ، گ، گ، گ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} = \frac{1}{g}$$

$$g + g + g + g = g$$

۶۲۔ اگر ایک ناقص کے نقطوں ا، ب، ج، د پر کے عماد ویدیں

محرومی ا، ب، ج، د کی مسادات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ثابت نقطہ وکیلے اس محرومی کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے بشرطیکہ ناقص ہم محور ناقصوں کے

ایک نظام سے متعلق ہو۔

۶۳۔ ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں اور نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ناقص کے محور کے ساتھ وہی زاوے بناتے ہیں جو علی الترتیب 'ج'، 'ق'، 'ج' کے ج سے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ چار خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۴۔ ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں اور نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ناقص کے محور کے ساتھ وہی زاوے بناتے ہیں جو علی الترتیب خطوط 'و'، 'ق'، 'و' سے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ چار خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۵۔ 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور عمادی دائرہ پر 'ف'، 'ق'، 'س' وہ نقطے ہیں جو علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'س' کے متناظر ہیں۔ اگر 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے خطوط کھینچے جائیں جو علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'ج'، 'س'، 'ج'، 'س' کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۶۶۔ اگر ایک مخروطی کے اس سے ان چار عمادوں پر عمود کھینچے جائیں جو ایک نقطہ و پر ملتے ہیں تو یہ خطوط مکرر مخروطی سے ایسے نقطوں پر ملیں گے جو ایک دائرہ واقع ہوں گے۔

$$۶۷۔ \text{مخروطی } \frac{لا}{۱} = \frac{ما}{۲} + \frac{لا}{۳} \text{ پر کے کسی نقطہ سے مخروطی } \frac{لا}{۳}$$

$$+ \frac{ما}{۲} = \text{ا کے ماس کھینچے گئے ہیر ثابت کرو کہ نقاط ماس پر کے عماد مخروطی } \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = \left(\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۲} \right) \text{ پر ملیں گے۔}$$

۶۸۔ اگر ایک ناقص ایک مثلث 'ب' ج کو محیط کرے اور مثلث کے راسوں پر کے ماس متقابل اضلاع کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ 'ب'، 'ج' کے

عماد کسی نقطہ و پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ مثلث کے مختلف محلوں کے لیے
و کا طریق ناقص $\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل} - \frac{1}{2} \text{ ل}$ ہے۔

۶۹۔ اگر $\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل}$ کے ایک وتر کے سروں پر کے محاس
ناقص پر کے ایک نقطہ پر ملیں اور وتر خود عماد نہ ہو تو ثابت کرو کہ وہ ہم مرکز ناقص
 $\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل} - \frac{1}{2} \text{ ل}$ کو مس کرے گا۔

۷۰۔ اس مثلث کا مرکز عمودی معلوم کرو جس کے اس (اجم) ب جب (ب
(اجم) ب جب (ب) اور (اجم) ب جب (ب) ثابت کرو کہ اگر مثلث کا
مرکز ہندسی ایک ثابت نقطہ ہو تو مرکز عمودی کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۷۱۔ زائد $\frac{1}{2} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل}$ سے
نقطوں 'ف' 'ق' پر ملے۔ ثابت کرو کہ نقطوں 'ف' 'ق' پر ناقص کے عماد
ناقص کے ایک ثابت قطر پر ملتے ہیں۔

۷۲۔ اگر ناقص $\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل}$ کے چار عماد نقطہ سے کھینچے
جائیں اور اگر 'ع' 'ع' 'ع' 'ع' وہ عمود ہوں جو مرکز سے ان محاسوں پر کھینچے
گئے ہیں جو ان عمادوں کے پائین پر ناقص کے ہیں تو و کا طریق ایک زائد ہوگا
اگر

$$\frac{1}{2} \text{ ل} = \frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ل}$$

یہاں ج مستقل ہے۔
۷۳۔ ایک نقطہ سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے گئے ہیں اگر ان عمادوں
مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو تو نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۷۴۔ نقطہ (ف' گ) سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں ثابت

کر کہ ان عمادوں کے بائیں پر ناقص کے ماس ایک ایسا ذو اربعۃ الاضلاع بناتے ہیں کہ اگر (لا، ما) اور (لا، ما) متقابلہ راسوں کا کوئی زوج ہو تو

$$\frac{لا}{۱} = \frac{ما}{۲} = ۱ - ۱ - \text{نیز ثابت کر کہ ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے}$$

نقاط وسطیٰ کو ملانے والے خط مستقیم کی مسادات ف للہ گ ما ہے۔

۵۔ ایک ناقص کے چار نقطوں پر ماس کھینچے گئے ہیں جو ایسے

ہیں کہ ان نقطوں پر کے عماد باہم متقاطع ہوتے ہیں۔ چار مستطیل بنائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک کے دو متعلقہ اضلاع ناقص کے محوروں پر ہیں اور ایک وتر اور ہر ماسوں میں سے ایک ماس ہے۔ ثابت کر کہ دوسرے وتروں کے بعید صبرے ایک خط مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

۶۔ ایک نقطہ ن سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں جو ناقص سے نقطوں ا، ب، ج، د پر ملے ہیں۔ اگر ایک ایسا مخروطی کھینچا جائے جو نقطوں ا، ب، ج، د میں سے اور ناقص کے ماسکے میں سے گزرے اور ناقص کے نظیری مرتب کو مس کرے تو ثابت کر کہ ن، دو ثابت خطوں میں سے ایک پر واقع ہوتا ہے۔

۷۔ اگر ا، ب، ج، د پر کے عماد ایک نقطہ ف پر ملیں تو س ا

\times مس ب \times مس ج \times مس د $=$ ک \times مس و جہاں س ایک ماسکے ہے۔

۸۔ کسی نقطہ سے ایک قائم الزا کے چار عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کر کہ ان عمادوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس فاصلہ کے مربع کے تین گنے کے مساوی ہے جو قائم الزا کے مرکز سے نقطہ کا ہے۔

۹۔ ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کا ایک وتر کھینچا گیا ہے جو محور اعظم

سے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے $1 - \frac{۱-ب}{۱+ب}$ ہے۔ اس وتر

کے سروں پر ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کر کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۸۰۔ کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے چار عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمادوں کا حاصل ضرب، اس نقطہ سے مخروطی کے حماسوں اور نقطہ متقاربوں کے فاصلوں کے مسلسل حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۸۱۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے مزدوج قطروں کے سروں پر کے حماس خطوط مستقیم (لا + لا) = ع^۲ = ۰ اور (لا + لا) = ق^۲ = ۰ ہیں۔

۸۲۔ دائرہ لا + لا = ج^۲ کے کسی نقطہ سے ناقص $\frac{لا}{ج} + \frac{لا}{ج} = ۱$

کے حماس ف، ت ق کھینچے گئے ہیں اور دائرہ ت ف ق ناقص کو مرکز ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط ف ق ہمیشہ ناقص

$$\frac{ج}{(ج - ب)} = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ج}$$

کو مس کرتا ہے۔

۸۳۔ ایک مخروطی کا ایک ماسکی وتر، محور اعظم کے سروں پر کے حماسوں نقطوں ا، ب پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر (ب کو قطر مانکر دائرہ کھینچا جائے تو وہ مخروطی کے ساتھ دوہرا حماس رکھتا ہے۔

۸۴۔ (ب ج د کوئی مستطیل ہے جو ایک ناقص کو جس کے ماسکے میں اور ہ میں محیط کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ (ب س یا ا ب ہ) امدادی دائرہ کے مساوی ہے۔

۸۵۔ ایک دائرہ جس کا مرکز ایک مکانی کے راس پر کے حماس پر ہے کھینچا گیا ہے، (۲۸۷) اور دائرہ اور مکانی کے چار مشترک حماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان زاویوں حماسوں کا مجموعہ جو یہ خطوط مکانی کے محور کے ساتھ بناتے ہیں صفر ہے۔

۸۶۔ امدادی دائرہ کے کسی نقطہ سے ایک ناقص کے حماس کھینچے گئے ہیں جو مرتب کو چار نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان میں سے دو نقطے اس خط پر واقع ہوتے ہیں جو ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ نیز معلوم کرو کہ دوسرے

دو نقطوں میں سے گزرنے والا خط محور یا غلیم کو کہاں قطع کرتا ہے -

۸۷ - اگر دو مرکز دار مخروطیوں کی مساواتیں $E = O$ اور $O = E$ ہوں اور ان کے مرکزدں E اور O کی قیمتیں E ، O ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط JO ، EO کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات $E = O$ ہے جہاں N ایک متخی پر اور N دوسرے متخی پر ہے اور N ، JO کے متوازی ہے۔ اس صورت کا امتحان کرو جبکہ مخروطی متشابہ اور متشابہا واقع ہوں -

۸۸ - دو دائرے ایک ناقص کے ساتھ دو ہر اندرونی تماس رکھتے ہیں اور ایک تیسرا دائرہ چار نقاط تماس میں سے گزرتا ہے۔ اگر ناقص کے کسی نقطہ سے ان تین دائروں کے تماس T ، T ، T ہوں تو ثابت کرو کہ $T = T = T$ -

۸۹ - اس مخروطی کی عام مساوات معلوم کرو جو دو دائروں $(لا - ل)$ ، $(لا + ل)$ کے ساتھ دو ہر تماس رکھے۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے وتر خاص کے سرے کے طریق کی مساوات $(لا - ل)$ ، $(لا + ل)$ ہے جبکہ مخروطی دائروں $(لا \pm ل)$ ، $(لا + ل)$ کے ساتھ دو ہر تماس رکھے -

۹۰ - ثابت کرو کہ خطوط $لا + م = لا$ اور $لا + م = لا$ جو دو مخروطیوں

$(ل - م)$ ، $(ل + م)$ ، $(م - م)$ ، $(م + م)$ ، $(ل - م)$ ، $(ل + م)$ ، $(م - م)$ ، $(م + م)$

اور $(م - ل)$ ، $(م + ل)$ ، $(م - م)$ ، $(م + م)$ ، $(ل - ل)$ ، $(ل + ل)$ ، $(م - ل)$ ، $(م + ل)$ کے تقاطع میں سے گزرتے ہیں ایک مخروطی کے مزدوج قطر ہیں -

۹۱ - اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک ناقص کے وتر کھینچے جائیں اور ان پر انہیں قطر مان کر دائرے مرتسم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ ناقص کے ساتھ ان دائروں کے دوسرے وتر تقاطع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں -

۹۲ - ثابت کرو کہ مخروطی $لا + ل$ ، $لا + ل$ ، $(لا - ل)$ ، $(لا + ل)$ میں مثلثوں کی

(۲۸۵)

لا انتہا تعداد بنائی جاسکتی ہے جبکہ اضلاع مخروطی $لا + ل$ ، $لا + ل$ ، $لا + ل$ کو مس

کرتے ہوں۔

۹۳۔ اگر ایک ذوا ربعة الاضلاع کے تین اضلاع جہاں ذوا ربعة الاضلاع ایک مخروطی میں بنایا گیا ہے تین ثابت نقطوں میں سے جو ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہیں گذریں تو ثابت کرو کہ چوتھا ضلع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے جو اُسی خط مستقیم میں واقع ہو گا گذرے گا۔

۹۴۔ اگر ایک ناقص کا ایک وتر ق ایک دسے ہوئے ہم مرکز دائرہ کو مس کرے اور وہ دائرہ جس کا قطر ق ہے ناقص کو مرکز نقطوں ق، ق پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ق، ق ایک دوسرے ہم مرکز ثابت دائرہ کو لف کرے گا۔

۹۵۔ ایک خط جو ایک ناقص کے مساوی فردوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے محور اعظم کے سروں پر کے ماسوں کو نقطوں ق، ق پر قطع کرتا ہے اور نقطوں ق، ق سے ناقص کے دوسرے ماس نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۹۶۔ ایک قائم زائد پر چار ثابت نقطے ل، م، ن، م ہیں اور اس ن کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ ن، ل، م پر عمود ہے اور وہ ن، م سے ل پر ملتا ہے، ن، ج، ل، ن پر عمود ہے اور وہ م، ن سے ج پر ملتا ہے، ن، ب، ل، م پر عمود ہے اور وہ م، ن سے ب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن، ب، ج، ل، م = ن، ب، ج، ل، م = ن، ج، ل، م = ن، ج، ل، م۔

۹۷۔ ایک مکافی کے ایک ثابت قطر پر ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے منحنی کے عماد منحنی کو ل، ب، ج پر قطع کرتے ہیں۔ ن، ل، ن، ب، ج کے متوازی ماس، ل، ب، ج پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں ل، ب، ج اور ل، ب، ج کے رقبوں میں نسبت متقل ہے۔

۹۸۔ ایک دائرہ (مرکز ج) کے قطر ل، ب پر نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ن اور ب ن کو قطر بنا کر دائرے کے بیچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق جو ان تین دائروں کو مس کرتا ہے دوناقصوں پر مشتمل ہے جن کا ایک اس کے ج ہے۔

گیارہواں باب

مخروطیوں کے نظام

۲۰۶۔ مخروطی کی عام سے عام مساوات

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad r^2 + 2r + 2 = 0$$

میں جے مستقل r ، h ، b ، g ، f ، c ہیں۔ لیکن چونکہ ہم مساوات کو کسی مستقل مقدار سے ضرب دیکھتے ہیں یا تقسیم کر سکتے ہیں اور اس سے لا اور h کے درمیانی رشتہ میں جو مساوات سے بیان ہوتا ہے کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اس لیے فی الحقیقت صرف پانچ مستقل کسی مخصوص مخروطی کی مساوات میں ہوا کرتے ہیں چنانچہ یہ مستقل مقادیر وہ پانچ نسبتیں ہیں جو h ، b ، g ، f ، c ایک دوسرے کے ساتھ رکھی ہیں پس ایک مخروطی سے پانچ شرطیں پوری کرانی جاسکتی ہیں اور اس سے زیادہ نہیں۔ مثلاً مخروطی کو پانچ مفروضہ نقطوں میں سے گزرا جاسکتا ہے یا اس طرح کھینچا جاسکتا ہے کہ وہ چار مفروضہ نقطوں میں سے گزرے اور ایک دئے ہوئے خط کو مس کرے۔ ان پانچ شرطوں سے جن کو کوئی مخروطی پورا کرے مستقلوں کے درمیان پانچ مساواتیں پیدا ہوتی ہیں اور یہ پانچ غیر تاج مساواتیں پانچ نسبتوں کو متعین کرنے کے لیے ضروری اور کافی دونوں ہیں یہ ہو سکتا ہے کہ دی ہوئی مساواتوں سے نسبتوں کی قیمتوں کا ایک سے

زیادہ جٹ حاصل ہوں اور اس لیے ایک سے زیادہ مخروطی دی ہوئی شرطوں کو پورا کریں لیکن ایسے مخروطیوں کی تعداد محدود ہوگی اگر شرطیں فی الحقیقت ایک دوسرے پر منحصر نہ ہوں۔
اگر صرف چار شرطیں (یا چار سے کم) دی گئی ہوں تو مخروطیوں کی لامتناہی تعداد ان شرطوں کو پورا کرے گی۔
وہ پانچ شرطیں جن کو کوئی مخروطی پورا کر سکتا ہے ایسی ہونی چاہئیں کہ ہر ایک شرط سے مستقلوں کے درمیان ایک رشتہ حاصل ہو مثلاً ایک مفروضہ نقطہ میں سے گزرنے کی شرط یا ایک مفروضہ خط مستقیم کو مس کرنے کی شرط۔
بعض شرطیں ایسی ہونی ہیں کہ ان سے مستقلوں کے درمیان دو یا زیادہ رشتے حاصل ہوتے ہیں اور کسی ایسی شرط کو مذکورہ پانچ شرطوں میں سے دو یا زیادہ سمجھنا ہوگا۔ مثلاً

(۲۹۰)

اگر ایک دے ہوئے نقطہ کو مخروطی کا مرکز بنانا ہے تو دو شرطیں پوری ہونی چاہئیں (دفعہ ۱۶۸)۔

اگر ایک ماسکریا گیا ہے تو یہ دو ماس دے جانے کے معادل ہے [دفعہ ۱۹۴]۔
اگر یہ دیا گیا ہے کہ ایک خط ایک مخروطی کو ایک دے ہوئے نقطہ پر مس کرتا ہے تو یہ دو شرطوں کے ہیں کیونکہ دے ہوئے مخروطی پر دو متصل نقطے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ایک متقارب کی سمت دی گئی ہے تو یہ اس کے معادل ہے کہ ایک نقطہ (لامتناہی پر) دیا گیا ہے۔

اگر متقارب کا محل دیا گیا ہے تو یہ دو شرطوں کے معادل ہے کیونکہ دو نقطے (لامتناہی پر) معلوم ہوتے ہیں۔

اگر محوروں کے محل دے گئے ہیں تو یہ تین شرطوں کے معادل ہے۔
اگر خروج المرکز دیا گیا ہے تو یہ بالعموم ایک شرط کے معادل ہے لیکن چونکہ

$$\frac{z^2}{1-z^2} = \frac{(1-b)^2 + 2}{1-b^2} \quad [دفعہ ۱۹۲] \text{ اس لیے اگر } z=0 \text{ دیا گیا}$$

ہے تو دو شرطیں ۱ = ب اور ۲ = م حاصل ہوتی ہیں -

۲۰۷ - پانچ نقطوں میں سے چھیں کوئی چار ایک خط مستقیم میں

نہ ہوں ایک اور صرف ایک مخروطی کھینچا جاسکتا ہے -

اگر ان میں سے تین نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں تو ان پانچ نقطوں میں سے گزرنے والا مخروطی خطوط مستقیم کا ایک زوج ہونا چاہئے کیونکہ کوئی خط مستقیم کسی مکانی، ناقص، یا زائد کو تین نقطوں پر نہیں مل سکتا - ان پانچ نقطوں میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کا محولہ بالا زوج یہ ہے (۱) وہ خط مستقیم جس پر تین نقطے واقع ہیں اور (۲) وہ خط مستقیم جو دوسرے دو نقطوں میں سے گزرتا ہے -

لیکن اگر پانچ نقطوں میں سے دو نقطوں سے زیادہ ایک خط مستقیم نہ ہوں تو فرض کرو کہ ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو محور لا اور دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو محور مایا گیا ہے - فرض کرو کہ ان محوروں کے حوالے سے محولہ بالا چار نقطوں کے محدد (۱، ۲)، (۳، ۴)، (۵، ۶)، (۷، ۸) اور (۹، ۱۰) ہیں -

خطوط مستقیم کے زوج

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{3}{3} \right) \left(\frac{4}{4} + \frac{5}{5} - \frac{6}{6} \right) = 0 \text{ اور لا ما } =$$

وہ مخروطی ہیں جو ان چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں - اس لیے وہ تمام مخروطی جو ان چار نقطوں میں سے گزریں گے مساوات

$$= 0 \text{ لا ما } + \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{3}{3} \right) \left(\frac{4}{4} + \frac{5}{5} - \frac{6}{6} \right) = 0$$

سے حاصل ہوں گے - یہ مخروطی پانچویں نقطہ میں سے جس کے محدد لا، ما ہیں گزرے گا اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ

$$لہ لا مآ + \left(\frac{لا}{س} + \frac{مآ}{س} - ۱ \right) \left(\frac{لا}{س} + \frac{مآ}{س} - ۱ \right) = ۰$$

لہ کی ایک اور صرف ایک قیمت ہے جو اس مساوات کو پورا کرتی ہے اور اس لیے ایک اور صرف ایک مخروطی ہے جو ان پانچ نقطوں میں سے گزرے گا۔

اگر ان میں سے چار نقطے ایک خط مستقیم پر ہوں تو ایک سے زیادہ مخروطی ان پانچ نقطوں میں سے گزریں گے کیونکہ ایسا مخروطی دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہوگا جن میں سے ایک تو وہ خط مستقیم ہے جس پر چار نقطے واقع ہیں اور دوسرا کوئی خط مستقیم ہے جو پانچویں نقطے میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۱۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کر دو پانچ نقطوں

$$(۱, ۲), (۱, ۱), (۳, ۱), (۰, ۱) \text{ اور } (۳, ۲)$$

میں سے گزرتا ہے۔

نقطوں $(لا - ما - ۱)$ $(لا + ما + ۱)$ اور $ما (۲ + لا + ما - ۵) = ۰$ کے زوج پہلے چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے مخروطی

$$(لا - ما - ۱) (لا + ما + ۱) - ما (۲ + لا + ما - ۵) = ۰$$

بھی ان چار نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ نقطہ $(۳, ۲)$ اس مخروطی پر ہوگا اگر

لہ = ۸، اس لیے مطلوبہ مساوات

$$لا + ۱۹ لا + ۱۴ ما - ۲۵ ما - ۱ = ۰ \text{ ہے۔}$$

مثال ۲۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطی

کی عام مساوات معلوم کرنا۔

ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط کو محور لا اور دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط کو محور ما قرار دو اور فرض کرو کہ وہ خطوط جن کی مساواتیں $لا + ب - ما = ۰$ اور $لا + ب - ما = ۱$ ہیں محوروں کو دے ہوئے نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

اب لا ما = ۰ اور $(لا + ب - ما - ۱)$ $(لا + ب - ما - ۱) = ۰$ دو مخروطی

(۲۹۳)

ہیں جو دئے ہوئے چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے وہ تمام مخروطی جوائن چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں مساوات

$$\begin{aligned} & \text{لا م ا} + (\text{ا} + \text{لا} + \text{ب م ا}) - (\text{ا} + \text{لا} + \text{ب م ا}) = ۰ \dots (۱) \\ & \text{یا} \quad \text{ا} + \text{لا} + (\text{ب} + \text{ا} + \text{ب م ا}) - (\text{لا م ا} + \text{ب م ا}) \\ & - (\text{ا} + \text{ا}) - \text{لا} - (\text{ب} + \text{ب}) = ۱ + ۰ \dots (۲) \end{aligned}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۰۹ — دفعہ ۲۰۸ کی مساوات (۲) مکانی کو تعبیر کرے گی اگر درجہ دوم کی رقیس ایک کامل مربع ہوں یعنی اگر

$$۴ \text{ ا} + \text{ا} + \text{ب م ا} = (\text{ب} + \text{ا} + \text{ب م ا})^۲$$

اس مساوات کی دو اصلیں ہیں اور اس لئے دو مکانی چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں گے۔ یہ مکانی حقیقی ہوں گے اگر مساوات کی اصلیں حقیقی ہوں اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ $\text{ا} + \text{ا} \times \text{ب م ا}$ ب م ا مثبت ہو۔ یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر $\text{ا} + \text{ا} + \text{ب م ا}$ منفی ہو تو ذرا بعد الاضلاع متداخلہ ہوگا۔ اس صورت میں مکانی خیالی ہوتے ہیں جیسا کہ ہندسی طور پر واضح ہے۔ جب مساوات (۲) دفعہ ۲۰۸ کی درجہ دوم کی رقیس ایک کامل مربع

ہوں تو یہ مربع $(\text{ا} + \text{ا} + \text{لا} + \text{ب م ا})$ ہونا چاہئے۔ پس [دفعہ ۱۷۲]

مذکورہ بالا دو مکافیوں کے محاور ان خطوں کے متوازی ہیں جن کی مساواتیں

$$\text{ا} + \text{لا} + \text{ب م ا} = ۰ \quad \text{یا} \quad \text{ا} + \text{لا} - \text{ب م ا} = ۰ \quad \text{ہیں۔}$$

یہ دو خطوط مستقیم دئے ہوئے چار نقطوں میں سے گزرنے والے کسی مخروطی کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں [دفعہ ۱۸۴]

پس وہ تمام مخروطی جو مفروضہ چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں مزدوج قطروں کا ایک زوج رکھتے ہیں جو ان نقطوں میں سے

گزرنے والے دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

۲۱۔ ان مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

اس نظام کے کسی مخروطی کی مساوات حسب دفعہ ۲۰۸

$$\text{لہ لاما۔ (ا + لا + ب۔ ما۔ ا) (ا + لا + ب۔ ما۔ ا)۔}$$

ہے۔ اس مخروطی کے مرکز کے محدود مساواتوں

$$\text{لہ ما + ل (ا + لا + ب۔ ما۔ ا) + ل (ا + لا + ب۔ ما۔ ا)۔}$$

$$\text{اور لہ لا + ب (ا + لا + ب۔ ما۔ ا) + ب (ا + لا + ب۔ ما۔ ا)۔}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

ان مساواتوں کو علی الترتیب لا اور ما سے ضرب دو اور تفریق کرو تو
لہ کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگا

(۲۹۳)

$$\text{(ا + لا۔ ب۔ ما) (ا + لا + ب۔ ما۔ ا) + (ا + لا۔ ب۔ ما) (ا + لا + ب۔ ما۔ ا)۔}$$

$$\text{یا ۲ ل ل (ا + لا۔ ب۔ ما)۔ (ا + لا + ب۔ ما۔ ا) + (ب + ب۔ ما)۔}$$

اس لیے مرکز کا طریق ایک مخروطی ہے جس کے متقارب خطوط $لا$ و $لا$
ب۔ ب۔ ما۔ کے متوازی ہیں۔ یعنی ان دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی
ہیں جو چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔ [یہ دو مکافی نظام کے مخروطی ہیں
اور اس لیے ان کے مرکز مرکزوں کے طریق پر لاتنا ہی پر کے نقطے ہیں]۔

ثبوت دیگر۔ اگر $ف۔ = ۰$ اور $ف۔ = ۰$ کوئی دو مخروطی ہوں جو چار دے ہوئے

نقطوں میں سے گزرتے ہیں تو ان چار نقطوں میں سے گزرنے والا کوئی اور مخروطی مساوات

$$\text{لہ ف۔ + لہ ف۔ = ۰}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ پس مرکز مساواتوں

$$\text{لہ ف۔ + لہ ف۔ = ۰}$$

$$ل_۱ \frac{فرق۱}{فرق۱} + ل_۲ \frac{فرق۲}{فرق۲} = ۰$$

سے حاصل ہوگا۔ اس لیے مرکزوں کا طریق مخروطی

$$فرق۱ \frac{فرق۱}{فرق۱} - \frac{فرق۲}{فرق۲} = ۰$$

ہے۔

۲۱۱۔ دفعہ ۲۱۰ میں حاصل شدہ مرکزوں کا طریق مبدا میں سے گذرتا ہے یعنی دے ہوئے چار نقطوں میں سے دو کو ملانے والے خط اور دیگر دو کو ملانے والے خط کے نقطہ تقاطع میں سے۔ پس تشاکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس طریق کو ان چار نقطوں میں سے گذرنے والے دو دو خطوں کے دیگر زوجوں کے نقاط تقاطع میں سے بھی گذرنا چاہئے۔ (یہ فوراً معلوم کیا جاسکتا تھا کیونکہ خطوں زوج نظام کے مخروطی ہیں اور ان کے تقاطع زن مخروطیوں کے مراکز ہیں اور اس لیے یہ نقاط تقاطع مرکزوں کے طریق پر واقع ہیں)۔

مرکز طریق محور لا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں لا = ۰ اور جہاں لا = $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ ۔

اس لیے طریق نقطوں $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ اور $(\frac{1}{3}, ۰)$ کے درمیان وسطیٰ میں سے گذرتا ہے یعنی اس خط کے نقطہ وسطیٰ میں سے جو ان دو ثابت نقطوں کو ملاتا ہے، اسی طرح یہ طریق اس خط کے نقطہ وسطیٰ میں سے بھی گذرتا ہے جو چار نقطوں میں سے کسی اور دو کو ملاتا ہے۔

(۲۹۴) پس اگر (ب، ج، د کوئی چار نقطے ہوں تو (ب اور ج، د، ج اور ب، د، ج اور ب، د، ج کے تین نقاط تقاطع اور خطوط اب، ب، ج، د، ج، د، ب، د، ج کے نقاط وسطیٰ سب سے ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں (اس مخروطی کو (ب، ج، د کا یہ نقطہ مخروطی کہہ سکتے ہیں) اور یہ مخروطی ان مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق

جو چار نقطوں ۱، ۲، ۳، ۴ میں سے گزرتے ہیں۔
 ۱، ۲، ۳، ۴ کے نو نقطہ مخروطی کا مرکز

$$۴ = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} = ۲، \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} = ۲$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس لیے وہ چار نقطوں ۱، ۲، ۳، ۴ کا مرکز ہندسی ہے۔
 ۲۱۲۔ اگر ۱، ۲ اور ۳ کی علامتیں ایک ہی ہوں تو ہم دفعہ ۲۱۰ سے یہ دیکھتے ہیں کہ مرکزوں کا طریق ایک زائد ہے۔ اگر ۱، ۲ اور ۳ کی علامتیں مختلف ہوں تو مرکزوں کا طریق یکناقص ہے۔ اگر ۱، ۲ = ۳ یعنی اگر چار نقطے ایک دائرہ پر ہوں تو مرکزوں کا طریق یکناقص ہے۔ اگر ۱، ۲ = ۳۔ ۳ = ۱ اور محاور علی القواثم ہوں تو نظام کے تمام مخروطی قائم زائد ہیں اور مرکزوں کا طریق ایک دائرہ ہے۔ اس صورت میں چار نقطوں میں سے کسی دو کو ملانے والا خط اس خط پر عمود ہوتا ہے جو دوسرے دو نقطوں کو ملاتا ہے اس لیے ۱، ۲، ۳، ۴ کا مرکز عمودی ہے۔

پس ایک دائرہ مثلث ۱، ۲، ۳ کے عمودوں کے پائینوں میں سے اور ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ کے نقاط وسطی میں سے گزرے گا جہاں ۱، ۲، ۳، ۴ کا مرکز عمودی ہے۔ یہ دائرہ ان تمام مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق ہے (جو سب کے سب قائم زائد ہیں) جو ۱، ۲، ۳، ۴ میں سے گزرتے ہیں۔ اس دائرہ کو نو نقطہ مخروطی دائرہ کہتے ہیں۔
 ۲۱۳۔ دفعہ ۲۰۸ میں جن چار نقطوں کی تعریف کی گئی ہے ان میں سے گزرنے والے کسی مخروطی کے متقارب خطوط

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ = (۱ + ۲ + ۳ + ۴) = ۱۰$$

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ = (۱ + ۲ + ۳ + ۴) = ۱۰$$

کے متوازی ہوتے ہیں لیکن یہ خطوط (دفعہ ۱۸۴) مرکزوں کے طریق کے مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ اس لیے چار نقطوں میں سے گزرنے والے کسی مخروطی کے متقارب مرکزوں کے طریق کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں چنانچہ

(۲۹۵)

اُس قائم زائد کے متقارب جو چار نقطوں میں سے گزرتا ہے مرکزوں کے طریق کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک ثابت نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گزریگا۔ ثابت نقطہ کو مبداء قرار دو اور فرض کرو کہ مخروطیوں میں سے دو

$$س \equiv (لا + لا) + (لا + لا) + (لا + لا) + (لا + لا) =$$

اور $س \equiv (لا + لا) + (لا + لا) + (لا + لا) + (لا + لا) =$ ۔
ہیں۔ تب اس نظام کا کوئی مخروطی $س = لا + لا$ سے حاصل ہوتا ہے۔
مبداء کا قطبی

گ $لا + لا + لا + لا = لا + لا + لا + لا =$ ۔
ہے اور یہ، لہٰذا تمام قیمتوں کے لیے، خطوط

گ $لا + لا + لا + لا = لا + لا + لا + لا =$ ۔ اور گ $لا + لا + لا + لا = لا + لا + لا + لا =$ ۔
کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۲۔ چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے نظام کے لحاظ سے کسی دئے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔ ثابت خط مستقیم کو محور لا قرار دو اور فرض کرو کہ ایک مخروطی کی مساوات مثال اسکے نمونہ کی ہے۔ $(لا، لا)$ کا قطبی

$$(لا + لا) + (لا + لا) + (لا + لا) + (لا + لا) =$$

۔ $(لا + لا) + (لا + لا) + (لا + لا) + (لا + لا) =$ ۔
ہے۔ اگر یہ دہی خط ہے جو $لا = لا$ ہے تو لا کا مرکز اور مستقل رقم سفر ہونی چاہئے۔ انکو صفر کے مساوی رکھو اور لہٰذا کو سا قسط کرو۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ کسی مخروطی کے لحاظ سے جو ایک دئے ہوئے مربع راستوں میں سے گزرتا ہے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

پر مخروطی کے کسی نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔

۲۱۵۔ اگر ایک مخروطی پر چار نقطے 'ق'، 'س'، 'ب' اور 'ج' ہوں اور 'ق'، 'س'، 'ب' اور 'ج' کے درمیان نقطہ 'ا' ہو تو 'ا'، 'ب'، 'ج' میں سے ہر ایک، مخروطی کے لحاظ سے، اس خط کا قطب ہوگا جو دو سرے دو نقطوں کو ملاتا ہے۔

ا کو مبدا اور خطوط 'ا'، 'س'، 'ب'، 'ج' کو علی الترتیب محور اور محور ماقرار دو۔

فرض کرو کہ 'ق'، 'س' اور 'ب' کی مساواتیں

$$(۱) \quad \dots \dots \dots = ۱ \quad \text{ب} - \text{ا} - \text{ق}$$

$$(۲) \quad \dots \dots \dots = ۱ \quad \text{ب} - \text{ا} - \text{س}$$

ہیں۔ تب 'ق'، 'س' اور 'ب' کی مساواتیں

$$(۳) \quad \dots \dots \dots = ۱ \quad \text{ب} - \text{ا} - \text{ق}$$

$$(۴) \quad \dots \dots \dots = ۱ \quad \text{ب} - \text{ا} - \text{س}$$

ہوں گی۔

مخروطیوں 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'ا'، 'ب'، 'س' کے درمیان نقطہ 'ا' سے گزرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

$$\text{ا} - \text{ب} - \text{ا} = ۱ \quad \text{ب} - \text{ا} - \text{ق}$$

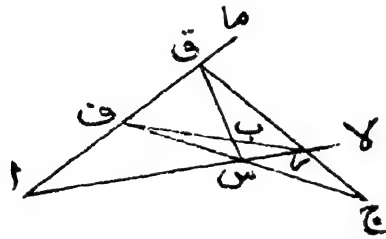
ہے۔ اس مخروطی کے مبدا کا قطبی [دفعہ ۱۸۰]

$$(۱ + ۱) - \text{ا} - \text{ب} = ۲$$

ہے۔ اس کو شکلوں

$$\text{ا} - \text{ب} - \text{ا} = ۱ \quad \text{ب} - \text{ا} - \text{ق}$$

اور لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مبداء کا قطبی خطوط (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع اور نیز خطوط (۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ اس لیے مخروطی کے لحاظ سے (۱) کا قطبی خط ب ج ہے۔ اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ج (۲) کا قطبی ہے، اور (ب) ج کا قطبی ہے۔



خود مخروط یا خود قطبی مثلث وہ مثلث ہوتا ہے جس کا ہر اس ایک مخروطی کے لحاظ سے، مقابل کے ضلع کا قطب ہوتا ہے۔

۲۱۶۔ اگر ایک مخروطی ایک ذواربعۃ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرے اور (ب) ج وہ مثلث ہو جو ذواربعۃ الاضلاع کے وتروں سے بنتا ہے تو (ب) ج، مخروطی کے لحاظ سے، خود مخروطی مثلث ہوگا۔

فرض کرو کہ 'ق'، 'س'، 'ر'، 'ن' نقاط تماس ہیں۔

تب شکل میں 'ل' ف ق کا قطب ہے اور 'ن' اس کا قطب ہے۔
اس لیے 'ل' ف ق اور 'س' ر کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہے۔ اسی طرح
گ م 'س' ف اور 'ر' ق کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہے۔
پس 'ا' ج 'ل' ن اور 'گ' م کا نقطہ تقاطع ہے اس خط کا قطب ہے جو
ف ق 'س' ر کے نقطہ تقاطع اور 'س' ف

سراق کے نقطہ تقاطع کو ملاتا ہے۔

لیکن (دفعہ ۲۱۵) ف س اور
س ق کا نقطہ تقاطع اس آخری نقطہ کا قطب -
اس لیے 'ف' س اور س ق کا
نقطہ تقاطع ہے -

اس طرح ب'س ف اور ق راق
کا بھی نقطہ تقاطع ہے اور ج'ف ق اور
س ر کا بھی نقطہ تقاطع ہے۔

پس دفعہ ۲۱۵ کی رو سے مثلث
 (ب ج خود قطبی ہے) نیز دیکھو دفعہ ۲۸۶

۲۱۷۔ اُس مخروطی کی عام مساویہ معلوم کرنا جو محدود کے مخروطوں کو مس کرے۔

اگر نقاط ماس کو ملانے والے خط کی مساوات
 ۱ لا + ب ما = ۱۔ ہو تو اس مخروطی کی مساوات جو مخروطی لا ما = کے ساتھ ان نقطوں
 دو ہر ماس رکھے جہاں خط ۱ لا + ب ما = ۱۔ اس سے ملتا ہے بموجب دفعہ ۱۸۷
 (۱ لا + ب ما) - ۲ لہ لا ما = ۰

-4-

۲۱۸۔ اُس مخروطی کی عام مساوات معلوم کرنا جو چار دئے ہوئے خطوں کو مس کرے۔

ان میں سے دو خطوط مستقیم کو محاور قرار دیا اور فرض کر دیا کہ دوسرے دو خطوط مستقیم کی مساواتیں

ل لا + م ما = ۱ اور ل لا + م ما = ۱ ہیں۔ محوروں کو مس کرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

$$(1) (لا + ب ما) = ۱ - ل لا ما = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔ وہ خطوط جو مبداء کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں (۱) ل لا + م ما = ۰ کو قطع کرتا ہے مساوات

$$(2) (لا + ب ما) = ۱ - ل لا م ما = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ خط مخروطی کو مس کریگا اگر خطوط (۲) منطبق ہوں جس کے لیے شرط

$$(1) (ل - ۱) (ب - م) = ۱ - ل (ل - ۱) (ب - م) = ۰$$

ہے۔ اس لیے

$$۲ = ۱ - ل (ل - ۱) (ب - م)$$

پس چار خطوط مستقیم

(۲۹۹)

لا = ۰، ما = ۰، ل لا + م ما = ۱ اور ل لا + م ما = ۱ کو مس کرنے والے مخروطی کی عام مساوات

$$(لا + ب ما) = ۱ - ل لا ما$$

ہے جہاں مبدلوں 'ب' 'ل' میں ربط

$$۲ = ۱ - ل (ل - ۱) (ب - م) = ۱ - ل (ل - ۱) (ب - م)$$

ہیں۔

۲۱۹۔ ان مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار دے ہوئے

خطوط مستقیم کو مس کریں۔

اگر دے ہوئے خطوں میں سے دو کو محاور قرار دیا جائے اور دیگر دو کی

مساواتیں

ل لا + م ما - ۱ = ۰ اور ل لا + م م - ۱ = ۰
ہوں تو مخروطی کی مساوات

(۱ لا + ب ما - ۱) - ۲ ل لا = ۰
ہوگی بشرطیکہ

ل = ۲ (۱ - ل) (ب - م) ، (۱)

ل = ۲ (۱ - ل) (ب - م) ، (۲)

مخروطی کامرکز مساواتوں

۱ (۱ لا + ب ما - ۱) - ل ما = ۰ اور ب (۱ لا + ب ما - ۱) - ل لا = ۰
سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے

۱ لا = ب ما ، اور ۱ (۲ لا - ۱) = ل ما ، (۳)

مطلوبہ طریق معلوم کرنے کے لیے مساواتوں (۱) ، (۲) اور (۳) سے 'ب' اور 'ل' کو ساقط کرنا چاہئے۔
(۱) اور (۳) سے

۱ (۲ لا - ۱) = ل ما (۱ - ل) (ب - م) = ۲ (۱ - ل) (ب ما - م ما)
اس لیے

۱ (۲ ل لا + ل ما - ۱) = ۲ ل م
کیونکہ ۱ لا = ب ما

اسی طرح (۲) اور (۳) سے

۱ (۲ ل لا + ل ما - ۱) = ۲ ل م

۱ کو ساقط کرنے پر مرکوزوں کے طریق کی مساوات

(۳۰)

$$\frac{۲ ل لا + ل ما - ۱}{ل م} = \frac{۲ ل لا + ل ما - ۱}{ل م}$$

حاصل ہوتی ہے۔

پس مطلوبہ طریق وہ خط مستقیم ہے جس کی مساوات

$$= \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) m^2 + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) n^2$$

۲۱۔ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ خط مستقیم ذواربعۃ الاضلاع کے دتروں کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے، صریحاً یہ درست ہے کیونکہ کوئی وتر چار خطوط کو مس کرنے والے ایک بہت ہی پتلے ناقص کی انتہائی شکل ہے اور اس ناقص کا مرکز انتہائی وتر کا نقطہ وسطی ہے۔ پس ذواربعۃ الاضلاع کے تین دتروں کے نقاط وسطی ان مخروطیوں کے مرکروں کے طریق پر واقع ہوتے ہیں جو ذواربعۃ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔ [دیکھو صفحات ۲۴۴، ۲۸۶]

۲۲۔ وہ تمام مخروطی جو محوروں کو ان نقطوں پر مس کرتے ہیں جہاں خط ۱ لا + ب ما - ۱ = ۰ محوروں کو قطع کرتا ہے مساوات سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ مخروطی مکانی ہوگا اگر لہ ایسا ہو کہ درجہ دوم کی رقبہیں ایک کامل مربع بنائیں، اس کے لیے شرط

$$ا^2 ب^2 = (ا ب - لہ)^2$$

۲۳۔

لہ = ۰ یا لہ = ۲ ا ب
قیمت لہ = ۰ سے منطبق خطوط مستقیم کا ایک زوج (۱ لا + ب ما - ۱) = ۰ حاصل ہوتا ہے۔

پس مکانی کے لیے لہ = ۲ ا ب چنانچہ منحنی کی مساوات

$$(ا لا + ب ما - ۱) = ۲ ا ب لہ$$

حاصل ہوتی ہے جس کو شکل

$$ا لا + ب ما = ۱$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۲۱۔ مکانی $\overline{لا} + \overline{اب} = \overline{ا} = \overline{ا}$ کے کسی نقطہ پر تماس کی (۳۰۱)

مساوات معلوم کرنا۔

ہم منحنی کی مساوات کو منطبق بنا سکتے ہیں اور اس کے بعد دفعہ ۸، میں حاصل شدہ ضابطہ کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لیکن نتیجہ کو سادہ تر شکل میں حسب ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے:

منحنی پر کے دو نقطوں $(\overline{لا}، \overline{ا})$ اور $(\overline{لا}، \overline{ا})$ کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات

$$\overline{لا} - \overline{ا} = \frac{\overline{ا} - \overline{ا}}{\overline{ا} - \overline{ا}} \dots \dots \dots (۱)$$

ہے مع شرائط $\overline{لا} + \overline{اب} = \overline{ا}$ اور $\overline{لا} + \overline{اب} = \overline{ا}$ کے۔۔۔ (۲)
ان شرطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\overline{لا} (\overline{لا} - \overline{ا}) = (\overline{لا} - \overline{ا}) \overline{اب} \dots \dots \dots (۳)$$

(۱) اور (۳) کی متناظر طرفوں کو ضرب دو تو

$$\overline{لا} (\overline{لا} - \overline{ا}) = (\overline{لا} - \overline{ا}) \overline{اب}$$

اس لیے $(\overline{لا}، \overline{ا})$ پر کے تماس کی مساوات

$$\overline{لا} (\overline{لا} - \overline{ا}) + \overline{اب} (\overline{ا} - \overline{ا}) = ۰$$

لیکن چونکہ $\overline{لا} + \overline{اب} = \overline{ا}$ اس لیے تماس کی مساوات

$$لا + \sqrt{\frac{1}{لا}} = \sqrt{\frac{ب}{م}} = ۱$$

نہے۔ مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطعی کی مساوات معلوم کرنا ہو تو مکانی کی مساوات کی منطق شکل استعمال کرنی چاہئے۔

مثال ۱۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ خط لا + م = ۱۔ مکانی

$$\sqrt{لا + م} = \sqrt{ب} = ۱ \text{ کو مس کرے۔}$$

کسی نقطہ (لا، م) پر کے ماس کی مساوات

$$لا + \sqrt{\frac{1}{لا}} = \sqrt{\frac{ب}{م}} = ۱$$

(۳۰۲) ہے۔ یہ مساوات خط کی مساوات کے شامل ہوگی اگر ل = $\sqrt{\frac{1}{لا}}$ اور م = $\sqrt{\frac{ب}{م}}$

$$\text{یا اگر } \frac{1}{ل} = \sqrt{لا} \text{ اور } \frac{ب}{م} = \sqrt{ب} = ۱$$

پس مطلوبہ شرط

$$۱ = \frac{ب}{م} + \frac{1}{ل}$$

ہے۔

مثال ۲۔ مکانی $\sqrt{لا + م} = \sqrt{ب} = ۱$ کا ماسکہ معلوم کرنا۔

وہ دائرہ جو ت ق کو ت پر مس کرتا ہے اور جو ف میں سے گزرتا ہے ماسکہ میں سے [دیکھو دفعہ ۱۶۵ (۴)] دو ماس منطقہ ہوتے ہیں [بھی گزرتا ہے۔

یہ دو نقطے ف اور ق (۱، ۱) اور (۱، ۱) ہیں۔ اس لیے ماسکہ ان دونوں

دائرہوں پر ہے جن کی مساواتیں

$$۰ = \frac{لا}{۱} - ۲ + لا + جم - ۲ + لا$$

$$۰ = \frac{لا}{ب} - ۲ + لا + جم - ۲ + لا$$

اور

ہیں۔ پس ماسکہ مساواتوں

$$\frac{لا}{ب} = \frac{لا}{۱} = ۲ + لا + جم - ۲ + لا$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{۱}{۲ + لا + جم - ۲ + لا} = \frac{لا}{ب} = \frac{لا}{۱}$$

مثال ۳۔ مکانی $[۱ لا + لا ب] = ا$ کا مرتب معلوم کرنا۔

مرتب علی القوائم ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ہے۔ اب خط لا + ب = ا، پر عمود ہوگا اگر م۔ ل جم سہ = ۰، اور خط مکانی کو مس کرے گا

اگر $\frac{۱}{ل} + \frac{ب}{م} = ۱$ ۔ پس محور لا پر کا وہ منقطعہ جو ماس سے جو محور لا پر عمود ہے

منقطع ہوتا ہے $\frac{۱}{ل} (۱ + \frac{ب}{جم سہ}) = ۱$ سے حاصل ہوتا ہے۔

پس نقطہ $(\frac{جم سہ}{ب + لا + جم سہ})$ مرتب پر ہے۔

اسی طرح نقطہ $(\frac{۱}{لا + ب + جم سہ})$ بھی مرتب پر ہے۔

اسی لیے مطلوبہ مساوات $لا (ب + لا + جم سہ) + م (لا + ب + جم سہ) = جم سہ$ ہے۔

مثال ۴۔ مکانی $[لا لا + لا ب] = ا$ کا محور معلوم کرنا۔

چونکہ $(\text{لا} + \text{ب} - \text{ا})^2 - \text{ا}^2 = \text{ب}^2 - \text{لا}^2$ ۔
 $\therefore (\text{لا} - \text{ب} + \text{ا})^2 = \text{ا}^2 + \text{لا}^2 + (\text{ا} + \text{ب})^2 - \text{ا}^2 - \text{لا}^2 + \text{ا}^2 - \text{ب}^2$
 اب خطوط $\text{لا} - \text{ب} + \text{ا} = 0$ اور $\text{لا} + (\text{ا} + \text{ب}) - \text{ا} = 0$ علی القوام
 ہیں [دفعہ ۴۲] اگر
 $\text{ا}^2 - \text{ب}^2 + \text{لا}^2 + (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ا}^2 + \text{ب}^2) = 0$ ۔
 پس محور کی مساوات
 $\text{لا} - \text{ب} + \text{ا} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ا}^2 + \text{ب}^2)$

۴۔ [راس پر کے محاس کی مساوات

$$\frac{\text{ا}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{لا}^2} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{لا}^2}$$

حاصل ہوگی]۔

ہم ماسکی مخروطی

۲۲۲۔ چونکہ کسی مخروطی کے ماسکے اس کے محور پر ہوتے ہیں اس لیے
 اگر دو مخروطی ہم ماسکی ہوں تو ان کے محاور ایک ہی ہونے چاہئیں۔
 مساوات

$$1 = \frac{\text{ا}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{لا}^2}$$

۱ کی مختلف قیمتوں کے لیے ہم ماسکی نظام کے مختلف مخروطیوں کو تعبیر کریں گی
 کیونکہ مرکز سے ماسکے کا فاصلہ

$$\left\{ (\text{ا}^2 + \text{ب}^2) - (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{لا}^2) \right\} \frac{1}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{لا}^2}$$

۲۲۳ — ہم ماسکی مخروطیوں کے نظام کی مساوات

$$1 = \frac{a^2}{b^2 + l^2} + \frac{a^2}{a^2 + l^2}$$

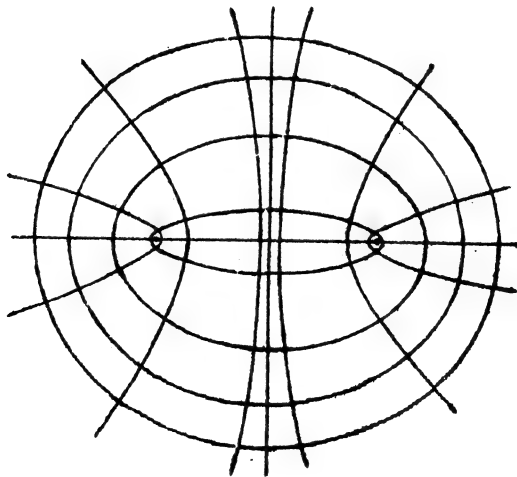
ہے۔

اگر لہ مثبت ہو تو منحنی ایک ناقص ہے۔

منحنی کے صدر محور ٹھیکے جبکہ لہ بڑھے، اور ان کی نسبت ایک قریب اور قریب تر ہوتی جائے گی جیسے لہ زیادہ اور زیادہ تر بڑھے گا چنانچہ انتہا میں ایک ہم ماسکی ناقص لامتناہی نصف قطر کا ایک دائرہ ہوگا۔

اگر لہ منفی ہے تو صدر محور گھٹنے جبکہ لہ بڑھے اور نسبت $\frac{b^2 + l^2}{a^2 + l^2}$ بھی

گھٹنے کی جیسے لہ بڑھے گا اور اس لیے ناقص چپٹا اور زیادہ چپٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ لہ $-b^2$ کے مساوی ہو جائے اور اس انتہائی صورت میں محور (ص ۴۲۳) معدوم ہوگا اور محور اعظم ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی ہوگا۔ پس ماسکوں کو ملائیوں الا خطی ناقص ہم ماسکی مخروطیوں کی ایک انتہائی شکل ہے۔



اگر $b^2 + c^2$ منفی ہو تو مخنی ایک زائد ہے۔
اگر $b^2 + c^2$ ایک جھوٹی منفی مقدار ہو تو زائد کا قاطع محور ماسکوں کے
درمیانی فاصلہ کے تقریباً مساوی ہے جتنا چھوٹا خط کا مکملہ (Complement)
جو ماسکوں کو ملاتا ہے زائد کی ایک انتہائی شکل ہے۔

زائد کے مقابروں کا درمیانی زاویہ کبیر اور کبیر تر ہوتا جائے گا جیسے
- کہ کبیر اور کبیر تر ہو گا اور انتہا میں مخنی کی دونوں شاخیں محور مابین منطبق ہوں گی۔
اگر کہ منفی ہو اور $b^2 + c^2$ سے عدد آبرو ہو تو مخنی خیالی ہو گا۔

۲۲۴۔ ہم ماسکی نظام کے دو مخروطی کسی دے ہوئے نقطہ میں سے گذرتے
ہیں۔ ثابت کریں کہ ان میں سے ایک مخروطی ناقص ہے اور دوسرا زائد۔
فرض کرو کہ ابتدائی مخروطی کی مساوات

$$1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}$$

ہے تو کسی ہم ماسکی مخروطی کی مساوات

$$1 = \frac{a^2}{(b^2 + c^2)} + \frac{a^2}{(c^2 + b^2)}$$

ہوگی۔ یہ دے ہوئے نقطہ (لا، آ) میں سے گذرے گا اگر

$$1 = \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2}{c^2 + b^2}$$

اس میں رکھو $b^2 + c^2 = c^2 + b^2$ تو

$$0 = (c^2 + b^2) - (c^2 + b^2) = 0$$

$$0 = (c^2 + b^2) - (c^2 + b^2) = 0$$

یہ مساوات c^2 میں دودرجی ہے اور اس کی دونوں اصلیں حقیقی ہیں
اور مختلف علامت ہیں۔ اس لیے دو مخروطی ہیں جن میں سے ایک کے لیے
 $b^2 + c^2$ مثبت ہے اور دوسرے کے لیے منفی ہے، اس لیے ایک مخروطی

ناقص ہے اور دوسرا زائد۔

۲۲۵۔ ہم ماسکی نظام کا ایک مخروطی اور صرف ایک مخروطی

ایک دے ہوئے خط مستقیم کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ دے ہوئے خط کی مساوات

$$ل + لا + م - ۱ = ۰$$

ہے۔ یہ خط مستقیم مخروطی

$$۱ = \frac{لا^۲}{لا + لا} + \frac{لا^۲}{لا + لا}$$

کو مس کرے گا اگر

$$[دفعہ ۱۱۶] ۱ = (ل + لا) + (ب + لا) = ۱$$

جس سے ل کی ایک اور صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ پس ایک ہم ماسکی مخروطی دے ہوئے خط کو مس کرے گا۔

۲۲۶۔ دو ہم ماسکی مخروطی اپنے تمام مشترک نقطوں پر ایک (۳-۶)

دوسرے کو علی القوا تم قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$۱ = \frac{لا^۲}{لا + لا} + \frac{لا^۲}{لا + لا} \text{ اور } ۱ = \frac{لا^۲}{لا + لا} + \frac{لا^۲}{لا + لا}$$

ہیں اور فرض کرو کہ (لا، لا) ایک مشترک نقطہ ہے۔ تب محدود لا، لا اور پر کی دونوں مساواتوں کو پورا کریں گے۔ اس لیے عمل تفریق سے

$$۰ = \frac{لا^۲}{لا + لا} + \frac{لا^۲}{لا + لا} \dots (۱)$$

اب (لا، لا) پر کے مساویوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱ \text{ اور } \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$$

ہیں۔ پس شرط (۱) سے ظاہر ہے کہ یہ تماس ایک دوسرے کے علی التوا ہیں۔
۲۲۷۔ دو دے ہوئے ہم ماسکی مخروطیوں کے کوئی دو متوازی

ماس کھینچے گئے ہیں اور ان ماسوں پر مرکز سے عمود نکالے گئے
ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱ \text{ اور } \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$$

ہیں۔

فرض کرو کہ خطوط

لاجم عہ + مابج عہ = ع اور لاجم عہ + مابج عہ = ع
علی الترتیب ان مخروطیوں کو مس کرتے ہیں۔ تب [دفعہ ۱۱۶ نتیجہ صریح]
ع = لاجم عہ + مابج عہ

اور ع = (لا + لہ) جم عہ + (ب + لہ) جب عہ

$$ع - ع = لہ$$

۲۲۸۔ اگر دو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کا ماس دوسرے
مخروطی کے ایک ماس پر عمود ہو تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق
ایک دائرہ ہوگا۔

فرض کرو کہ ہم ماسکی مخروطیوں کی مساواتیں

$$1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} \quad \text{اور} \quad 1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}$$

ہیں۔

وہ خطوط جن کی مساواتیں

$$\text{لاجم } c + \text{ماجب } c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1)$$

اور لاجم $c - \text{ماجب } c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (2) اور لاجم $c + \text{ماجب } c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (3) ہیں مخروطیوں کو مس کرتے ہیں اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ مساواتوں (1) اور (2) کی طرفین کا مربع لیکر جمع کر دو تو مطلوبہ طریق کی مساوات

$$a^2 + b^2 = c^2$$

حاصل ہوگی۔

اگر ہم دوسرے ناقص کے محور اصغر کو لا انتہا چھوٹا فرض کریں تو اس کے تمام حماس ماسک کے بہت ہی قریب سے گزریں گے، اس لیے دفعہ ۱۲۶ (ع) اوپر کی مخصوص صورت ہے۔

مثال ۱۔ کوئی دو مکانی جن کا ماسک مشترک اور محاور مخالف سمتوں میں ہوں علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ دو مکانیوں میں ماسک مشترک ہے اور ان کے محاور ایک ہی خط مستقیم میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ت ف ایک مکانی کا حماس اور ت ق دوسرے مکانی کا حماس ہو اور ت ف، ت ق علی القوائم ہوں تو ت کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

مثال ۳۔ دو ہم ماسکی مخروطیوں کا مرکز ج ہے، ان میں سے ایک کا حماس ت ق ہے اور دوسرے کا ت ف۔ ثابت کرو کہ اگر حماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ج ت، ف ق کی تنصیف کرے گا۔

فرض کرو کہ ماس

$$1 = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}} \quad \text{اور} \quad 1 = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}}$$

میں توجہ کی مساوات

$$= (\frac{\text{لا}}{\text{ب}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}}) + (\frac{\text{لا}}{\text{ب}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}})$$

ہوگی۔ یہ خط، ق کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے کا اگر (۳۰۸)

$$= (\frac{\text{لا}}{\text{ب}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}}) + (\frac{\text{لا}}{\text{ب}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}})$$

$$= (\frac{\text{لا}}{\text{ب}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}}) + (\frac{\text{لا}}{\text{ب}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}})$$

$$= \frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}}$$

کیونکہ مخروطی ہم ماسکی ہیں۔ یعنی اگر ماس علی القوام ہوں۔

مثال ۴۔ دو مکافوں میں ماسک مشترک ہے اور ان کے محاور

ایک ہی خط مستقیم میں ہیں۔ ان میں سے ایک کا ماس ق اور دوسرے

کات ق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ق میں سے گزرنے والا وہ خط جو محور کے

متوازی ہے ق کی تنصیف کرے تو ماس علی القوام ہوں گے۔

مثال ۵۔ دو ہم ماسکی مخروطیوں پر کے وہ نقطے جن کے خارج المرکز

زاوے ایک ہی ہوں نظیری نقطوں سے موسوم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ اگر ایک

ناقص ہر کوئی دو نقطے ق ہوں اور اس کے ایک ہم ماسکی ناقص پر

نظیری نقطے ق ہوں تو ق = ق۔

۲۲۹۔ ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے

ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے

فرض کرو کہ ہم ماسکیوں کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{ل^۲}{ل + ۲} + \frac{م^۲}{ب + ۲}$$

ہے اور دئے ہوئے خطِ مستقیم کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = ل + م$$

ہے۔ نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات بلحاظ (۱)

$$(۳) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا لا}{ل + ۲} + \frac{ما ما}{ب + ۲}$$

ہے۔ اگر (۲) اور (۳) ایک ہی خطِ مستقیم کو تعبیر کریں تو

$$ل = \frac{لا}{ل + ۲}، م = \frac{ما}{ب + ۲}$$

حاصل ہونا چاہئے، اس لیے

$$\frac{لا}{ل} - \frac{لا}{ل + ۲} = \frac{ما}{ب} - \frac{ما}{ب + ۲}$$

(۳۰۹)

پس قطبوں کا طریق وہ خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات

$$\frac{لا}{ل} - \frac{ما}{ب} = \frac{لا}{ل + ۲} - \frac{ما}{ب + ۲}$$

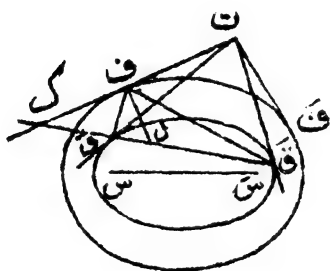
ہے۔

یہ خطِ مستقیم خط (۲) پر عمود ہے۔ نظام کا ایک ہم ماسکی مخروطی خط (۲) کو مس کرے گا اور نقطہ تماس، اس ہم ماسکی کے لحاظ سے خط کا قطب ہوگا۔

اس لیے قطبوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو دئے ہوئے خط پر عمود ہے اور اس نقطہ میں سے گزرتا ہے جہاں وہ ایک ہم ماسکی کو مس کرتا ہے۔

۲۳۰۔ کسی نقطہ ت سے ایک مخروطی کے دو ماس ت ف ت ف کھینچے گئے ہیں اور نیز ایک ہم ماسی مخروطی کے دو ماس ت ق ت ق کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم ق ف اور ق ف ف پر کے ماس سے مساوی زاوے بنائیں گے۔ فرض کرو کہ ت ف اور ف پر کا ماد ق ق کو علی الترتیب ک ل پر قطع کرتے ہیں۔

تب ت ف کا قطب اُس مخروطی کے لحاظ سے جس پر ق اور ق واقع ہیں خط ف ل پر ہے (دفعہ ۲۲۹)۔ نیز چونکہ ت اسی مخروطی کے لحاظ سے ق ق کا قطب ہے اس لیے ت ف کا قطب ق ق پر ہے [دفعہ ۱۸۱]۔ اس لیے ت ف ک کا قطب ل پر ہے جو ق ق اور ف ل کا نقطہ تقاطع ہے۔



اس لیے [دفعہ ۱۸۲] سمت گ ق ل ق او پینل ف ک ف ق ل ف ق موسیقی ہیں۔ پس چونکہ زاویہ ک ف ل ایک قائمہ زاویہ ہے اس لیے

ف ق اور ف ق ف ل یا ف ک کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں [دفعہ ۵۶]۔

نتیجہ صریح ۱۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ق ق واقع ہیں اس خطی ناقص میں تحویل ہوتا ہے جو ماسکوں کو ملاتا ہے، تب مسئلہ بالا ہو جاتا ہے؛ وہ خطوط جو ایک مخروطی کے ماسکوں کو منحنی کے کسی نقطہ

ف سے ملاتے ہیں ف پر کے ماس کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔
نتیجہ صریح ۲۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ف ف واقع ہیں خطی ناقص میں تحویل ہوتا ہے، تب ایک مخروطی کے دو ماس ایک ماسک پر مساوی زاوے بناتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۳۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ف ف واقع ہیں ت میں سے گذرتا ہے، تب وہ دو ماس جو کسی نقطہ ت سے ایک مخروطی کے کھینچے جائیں ت پر کے اس ماس کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں جو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے جو

ت میں سے گذریں کسی ایک کا کھینچا گیا ہو۔
نتیجہ صریح ۴۔ خطوط مستقیم ف ق ف ق ف ق ف ق ف ق ایک ہی ہم ماسکی کو مس کرتے ہیں۔

۲۳۱۔ اگر ایک دے ہوئے مخروطی کا کوئی وتر ق ق ہو جو ایک ثابت ہم ماسکی مخروطی کو مس کرتا ہے تو ق ق ایسے بدلیگا جیسے متوازی قطر کا مربع۔ نیز اگر ج ع کو مرکز میں سے ق پر کے ماس کے

متوازی کھینچا جائے اور وہ ق ق سے ع پر ملے تو ق ع مستقل
طول کا ہو گا۔ فرض کرو کہ ناقص

$$= 1 - \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

پر نقطے ق اور ق' ط اور طہ ہیں اور فرض کرو کہ ق ق' مخروطی

$$1 = \frac{r_1}{r_2 + r_1} + \frac{r_1^2}{r_2 + r_1}$$

کو سس کرتا ہے۔ تب

$$ق ق' = r_1 (جم ط - جم طہ) + r_2 (جب ط - جب طہ)$$

$$= 4 جب ط \frac{1}{r_1} (ط - طہ) \{ r_1 جب ط \frac{1}{r_1} (ط + طہ) \}$$

$$+ r_2 جم ط \frac{1}{r_1} (ط + طہ) \{$$

$$ج د = r_1 جب ط \frac{1}{r_1} (ط + طہ) + r_2 جم ط \frac{1}{r_1} (ط + طہ) \}$$

لیکن چونکہ ق ق' دوسرے مخروطی کو سس کرتا ہے اسلئے

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1} جم ط \frac{1}{r_1} (ط + طہ) + \frac{r_2 + r_1}{r_2} جب ط \frac{1}{r_1} (ط + طہ) = جم ط \frac{1}{r_1} (ط - طہ)$$

$$r_2 جب ط \frac{1}{r_1} (ط - طہ) = r_1 جب ط \frac{1}{r_1} (ط + طہ) \{$$

$$+ r_2 جم ط \frac{1}{r_1} (ط + طہ) \{ \dots \dots \dots (1)$$

پس $وُ ب ا ق ق^2 = ۴ ل ج د^2$ (۲)
پھر چونکہ ع ، خطوط

$$\frac{۱}{۱} ج م \frac{۱}{۲} (ط + طه) + \frac{۱}{۲} ج ب \frac{۱}{۲} (ط + طه) - ج م \frac{۱}{۲} (ط - طه) =$$

$$\text{اور } \frac{۱}{۱} ج م ط + \frac{۱}{۲} ج ب ط =$$

کا نقطہ تقاطع ہے اس لیے

$$\frac{ج م \frac{۱}{۲} (ط - طه)}{ج ب \frac{۱}{۲} (ط - طه)} = \frac{ط - طه}{ج م ط} = \frac{۱}{۱} ج م ط$$

$$\text{پس } ق ع ج ب^2 \frac{۱}{۲} (ط - طه)$$

$$= \left\{ ج م ط ج م \frac{۱}{۲} (ط - طه) - ج م ط ج ب \frac{۱}{۲} (ط - طه) \right\}^2$$

$$+ ب ا^2 \left\{ ج م ط ج م \frac{۱}{۲} (ط - طه) + ج م ط ج ب \frac{۱}{۲} (ط - طه) \right\}^2$$

$$= وُ ج ب^2 \frac{۱}{۲} (ط + طه) + ب ا^2 ج م \frac{۱}{۲} (ط + طه)$$

$$ق ع^2 = \frac{وُ ب ا^2}{ل} ، (۱)$$

مثال۔ دو ثابت ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کا
ماس تا ف اور دوسرے کا تا ق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر
ماس ایک دوسرے کے علی التواء ہوں تو خط ف ق ہمیشہ
ایک تیسرے ہم ماسکی مخروطی کو مس کرے گا۔

اگر مشترک مرکز جہوتو ماسوں کے علی القوائم ہونے کی وجہ سے جت،
 فق کی تنصیف کرے گا [مثال ۳ دفعہ ۲۲۸]۔ اس لیے جت اور
 قق پر کے ماس کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔ پس اگر ج ع
 ق پر کے ماس کے متوازی ہو اور ق ف سے ع پر ملے توق ع = جت۔
 لیکن جت مستقل ہے [دفعہ ۲۲۸]۔ اس لیے ق ع مستقل
 ہے اور اس لیے ق ع ف ایک ثابت ہم ماسکی کو مس کرتا ہے۔

ثبوت دیگر۔ $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} = ۱$ ۔ کے وہ ماس جن کا وتر تماس
 قط ل لا م با۔ ۱ = ۰ پر ہے حسب دفعہ ۱۸۹

$(\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} - ۱)(۱ - \frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با}) = (۱ - \frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با}) - (۱ - \frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با}) = ۰$
 ہیں۔ یہ ماس

$\frac{لا}{وا} (ب م - ۱) - ۲ م لا م + \frac{ما}{با} (۱ - ل) = ۰$ (۱)
 کے متوازی ہیں۔

$\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} - ۱ = ۰$ کے وہ ماس جن کا وتر تماس بھی یہی ہے
 $\frac{لا}{وا} \{ (ب م - ۱) - ۲ م لا م + \frac{ما}{با} (۱ - ل) \} = ۰$
 کے متوازی ہیں۔ وہ خطوط جو ان ماسوں پر عمود ہیں اور نقطہ (ب م) میں سے
 گزرتے ہیں

(۳۱۲)

$\frac{ما}{با} \{ (ب م - ۱) - ۲ م لا م + \frac{لا}{وا} (۱ - ل) \} = ۰$
 (۲)

خطوط (۱) میں سے ایک وہی ہے جو خطوط (۲) میں سے ایک ہے
یہ خط خطوط

$$\left\{ \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right\} \left\{ (a+b)^2 + (a+b)^2 \right\}$$

میں سے جو (۱) اور (۲) کے ایسے ارکان کو جمع کرنے سے معلوم کئے گئے ہیں ایک ہے۔

لیکن حماسوں کی سمتیں، ل اور م پر غیر منحصر نہیں ہو سکتیں، اس لیے مائل ہونا چاہئے

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{2}{(a+b)^2}$$

خط ل + م - ا = ۱، کالغاف اوپر کی شرط کے ساتھ

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2}$$

ہے جو ایک ہم ماسکی مخروطی ہے کیونکہ

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2}$$

۲۳۲۔ جب کسی دو منحنیوں کے نقاط تقاطع میں سے دو منطبق ہوتے

ہیں یعنی جب دو منحنی مس کرتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ منحنی زیر بحث نقطہ پر

پہلے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں۔ جب تین نقاط تقاطع منطبق ہوتے ہیں

تو ہم کہتے ہیں کہ منحنی دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں، علیٰ ہذا القیاس۔

وہ منحنی جو ایک دئے ہوئے منحنی کے ساتھ زیادہ سے زیادہ ممکن

رتبہ کا تماس رکھے تنہی منحنی کہلاتا ہے۔

ایک دائرہ کو صرف تین دئے ہوئے نقطوں میں سے گزارا جاسکتا ہے

پس وہ دائرے جو کسی منحنی کے لٹھی دائرے ہوتے ہیں اس کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں۔

وہ دائرہ جو ایک دے ہوئے منحنی کے ساتھ دے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے اس نقطہ پر کا دائرہ انحناء کہلاتا ہے اور اس دائرہ کا نصف قطر نصف قطر انحناء کہلاتا ہے۔

دو مخروطی چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔ اس لیے دو مخروطی ایک دوسرے کے ساتھ تیسرے رتبہ سے بڑے رتبہ کا تماس نہیں رکھ سکتے۔ اگر وہ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہوں تو ان میں ایک اور نقطہ مشترک ہونا چاہیے۔

۲۳۳۔ ایک مخروطی کسی دے ہوئے مخروطی کے ساتھ ایک دے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔ مخروطی کی عام مساوات معلوم کرو۔ (۳۱۳)

فرض کرو کہ دے ہوئے مخروطی کی مساوات $z = 0$ ہے اور فرض کرو کہ $z = 0$ کے دے ہوئے نقطہ (λ, μ, ν) پر کے تماس کی مساوات $t = 0$ ہے۔
 (λ, μ, ν) میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات
 $1 - \lambda - \mu - \nu = 0$

ہے۔ پس مساوات

س۔ لہ $t = 0$ { $1 - \lambda - \mu - \nu = 0$ } (۱)

ایک ایسے مخروطی کی مساوات ہے جو ان نقطوں میں سے گزرتا ہے جہاں خطوط مستقیم $t = 0$ اور $1 - \lambda - \mu - \nu = 0$ مخروطی میں $z = 0$ کو قطع کرتے ہیں۔

پس (۱) 'س' = کو تین منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے -
 چونکہ دو مستقل لہ اور م اختیاری ہیں اس لئے مخروطی (۱) سے
 دوسری شرطیں پوری ہو سکتی ہیں - چنانچہ ان کا انتخاب اس طرح عمل میں
 آسکتا ہے کہ مساوات (۱) ایک دائرہ کو تعبیر کرے -
 اگر خط ما - ما - م (لا - لا) = ماس پر منطبق ہو تو چاروں نقاط
 تقاطع منطبق ہوتے ہیں - اس لئے مخروطی 'س' - لہ ت = 'س' =
 کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے یعنی وہ ایک لٹھی مخروطی ہے -
 مثال ۱ - اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی ۱ لا^۲
 + ۲ ب لا + ج ما + ۲ د لا = کو مبدا پر لٹم کرے -
 مساوات

۱ لا^۲ + ۲ ب لا + ج ما + ۲ د لا - لہ (ما - م لا) =
 میں جتنے مخروطی شامل ہیں سب کے سب دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں:
 دائرہ کے لئے شرطیں ۲ ب - لہ = ۰ اور ۱ + لہ م = ج ہیں -
 اس لئے مطلوبہ دائرہ ج لا + ج ما + ۲ د لا = ۰ ہے -
 مثال ۲ - اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی ۱ لا^۲
 + ۲ ب لا + ج ما + ۲ د لا = ۰ کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھے -
 مخروطی ۱ لا^۲ + ۲ ب لا + ج ما + ۲ د لا - لہ لا = ۰ دے ہوئے
 مخروطی کو چار منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے -

یعنی مکانی ہے اگر (۱ - لہ) ج = ۲ ب - اسلئے مطلوبہ مکانی کی مساوات (۳۱۳)
 حسب ذیل ہے:

ب لا^۲ + ۲ ب ب ج لا + ج ما + ۲ د ج لا =
 ۲۳۴ - $\frac{لا^۲}{۱} + \frac{ما^۲}{۲} - ۱ = ۰$ پر کے نقطہ عہ پر دائرہ انخواء
 کی مساوات معلوم کرنا -
 اس دائرہ کا مرکز جو نقطوں (عہ، ب، ج) میں سے گزرتا ہے

$$\frac{۴ \text{ گ } ۱}{۲ - ۱ \text{ ب } ۲} = \text{جم } ۴ + \text{جم } ۲ + \text{جم } ۱ + \text{جم } ۰ = (۴ + ۲ + ۱ + ۰)$$

$$\frac{۴ \text{ ف } ۱}{۲ - ۱ \text{ ب } ۲} = \text{جب } ۴ + \text{جب } ۲ + \text{جب } ۱ + \text{جب } ۰ = (۴ + ۲ + ۱ + ۰) \text{ (فہمہ ۱۳۶)}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

پس اگر ۴ = ۲ = ۱ = ۰

$$\frac{۴ \text{ گ } ۱}{۲ - ۱ \text{ ب } ۲} = ۳ \text{ جم } ۴ + ۲ \text{ جم } ۳ = ۴ \text{ جم } ۳$$

$$\text{اور } \frac{۴ \text{ ف } ۱}{۲ - ۱ \text{ ب } ۲} = ۳ \text{ جب } ۴ - ۲ \text{ جب } ۳ = ۴ \text{ جب } ۳$$

پس نقطہ پر کے دائرہ انحناء کا مرکز

$$۱ - ۱ = (۱ - ۲) \text{ جم } ۴ = ۱ - ۲ = (۱ - ۲) \text{ جب } ۴$$

سے حاصل ہوگا۔

اس دائرہ کے نصف قطر کا مربع

$$\left(\frac{۱ - ۲}{۱} \text{ جم } ۴ - \text{جم } ۴ \right) + \left(\frac{۱ - ۲}{۱} \text{ جب } ۴ + \text{جب } ۴ \right)$$

$$= \frac{\text{جم } ۴}{۱} = \left(\frac{۱ - ۲}{۱} \text{ جب } ۴ + \text{جب } ۴ \right) + \left(\frac{۱ - ۲}{۱} \text{ جب } ۴ + \text{جب } ۴ \right)$$

$$= \frac{(۱ - ۲) \text{ جب } ۴ + \text{جب } ۴}{۱}$$

$$\frac{۱ - ۲}{۱}$$

ہے۔ اس لیے مطلوبہ مساوات ہے

$$(۱ - ۲) \text{ جب } ۴ + \text{جم } ۴ = (۱ - ۲) \text{ جب } ۴ + \text{جب } ۴$$

$$= (۱ - ۲) \text{ جب } ۴ + \text{جب } ۴$$

مرکز انحناء کا طریق صریحاً (۱۱۱) + (ب ۱) = (۱ - ب ۲) ہے۔

۲۳۵۔ اگر ایک ناقص پر چار نقطوں کے خارج المرکز زاویے α بہ یکجہ (۳۱۵) ہوں تو ان چار نقطوں میں سے ایک دائرہ گزرے گا اگر

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ [دفعہ ۱۳۶] پس نقطہ α پر کا دائرہ انحناء، ناقص کو مکرر نقطہ α پر قطع کرے گا جہاں

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ (۱)۔

(۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی مخصوص نقطہ α میں سے انحناء کے تین دائرے گزریں گے یعنی نقطوں $\frac{1}{3}(2\pi - \alpha)$ ، $\frac{1}{3}(2\pi - \beta)$ ، اور $\frac{1}{3}(2\pi - \gamma)$ پر کے انحناء کے دائرے یہ تین نقطے اس اعظم مثلث کے راس ہیں جو ناقص میں کھینچا جا سکتا ہے [دفعہ ۱۳۹ مثال ۱]۔ نیز چونکہ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ (۲)

$\frac{1}{3}(2\pi - \alpha) + \frac{1}{3}(2\pi - \beta) = \frac{1}{3}(2\pi - \gamma)$ اس لیے نقطہ α اور

وہ تین نقطے جن پر کے انحناء کے دائرے α میں سے گزرتے ہیں ایک دائرہ

پر واقع ہیں۔

مثال ۱۔ اگر دو مخروطیوں میں سے ہر ایک، ایک تیسرے مخروطی کے ساتھ دو ہر اتنا مس رکھے تو اس مخروطی کے ساتھ ان کے دو تراس اور ان کے مشترک نقطوں میں سے گزرنے والے خطوں میں سے دو خط، ایک نقطہ پر ملیں گے اور ایک موسیقی پنسل بنائیں گے۔

فرض کرو کہ تیسرے مخروطی کی مساوات $z = 0$ ہے اور فرض کرو کہ

دو دتراس کی مساواتیں $z = 0$ ، $y = 0$ ہیں تب [دفعہ ۸۷] مخروطیوں کی مساواتیں

میں $z = 0$ ، $y = 0$ (۱)۔

میں $z = 0$ ، $x = 0$ (۲)۔

ہیں۔ اب خطوط مستقیم

لہ^۲ عہ^۲ - مہ^۲ بہ^۲ = ۰ (۳)
(۱) اور (۲) کے مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔ نیز خطوط (س) عہ^۲ = ۰ اور بہ^۲ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے بھی گذرتے ہیں، اور [دفعہ ۵۶] چار خطوط عہ^۲ = ۰، بہ^۲ = ۰، لہ^۲ عہ^۲ - مہ^۲ بہ^۲ = ۰ اور لہ^۲ عہ^۲ + مہ^۲ بہ^۲ = ۰ ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

مثال ۲۔ دے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ ایک ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ مشترک دتروں کے متوازی ناقص کے جو قطر ہیں ان کا مسلسل حاصل ضرب مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ناقص کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ہے اور دائرہ کی مساوات $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ ہے۔ تب مشترک دتروں کے کسی زوج کی مساوات

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2 \quad \text{اور} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{..... (۱)}$$

(۳۱۶) ہے جہاں لہ^۲ مساوات

$$(۲) \quad \begin{vmatrix} x - c & y - d \\ \frac{x}{a} & \frac{y}{b} \end{vmatrix} = 0$$

سے حاصل ہوتا ہے ناقص کے ان نظروں کی مساوات جو خطوط (۱) کے متوازی ہیں

$$(۳) \quad \text{لہ}^۲ + \text{ما}^۲ - \text{لہ}^۲ - \text{ما}^۲ = 0 \quad \text{..... (۳)}$$

ہے۔ (۳) سے حاصل شدہ دو نیم قطر صریحاً محور کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں اور ان میں سے ایک کے طول کا مربع لہ^۲ کے مساوی ہے۔

پس چھ نیم قطروں کا مسلسل حاصل ضرب لہ کی ان تین قیمتوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جو (۳) سے حاصل ہوتی ہیں اور یہ مرکباً $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ہے۔

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کا مرکز چار دے ہوئے نقطوں میں سے کوئی ایک ہو اور وہ مثلث جو دوسرے تین نقطوں کو ملانے سے بنے خود قطبی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ مخروطی کے متقار ان دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوں گے جو ان چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے خطوطِ مستقیم

$$لا + م = ۰، \text{ اور } (ل + لا + م - ا) (ل - لا + م - ا) = ۰$$

کے نقاطِ تقاطع ہیں۔ وہ خط جو مخروطی کے مرکز کو خود قطبی مثلث کے کسی ایک راس سے ملاتا ہے اس خط کا مزدوج ہے جو دوسرے دو راسوں کو ملاتا ہے۔ اس لیے چاروں مخروطیوں کے لیے خطوں کے وہ تین زوج جو چار دے ہوئے نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مخروطی کی مساوات

$$لا + لا + ۲ لا + م + ب + ۲ م + ک + لا + ۲ ف + م + ج = ۰ \dots (۱)$$

ہے۔

$$\text{خطوط } (ل + لا + م - ا) (ل - لا + م - ا) = ۰$$

مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ اس لیے خطوط

$$ل - لا + (ل + م - ا) (ل + م + م - ا) = ۰$$

بھی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ پس [دفعہ ۱۸۴]

و م م + ب ل ل = م (ل م + ل م)
 خطوط لا م = ، مزدوج قطروں کے متوازی ہیں اس لیے م = ۰۔ او
 حامل ہوتا ہے

و م م + ب ل ل = ۰۔
 (۲) کے متقارب خطوط لا م + ب م = ۰ کے متوازی ہیں یا (۲)
 کی رُو سے خطوط (۳۱۷)

$$ل ل - م م = م م = ۰$$

کے متوازی ہیں اور اس سے مسئلہ ثابت ہے [دفعہ ۲۰۹]

مثال ۴۔ کسی ایسے مثلث کا حاطہ دائرہ جو ایک مخروطی
 کے لحاظ سے خود قطبی ہو مخروطی کے مرتب دائرہ کو علی القوائم
 قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات لا م + ب م = ۱ ہے اور فرض کرو کہ
 کے راس (لا، م)، (لا، م) اور (لا، م) ہیں۔
 چونکہ ان میں سے ہر نقطہ دوسرے کے قطبی پر ہے اس لیے

$$لا لا + ب م = ۱ \quad (۱)$$

$$لا لا + ب م = ۱ \quad (۲)$$

$$لا لا + ب م = ۱ \quad (۳)$$

مثلث کے حاطہ دائرہ کی مساوات

$$(۴) \dots \dots \dots = \begin{vmatrix} ۱ & لا & م \\ ۱ & لا & م \\ ۱ & لا & م \end{vmatrix}$$

-4-

اب اگر ایک دائرہ کی مساوات

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ہو تو اس مقام کا مربع جو مبدا سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو نسبت $\frac{ج}{ا}$ کے مساوی

- 4 -

اس لیے دائرہ (۴) کے مماس کا مربع اس نسبت کے مساوی ہے جو

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & \bar{1} & \bar{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} + \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} + \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} + \bar{1} \end{vmatrix}$$

پہلا مقطع

$$(\bar{v} \bar{1} - \bar{1} \bar{v})^r \bar{v} + (\bar{v} \bar{1} - \bar{1} \bar{v})^r \bar{v} + (\bar{v} \bar{1} - \bar{1} \bar{v})^r \bar{v}$$

$\dots + (\bar{u}^2 - \bar{u}) + (\bar{u}^2 - \bar{u}) + (\bar{u}^2 - \bar{u}) + \dots$ (عہ)

کے مساوی ہے۔

اب مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{\beta(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}})}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$1 - \frac{1}{\frac{1}{1} - \frac{1}{1}} = \frac{1}{\frac{1}{1} - \frac{1}{1}} = \frac{1}{\frac{1}{1} - \frac{1}{1}}$$

$$\frac{1-}{\bar{u}\bar{v}-\bar{v}\bar{u}} = \frac{\bar{v}\bar{u}}{\bar{u}\bar{v}-\bar{v}\bar{u}} = \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{v}\bar{u}-\bar{u}\bar{v}} \quad \text{ad}$$

مخروطیوں میں سے کسی دوسرے مخروطی کو ف 'ف' پر قطع کرتا ہے، ثابت کر دے کہ $\frac{1}{\text{وف}} + \frac{1}{\text{وف}}$ مستقل ہے۔

۴۔ ایک دائرہ اور ایک قائم زائد چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں اور ان کے مشترک وتروں میں سے ایک 'زائد کا قطر ہے۔ ثابت کر دے کہ دوسرا وتر دائرہ کا قطر ہے۔

۵۔ ان تمام مخروطیوں میں سے جو چار دے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں کم سے کم خروج المرکز والے مخروطی کے مساوی مزدوج قطر ان دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں جو ان نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

۶۔ ان تمام مخروطیوں میں سے جو دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو دے ہوئے نقطوں پر پس کرتے ہیں کم سے کم خروج المرکز کا مخروطی وہ ہوگا جس میں مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک دے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے گا۔

۷۔ ایک مخروطی کے دو ثابت ماس و 'و' و 'ب' ہیں۔ ثابت کر دے کہ ان ماسوں کے درمیان مخروطی کے ایک متغیر ماس کے منقطع کے وسطی نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے جو ایک خط مستقیم میں تحویل ہوتا ہے اگر ابتدائی مخروطی مکافی ہو۔

۸۔ ایک مخروطی کے دو ماس و 'و' و 'ب' کیپے گئے ہیں یہ ماس ایک متغیر ماس سے نقطوں و 'ف' اور ق 'ق' پر منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کر دے کہ مثلث و 'ف' ق کے حاطہ دائرہ کا مرکز ایک زائد مرسم کرتا ہے۔

۹۔ ایک مخروطی کیپھا گیا ہے جو محدودوں کے محوروں و 'و' و 'ما کو 'ا' ب پس کرتا ہے اور نقطہ د میں سے گزرتا ہے جہاں و 'ا' د ب ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ثابت کر دے کہ اگر مثلث و 'ا' ب کا

رقبہ مستقل ہو تو محروطی کے مرکز کا طریق ایک زائد ہے۔

۱۰۔ ایک ثابت نقطہ سے محروطیوں کے ایک نظام کے تماس کھینچے گئے ہیں جو دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کو دے ہوئے نقطوں پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ تماس کا طریق ایک محروطی ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ایک ہی ذراعت والا ضلع میں مرتبہ محروطیوں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے ایک دے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۲۔ ایک ناقص کھینچا گیا ہے جو ایک زائد کے متقاربوں کو مس کرتا ہے اور زائد سے چار نقطوں پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مشترک وتروں میں سے دو اس خط کے متوازی ہیں جو متقاربوں اور ناقص کے نقاط تماس کو ملتا ہے اور یہ وتر اس خط سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

۱۳۔ محروطیوں کے ایک نظام میں مرکز کا محل، محاذ کی سمت اور محاذ کا مجموعہ دے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک دے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک مکانی ہے جو محوروں کو مس کرتا ہے۔

۱۴۔ ایک مکانی کھینچا گیا ہے جو تین دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ نقاط تماس کو ملانے والے وتروں میں سے ایک ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۵۔ اگر ایک مکانی دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے اور نقاط تماس کو ملانے والا خط ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ ماسک کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۱۶۔ اگر مکانی $\sqrt{a^2 + b^2} = c$ کا محور ایک ثابت نقطہ میں

(۳۲۰)

سے گذرے تو ماسک کا طریق ایک قائم زائد ہوگا۔

۱۷۔ ایک ثابت نقطہ سے قاطعوں کا ایک زوج کھینچا گیا ہے جو ایک دے ہوئے محروطی سے چار نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک دائرہ پر واقع

ہیں۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق وہ عمود ہے جو دسے سے وکے قطبی پر کھینچا گیا ہے۔

۱۸۔ ت ف اور ت ق، ایک مخروطی کے ماس ہیں اور منحنی پر کوئی دوسرا نقطہ م ہے۔ ت میں سے گزرتا ہوا کوئی خط کھینچا گیا ہے جو م ق اور م ف سے علی الترتیب گ اور ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو ق ل اور ف ق، منحنی پر تقاطع ہوتے ہیں۔

۱۹۔ ایک ثابت خط مستقیم کے کسی نقطہ ف کو ایک مخروطی کے دو ثابت نقطوں ق، م سے ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ب ق اور م کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا}{۱۲} + \frac{ما}{۱۲} = ا$ کے اس نقطہ میں سے گزرنے والا ہم ماسکی زائد جس کا خارج المرکزہ زاویہ ع ہے حسب ذیل ہے:-

$$\frac{لا}{جم ع} - \frac{ما}{جب ع} = ا - ب$$

۲۱۔ ایک دے ہوئے نقطہ سے ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے ماس کھینچے گئے ہیں جہاں دیا ہوا نقطہ محور اعظم میں ہے۔ تقاطع ماس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۲۔ اگر ل، م، ا، ب ماسکیوں کے مبدل ہوں جو ایک دے ہوئے ناقص کے دو نقطوں ف، ق میں سے گزرتے ہیں تو ثابت کرو کہ (۱) اگر ف، ق مزدوج قطروں کے سرے ہوں تو ل + م مستقل ہوگا اور (۲) اگر ف اور ق پر کے ماس علی القوائم ہوں تو $\frac{۱}{ل} + \frac{۱}{م}$ مستقل ہوگا۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ ہم ماسکی ناقصوں کے ایک سلسلہ کے مساوی مزدوج قطروں کے سرے ایک ہم ماسکی قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔

۲۴۔ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے دو ماس کھینچے گئے ہیں۔

کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔
 ۳۱۔ ایک ناقص کے گرد ایک مثلث کھینچا گیا ہے جس کے دور
 ایک ہم ماسکی ناقص پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ میسر اس دوسرے ہم ماسکی
 ناقص پر واقع ہے۔
 ۳۲۔ ایک ناقص اور ایک دائرہ ہم ماسکی ہیں اور زائد کے متقارب
 ناقص کے مساوی مزدوج قطروں پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ زائد ان تمام
 محرومیوں کو علی القوا تم قطع کرے گا جو ناقص کے محوروں کے بیروں میں سے
 گذرتے ہیں۔

۳۳۔ ایک نقطہ ف سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے گئے ہیں
 ثابت کرو کہ ان کا حاصل ضرب

$$ل_۱ ل_۲ (ل_۱ - ل_۲)$$

ہے جہاں $ل_۱$ ، $ل_۲$ ، ان ہم ماسکیوں کے مبدل ہیں جو دیے ہوئے ناقص کے
 ہم ماسک ہیں اور ف میں سے گذرتے ہیں اور دیے ہوئے ناقص کے نیم محاذ
 و ب ہیں۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے عمودوں کے بائیں کسی مساوی المی اور
 زائد کے لحاظ سے جو مثلث کو مائل کرتا ہے ایک مزدوج تلائمیتہ ہوتے ہیں۔

۳۵۔ ایک نقطہ ت سے ایک محرومی کے محاس ت ف
 تاق ہیں اور زاویہ ف ت ق کا نصف، ف ق سے و پر ملتا ہے۔
 ثابت کرو کہ اگر و میں سے گذرنے والا کوئی اور وتر و س ہو تو زاویہ
 سات س، و ت سے تنصیف ہوگا۔

۳۶۔ اگر دو مکانی کھینچے جائیں جن میں سے ہر ایک ایک دائرہ کے
 تین نقطوں میں سے گذرتا ہے اور ان میں سے ایک دائرہ سے مکرر پر ملتا ہے
 اور دوسرا ع پر تو ثابت کرو کہ ان کے محوروں کا دیرمائی زاویہ اس زاویہ کا ایک
 چوتھائی ہے جو د ع کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔

۳۷۔ اگر Δ ب ج دو عظم مثلث ہو جو ایک ناقص میں کھینچی گئی ہے اور Δ ب ج کا حائلہ دائرہ ناقص کو مرکز د پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ان دو مکافیوں کے محوروں کے نقطہ تقاطع کا طریق جو Δ ب ج د میں سے گزرتے ہیں ایک مخروطی ہے جو ابتدائی مخروطی کے مشابہ ہے۔

۳۸۔ اگر نصف قطر Δ کے دائرہ پر کوئی نقطہ محسودوں Δ ج م ط سے حاصل ہو تو ثابت کرو کہ چار نقطوں عہ، بہ، جہ، ضہ میں سے گزرنے والے دو مکافیوں کے محوروں کی مساواتیں

$$\begin{aligned} \text{لاجم مس} + \text{ماجب مس} &= \frac{1}{\rho} \{ \text{جم (مس عہ)} + \text{جم (مس بہ)} \} \\ &+ \text{جم (مس جہ)} + \text{جم (مس ضہ)} \} \\ \text{اور لاجب مس} - \text{ماجب مس} &= \frac{1}{\rho} \{ \text{جب (مس عہ)} + \text{جب (مس بہ)} \} \\ &+ \text{جب (مس جہ)} + \text{جب (مس ضہ)} \} \end{aligned}$$

یہاں

$$\rho = \text{مس عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}$$

۳۹۔ ایک مخروطی کے اندرونی ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع Δ ب ج د ہیں۔ مخروطی کے کسی نقطہ ف سے ان اضلاع پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ Δ اور ج پر کے عمودوں کے حاصل ضرب اور ج اور د پر کے عمودوں کے حاصل ضرب میں نسبت مستقل ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر مخروطی کے اندرونی کثیر الاضلاع کے اضلاع Δ ب ج د ع ف ہیں۔ ہوں اور اضلاع کی تعداد جفت ہو تو مخروطی کے کسی نقطہ سے اضلاع Δ ب ج ع پر کے عمودوں کا مسلسل حاصل ضرب اضلاع ب د ع ف پر کے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ مستقل نسبت میں ہوگا

۴۰۔ ناقص $\frac{\Delta}{\rho} + \frac{\Delta}{\rho} = 1$ کے کسی نقطہ پر کام کرنا خنادر ہے۔

و سے ناقص کے دوسرے دو عمادوں کے پائین ق، س ہیں۔ اگر ق اور س پر کے تماس ت پر ملیں تو ثابت کرو کہ ت کے طریق کی مساوی

$$\frac{1}{2a} + \frac{2}{b} = 1 \text{ ہے۔}$$

۴۱۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ ایک مکانی کو چار حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کر سکتا اگر اس کے مرکز کا فضلہ نیم وتر خاص سے کم ہو۔ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک مکانی کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ مکانی کے راس میں سے خطوط ان چھ خطوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو نقاط تقاطع کے زوجوں کو ملاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان نقطوں کے فضلوں کا مجموعہ جہاں یہ خطوط مکانی کو قطع کرتے ہیں مستقل ہے اگر دائرہ کے مرکز کا فضلہ مستقل ہو۔

۴۲۔ تین خطوط مستقیم ایک قائم زاؤ کے لحاظ سے ایک خود قطبی مثلث بناتے ہیں۔ اگر منحنی کو متغیر کیا جائے لیکن خطوط ثابت رہیں تو مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۴۳۔ اگر ایک ناقص کے ہم مرکز ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ناقص میں مثلثوں کی لا انتہا تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور دائرہ کے گرد مثلثوں کی لا انتہا تعداد کھینچی جاسکتی ہے اگر $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ جہاں ج دائرہ کا نصف قطر ہے اور ا، ب، ناقص کے نیم محاور۔

۴۴۔ ایک ناقص پر ایسے نقطے معلوم کرو کہ ف پر کا لٹھی دائرہ ق میں سے گزرے اور ق پر کا لٹھی دائرہ ف میں سے گزرے۔

۴۵۔ قائم زاؤ ایک دے ہوئے مکانی کے ساتھ تیسرے زاؤ کا تماس رکھتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان زاؤوں کے مرکزوں کا طریق ایک مساوی مکانی ہے۔

۴۶۔ ایک ناقص پر دو نقطے ف، ق ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف پر کا عماد اس زاویہ کی تفسیف کرے جو ق پر کے عماد کے محاذی ف پر

بننا ہے تو ق پر کا عماد اُس زاویہ کی تنصیف کرے گا جو ف پر کے عماد کے محاذی ق پر بنتا ہے۔

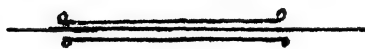
۴۷۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کسی نقطہ ف پر کا مرکز انحناء ف پر کے مماس کا قطب بلحاظ اُس ہم ماسکی زائد کے ہے جو ف میں سے گزرتا ہے۔

(۳۲۴)

۴۸۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جو ایک ناقص میں کھینچا گیا ہے۔ ایک ہم ماسکی ناقص ضلعوں کو ا، ب، ج پرس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا میں سے گزرتا ہوا ہم ماسکی زائد اندرونی ناقص سے ا پر ملتا ہے۔

۴۹۔ دو قائم زائدوں میں سے ایک کے متقارب دوسرے کے محوروں کے متوازی ہیں اور ہر ایک کا مرکز دوسرے پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے مرکز میں سے دائروں کی لا انتہا تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے کو دیگر ایسے تین نقطوں ف، ق، س میں قطع کریں کہ مثلث ف ق س پہلے مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہو۔

۵۰۔ ایک قائم زائد کے مرکز میں سے گزرتا ہوا ایک دائرہ منحنی کو نقطوں ا، ب، ج، د میں قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا حاملہ دائرہ جو ا، ب، ج پر کے مماسوں سے بنتا ہے زائد کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کا مرکز زائد کے اُس نقطہ پر ہے جو د کا متقاطع ہے۔



بارہواں باب

لفاف اور محاسن مساویں

۲۳۶۔ ہم ایک متحرک خط کا لفاف بعض سادہ صورتوں میں معلوم کر چکے ہیں [دفعہ ۱۰۸]۔
اب ہم خط

ل لا + م ما - ۱ = ۰
کا لفاف معلوم کرینگے جہاں ل اور م درجہ دوم کی کسی مساوات سے مربوط ہیں۔

۲۳۷۔ خط ل لا + م ما - ۱ = ۰ کا لفاف معلوم کرنا چاہیے

۱ ل + ۲ ل ۲ ل م + ب م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰
اگر خط کسی مخصوص نقطہ (لا، ما) میں سے گزرے تو ل لا + م ما - ۱ = ۰ - دی ہوئی
شرط کو ل اور م میں متجانس بنانے کے لیے اگر اسے استعمال کیا جائے تو

۱ ل + ۲ ل ۲ ل م + ب م - ۲ (گ ل + م ف) (ل لا + م ما)

+ ج (ل لا + م ما) = ۰

نسبت $\frac{ل}{م}$ کی دو قیمتوں سے ان دو خطوط کی سمتیں حاصل

ہونگی جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔ اگر (لا، ما) اس منحنی پر کا نقطہ ہو جس کو متحرک خط مس کرتا ہے تو اس سے کہنے ہوئے حماس منطبق ہونے چاہئیں اور اس لیے اوپر کی مساوات کی اصلیں مساوی ہونی چاہئیں۔ اس کے لیے شرط ہے

$$(1-2) \text{ گ ل} + \text{ج ل} = (\text{ب} - 2 \text{ ف} + \text{ما} + \text{ج} \text{ ما}) = (\text{ھ} - \text{گ} - \text{ما} - \text{ف} + \text{لا} + \text{ج} \text{ لا} \text{ ما})$$

$$\text{جو ل} + (\text{ب} - \text{ج} - \text{ف}) + 2 \text{ لا} + (\text{ما} - \text{ف} - \text{گ} - \text{ج} \text{ ھ}) + \text{ما} + (\text{ج} - \text{ل} - \text{گ}) + 2 \text{ لا} + (\text{ف} - \text{ھ} - \text{گ} - \text{ب}) + 2 \text{ ما} + (\text{ھ} - \text{ف} - \text{ل}) + \text{ل} - \text{ب} - \text{ھ} = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

اس لیے مطلوبہ لفاف مخروطی

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ ھ} + \text{لا} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ما} + 2 \text{ گ} + \text{لا} + 2 \text{ ف} + \text{ما} + \text{ج} = 0$$

ہے جہاں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۱۷۹ میں لئے گئے ہیں۔

وہ شرط کہ خط ل + م + ما - ۱ = منحنی

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ ھ} + \text{لا} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ما} + 2 \text{ گ} + \text{لا} + 2 \text{ ف} + \text{ما} + \text{ج} = 0$$

کو مس کرے یہ ہے کہ

$$1 \text{ ل} + 2 \text{ ھ} + \text{ل} + \text{م} + \text{ب} + \text{م} + 2 \text{ گ} + \text{ل} + 2 \text{ ف} + \text{م} + \text{ج} = 0$$

پس دفعہ ۱۷۹ میں حاصل شدہ شرط کے ساتھ مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ وغیرہ متعلق

گ	ھ	۱
ف	ب	ھ
ج	ف	گ

میں 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ کے صغیروں کے متناسب ہونے چاہئیں۔
اس کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو جاتی ہے کیونکہ (ا) کا صغیر
ب ج - ف ا ہے یا

(ب ج - ا) (ا ب - ہ) - (گ - د) (ف - ا) یعنی ا د
اور اسی طرح د و سروں کے لیے -

یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

کیونکہ پہلا منقطع ۱ ۲ ۳ + ۴ ۵ + ۶ ۷ + ۸ ۹ = ۱۰ ہے۔

محروطی فہ (ل' م) = . کامرکز معلوم کرنا۔

وہ دو حماس جو محور ما کے متوازی ہیں مساوات

$$۱ل + ۲ا + ۳گ = ۴ج$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اب اگر ما = . کے متوازی حماس ل، لا، لا = . اور ل، لا، لا = . ہوں تو

$$\frac{۱}{ل} + \frac{۱}{ل} = \frac{۲}{ج}$$

لیکن کسی محروطی کامرکز ایسے خط پر ہوتا ہے جو متوازی حماسوں کے
کسی زوج کے درمیان وسط میں ہوتا ہے۔
اس لیے مرکز خط

$$۲لا + \frac{۱}{ل} + \frac{۱}{ل} = . یعنی ج لا - گ = . پر ہے۔$$

اسی طرح مرکز خط ج ما - ف = . پر ہے۔

اس لیے مخروطی کام کر رہے ہیں

$$\left(\frac{ج}{ف} , \frac{گ}{ج} \right)$$

(۳۲۷) مثال ۱۔ خط ل لا + م ما + ا = ۰۔ کالفا ف معلوم کرنا اس شرط کے ساتھ کہ

$$۰ = \frac{ف}{ل} + \frac{گ}{م} + \frac{ا}{ا}$$

اُن دو خطوں کی سمتیں جو (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں

$$۰ = \frac{ل}{م} - \left(\frac{ف}{م} + \frac{گ}{ل} \right) \left(\frac{ل}{لا} + \frac{م}{ما} \right) = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ یہ خطوط منطبق ہونے لگے اگر

$$\frac{م}{گ} \frac{ف}{لا} = \frac{لا}{ما} = \left(\frac{ف}{لا} + \frac{گ}{ما} - ۱ \right)$$

$$۰ = \sqrt{\frac{لا}{ما}} + \sqrt{\frac{ما}{لا}} + \sqrt{\frac{لا}{ما}}$$

کے مساوی ہے۔

مثال ۲۔ مخروطی س = $\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰$ میں مثلث

کھینچے گئے ہیں اور اضلاع میں سے دو مخروطی س = $\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰$ ۔

کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کالفا ف معلوم کرو۔

س کے نقطہ ۱ (لا، ما) سے مخروطی س = ۰ کے ماسوں کی مساوات

$$\left(\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} - ۱ \right) - \left(\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} - ۱ \right) - \left(\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۲} - ۱ \right) = ۰ \dots (۱)$$

۰ =

اب اگر ج ج ، ل لا + م ما + ن = . ہو تو

$$\frac{ل^۲}{۲} + \frac{م^۲}{۲} - ۱ = ل (\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱) (ل لا + م ما + ن) = .$$

(۲)

کہ کسی خاص قیمت کے لیے وہی خطوط ہونگے جو (۱) سے حاصل ہوتے ہیں۔

پس $\frac{ل م}{۲} + \frac{لا}{۲} = مہ \frac{لا}{۲}$

$$ل - ن = \frac{لا}{۲} = مہ \frac{لا}{۲}$$

اور $م - ن = \frac{ما}{۲} = مہ \frac{ما}{۲}$

۱ ، $\frac{ما}{۲}$ ، $\frac{لا}{۲}$ سے ترتیب وار ضرب دو تو

$$\frac{ل^۲}{۲} = مہ لا (\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱) = مہ لالی$$

$$\frac{م^۲}{۲} = مہ ما (\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱) = مہ مامہ$$

اور $\frac{ن^۲}{۲} = مہ (- \frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۲} + \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲}) = مہ ن$

لیکن $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ =$ اس لیے (۳۲۸)

$$\frac{ل}{۲} + \frac{م}{۲} = \frac{ن}{۲} \quad (۳) \dots \dots$$

اس لیے ل لا + م ما + ن = . کا کاف شرط (۳) کے ساتھ

$$\frac{ل}{۲} = لا + \frac{م}{۲} = ما = ن$$

۴۔

یہ لغاف خود محرومی میں ہوگا اگر

$$\frac{لا}{۲} = \frac{با}{۲} = ن$$

اور یہ $\frac{۱}{۲} \pm \frac{ب}{۲} \pm ۱ = ۰$ میں تحویل ہوتا ہے [حسب دفعہ ۲۰۵]

۲۳۸۔ اگر ایک خط مستقیم کی مساوات

$$ل = لا + م + ۱ = ۰$$

ہو تو خط کا محل متعین ہوگا اگر ل، م معلوم ہوں۔ اور ل اور م کی قیمتوں کو بدلنے سے یہ مساوات کسی خط مستقیم کو تعبیر کر سکتی ہے۔ مقداروں ل اور م کو جو اس طرح ایک خط کے محل کو متعین کرتی ہیں خط کے محدود کہتے ہیں۔
 خط ل لا + م + ۱ = ۰ ثابت نقطہ (۱، ب) میں سے گزرے گا اگر ل + م + ۱ = ۰ اس لئے اس کو نقطہ کی مساوات کہتے ہیں۔

اگر ایک خط مستقیم کے محدود کسی رشتہ میں مربوط ہوں تو خط ایک منحنی کو لف کرے گا۔ اور وہ مساوات جو رشتہ کو بیان کرتی ہے منحنی کی حماسی مساوات کہلاتی ہے۔

اگر منحنی کی مساوات ن ویں درجہ کی ہو تو منحنی کے ن حماس کسی نقطہ سے کھینچے جاسکتے ہیں۔

تعریف۔ منحنی کو ن ویں جماعت کا منحنی کہتے ہیں جبکہ اس کے ن حماس کسی نقطہ سے کھینچے جاسکیں۔

ہم دیکھ چکے ہیں [دفعہ ۲۳۷] کہ دوسرے درجہ کی حماسی مساوات

اب فرض کرو کہ $ل + لا + م + ا + ا = ۰$ ماس نہیں ہے۔
 فرض کرو کہ وتر $ل + لا + م + ا + ا = ۰$ کے سروں پر کے ماس $(ل، م)$
 $(ل، م)$ ہیں۔
 ان ماسوں کے نقاطِ تماس کی مساواتیں

$ل (ل + لا + م + گ) + م (م + ب + ف) + گ ل$
 $+ ف م + ج = ۰$ ، وغیرہ ہیں۔ وہ شرطیں کہ یہ دو نقطے خط $ل + لا + م + ا + ا = ۰$
 پر ہوں۔
 $ل (ل + لا + م + گ) + م (م + ب + ف) + گ ل + ف م$
 $+ ج = ۰$ وغیرہ

یعنی
 $ل (ل + لا + م + گ) + م (م + ب + ف) + گ ل + ف م$
 $+ ج = ۰$ وغیرہ ہیں۔ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خطوط $(ل، م)$ اور
 $(ل، م)$ اُس نقطہ میں سے گزرتے ہیں جس کی مساوات

$ل (ل + لا + م + گ) + م (م + ب + ف) + گ ل + ف م + ج = ۰$
 ہے۔ اس لیے وہ خط $ل + لا + م + ا + ا = ۰$ کے قطب کی مساوات ہے۔

مثال — محروطی کا مرکز لاتا ہی پر کے خط کا قطب ہوتا ہے یعنی خط $(۰، ۰)$ کا قطب۔ (۳۳۰)

اس لیے مرکز کی ماسی مساوات $گ ل + ف م + ج = ۰$ ہے۔

۲۳۹ — محروطی کا مرتب دائرہ معلوم کرنا جبکہ محروطی کی
 ماسی مساوات دی گئی ہو۔

فرض کرو کہ محروطی کی ماسی مساوات

$ل + لا + م + ب + م + گ ل + ف م + ج = ۰$

ہے۔

حسب دفعہ ۲۳، مساوات

$$۱ل + ۲ل + ۳ل + م + ب - ۲(گ + ل + ف + م) (ل + لا + م + ما)$$

$$+ ج (ل + لا + م + ما) = ۰$$

سے اُن دو عاسوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو مخصوص نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔ یہ عاس ایک دوسرے کے علی القوئم ہوں گے اگر

$$\frac{ل}{۱} + \frac{ل}{۲} + ۱ = ۰ \text{ یعنی اگر } ل^۱ \text{ اور } م^۲ \text{ کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔}$$

پس اگر (لا، ما) مخروطی کے مرتب دائرہ بدر ہو تو حاصل ہونا چاہئے

$$۱- ۲گ + لا + ج + لا + ب - ۲ف + ما + ج + ما = ۰ \dots (۱)$$

مخروطی کا مرکز جو مرتب دائرہ کے مرکز پر منطبق ہے نقطہ (گ، ف) ہے۔

اگر ج = ۰۔ تو مساوات (۱) ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

منحنی اس صورت میں ایک مکافی ہے اور اس کے مرتب کی مساوات

$$۲گ + لا + ۲ف + ما - ۱ - ب = ۰ \dots (۲)$$

ہے۔

اوپر ہم نے محوروں کو قائم فرض کیا ہے، لیکن اگر محردوں کے محاور ایک دوسرے سے زاویہ سے پر مائل ہوں تو وہ شرط کہ خطوط مستقیم علی القوئم ہوں

$$۱- ۲گ + لا + ج + لا + ب - ۲ف + ما + ج + ما - ۲ج + م + ب - ۲(گ + ل + ف + م) (ل + لا + م + ما) = ۰$$

ہے۔

اس دائرہ کا مرکز (گ، ف) ہے۔

(۳۳۱)

پس خواہ محاور قائم ہوں یا مائل، مخروطی کامرکز جو مرتب دائرہ کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے (گ، ف، ج) ہے حسب ذیل ۱۳۔

۲۴۰۔ مخروطی کے ماسکے معلوم کرنا جبکہ مخروطی کی حماسی مساوات دی گئی ہو۔

فرض کرو کہ ماسکوں کا زوج (لا، ما) اور (لا، ما) ہے خواہ یہ دونوں حقیقی ہوں یا دونوں خیالی۔ تب کسی حماس ل لا + م + ما = ۱ پر کے عمودوں کا حاصل ضرب ایک نیم محور کے مربع کے مساوی ہونا چاہئے۔ پس

$$(ل + لا + م + ما) (ل + لا + م + ما) - (ل + لا + م + ما) = ۰ \dots (۱)$$

چونکہ یہ ل اور م کی ان تمام قیمتوں کے لیے درست ہے جو دینی ہوں
حماسی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے مساوات (۱)

مساوات

$$(ل + لا + م + ما) (ل + لا + م + ما) - (ل + لا + م + ما) = ۰ \dots (۲)$$

کے معادل ہونی چاہئے۔ اس لیے

$$\frac{لا + لا - ل}{۱} = \frac{لا + لا + م + ما - ل}{۲} = \frac{ما + ما - ل}{ب} = \frac{لا + لا + م + ما - ل}{۲}$$

$$\frac{۱}{ج} = \frac{ما + ما}{۲ف} =$$

اس لیے ج لا لا - ج ما ما = ۱ - ب اور ج لا ما + ج لا ما = ۲

نیز ج لا = گ - ج لا اور ج ما = ۲ف - ج ما

اوپر کی مساواتوں سے لا اور ما کو سا قاطع کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ
ماسکہ (لا، با) دو مخروطیوں

$$ج - لا = ج - ما - ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ۱ - ب =$$

$$ج - لا - ما - ف - لا - گ + ما + ۱ =$$

پر ہے۔

اوپر محوروں کو قائم فرض کیا گیا ہے۔ اگر محاور زاویہ سے پر مائل ہوں تو
مساوات (۱) میں ل + م کی بجائے ل + م + ۲ ل م جم سے رکھنا چاہئے۔

۲۴۱۔ اس مخروطی کے محوروں کے طول معلوم کرنا جسکی
مماسی مساوات دی گئی ہو۔

دفعہ سابق کے بموجب اگر (لا، ما)، (لا، با)، ماسکوں کا زوج ہو تو

$$ج (ل + لا + م + ما + ۱) (ل + لا + م + با + ۱) - ج ر (ل + م)$$

$$= ۱ ل + ۲ ل م + ل م + ب م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج$$

پس (۱ + ج ر) ل + ۲ ل م + (ب + ج ر) م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج
خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے، اس کے لیے شرط

$$\begin{vmatrix} ۱ + ج ر & ۱ & ۱ \\ ۱ & ب + ج ر & ۱ \\ ۱ & ۱ & گ \end{vmatrix} = ۰$$

ہے۔ پس وہ مساوات جس سے نیم محوروں کے مربع حاصل ہوتے ہیں
حسب ذیل ہے۔

$$ج^۲ ر + ج ر (ب + ج - ف + ج - گ) + ۱ = ۰$$

۲۴۲۔ ہم ماسکی مخروطی۔ اگر (لا، ما)، (لا، ما)، ایک مخروطی کے ماسکے ہوں تو اس کی حماسی مساوات

$$(ل + لا + م + ما) (ل + لا + م + ما) - (ل + م) (ل + م) = ۰$$

کے معادل ہے۔ پس اگر

$$ل + لا + م + ما + ب + م + گ + ل + ۲ + ف + م + ج = ۰$$

ایک مخروطی کی حماسی مساوات ہو تو کسی ہم ماسکی مخروطی کی حماسی مساوات

$$ل + لا + م + م + ب + م + گ + ل + ۲ + ف + م + ج + ل + (ل + م) = ۰$$

ہوگی۔

پس ف (لا، ما) = ۰ کے ہم ماسکی مخروطیوں کی عام مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم حسب ذیل طریقہ اختیار کرتے ہیں:

ف (لا، ما) = ۰ کی حماسی مساوات

$$ل + لا + م + م + ب + م + گ + ل + ۲ + ف + م + ج = ۰$$

ہے۔ اس لیے کسی ہم ماسکی مخروطی کی حماسی مساوات

$$(ل + ل + ل + ل + م + م + ب + ل + م + گ + لا + ۲ + ف + م + ج) = ۰$$

ہے۔ اس لیے متناظر کارٹیزی مساوات

$$ل + لا + م + م + ب + م + گ + لا + ۲ + ف + م + ج = ۰$$

(۲۳۳) ہے جہاں لا وغیرہ

گ	۰	ل + لا
ف	ب + ل	۰
ج	ف	گ

سے معلوم کرنے ہونگے۔

پس $\text{ا} = \text{ب} + \text{ج} - \text{ف} + \text{ل} + \text{ج}$ ، $\text{ه} = \text{ف} + \text{گ} - \text{ج} + \text{ه}$ ، $\text{د} = \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ل} + \text{ج}$ ، $\text{گ} = \text{گ} - \text{ل} + \text{گ}$ ، $\text{ن} = \text{ف} - \text{ل} + \text{ن}$

اور $\text{ج} = \text{ج} + \text{ا} + \text{ب} - \text{ل} + \text{ل}$
اس لیے $\text{ف} = (\text{لا} + \text{ما}) =$ کے ہم ماسکی مخروطی کی عام مساوات

$\text{ه} = \text{ف} = (\text{لا} + \text{ما}) + \text{ل} + \text{د} + \text{ل} = ۰$

$\text{د} = \text{ج} = (\text{لا} + \text{ما}) - \text{ل} + \text{گ} - \text{لا} - \text{ف} + \text{ما} + \text{ا} + \text{ب}$ بن جہاں

اسی طرح مرتب دائرہ کی مساوات $\text{د} =$ ہے۔

۲۴۳۔ اگر دو مخروطیوں کی حماسی مساواتیں $\text{س} =$ ، اور $\text{س} =$ ہوں تو $\text{س} =$ ، $\text{ل} =$ ، اس مخروطی کی عام حماسی مساوات ہوگی جو $\text{س} =$ ، اور $\text{س} =$ کے مشترک ماسوں کو مس کرتا ہے۔

اگر $\text{س} =$ ، مساوات $\text{ا} + \text{ل} + \text{ل} + \text{ل} + \text{م} + \text{ب} + \text{م} + \text{ا} + \text{گ} - \text{لا}$

$+ \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} =$ ، کو اور $\text{س} =$ ، مساوات $\text{ا} + \text{ل} + \text{ل} + \text{ل} + \text{م} + \text{ب} + \text{م} + \text{ا} + \text{گ} - \text{لا}$

$+ \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} =$ ، کو تعبیر کرے تو $\text{س} =$ ، $\text{ل} =$ ، ایک مخروطی کی حماسی مساوات ہے اور $\text{ل} =$ م کی کوئی قیمتیں جو $\text{س} =$ ، اور $\text{س} =$ ، دونوں کو پورا کریں $\text{س} =$ ، $\text{ل} =$ ، کو بھی پورا کریں گی خواہ ل کی قیمت کچھ ہی ہو۔

اس لیے مخروطی $\text{س} =$ ، $\text{ل} =$ ،، مخروطیوں $\text{س} =$ ، اور

$\text{س} =$ ، کے مشترک ماسوں کو مس کرتا ہے۔

۲۴۴۔ ان مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ $س = .$ اور $س = .$ کسی دو مخروطیوں کی عامی مساواتیں ہیں جو چار خطوں کو مس کرتے ہیں۔ تب $س = .$ $س = .$ اُس مخروطی کی عامی مساوات ہے جو ان خطوں کو مس کرتا ہے۔
اب $س = .$ $س = .$ کامرکز مساواتوں
($ج = .$ $ل = .$) ($گ = .$ $ل = .$) اور ($ج = .$ $ل = .$) ($ف = .$ $ل = .$)
سے حاصل ہوتا ہے۔

لہ کو ساقط کرنے پر مطلوب مساوات
($ج = .$ $ف = .$) ($ج = .$ $ل = .$) ($ج = .$ $گ = .$) ($ف = .$ $گ = .$)
حاصل ہوتی ہے۔

(۳۳۴) مثال۔ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جن میں سے ہر مخروطی چار دئے ہوئے خطوں کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

مساوات $س = .$ $س = .$ اُس مخروطی کی عام مساوات ہے جو ان دو مخروطیوں کے مشترک مماسوں کو مس کرتا ہے جن کی مساواتیں $س = .$ اور $س = .$ ہیں۔

اب اُس خط کے قطب کی مساوات جس کے محدود مخروطی $س = .$ $س = .$ کے لحاظ سے $ل = .$ $م$ (دفعہ ۲۳۸) ہیں

$ل$ ($و = .$ $م = .$ $گ = .$) ($م = .$ $ل = .$ $ف = .$) ($گ = .$ $ل = .$ $ف = .$)
 $ل$ ($و = .$ $م = .$ $گ = .$) ($م = .$ $ل = .$ $ف = .$)

$$+ گ ل + ف م + ج = .$$

ہے۔
اوپر کی مساوات سے ظاہر ہے کہ مخروطی میں $ل + م$ سے $ل + م$ کے
لحاظ سے خط (ل، م) کا قطب ان نقطوں کو ملانے والے خط پر ہے جن کی
مساواتیں

$$ل (ل + ل + م + گ) + م (م + ل + ب + م + ف)$$

$$+ گ ل + ف م + ج = .$$

$$اور ل (ل + ل + م + گ) + م (م + ل + ب + م + ف)$$

$$+ گ ل + ف م + ج = .$$

ہیں۔ پس مستلزمات ہو چکا۔

۲۲۵۔ ان تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو چار

دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کریں ہم محور ہوتے ہیں۔

چار دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرنے والے مخروطی کی عام مساوات

میں $ل + م = .$ ہے جہاں میں $ل + م = .$ اور میں $ل + م = .$ نظام کے کسی

دو مخروطیوں کی محاسی مساواتیں ہیں۔

اب میں $ل + م = .$ کا مرتب دائرہ

$$ل + ب - ۲ گ ل - ۲ ف م + ج (ل + ل + م)$$

$$- ل (ل + ل + ب - ۲ گ ل - ۲ ف م + ج (ل + ل + م)) = .$$

ہے جو مرکزاً ہم محور دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتا ہے جس کا بنیادی محور

$$۲ \left(\frac{گ}{ج} - \frac{گ}{ج} \right) + ۱ \left(\frac{ف}{ج} - \frac{ف}{ج} \right) - ۱ \left(\frac{ب}{ج} + \frac{ب}{ج} \right) + \frac{۱}{ج} = ۰$$

ہے۔
نظام کے مخروطیوں میں سے ایک، مکافی ہے اور اس مکافی کا مرکز
ہم محور نظام کا بنیادی محور ہے۔

۲۴۶۔ ان تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو تین دے
ہوئے خطوط مستقیم کو مس کریں ایک ہی دائرہ سے علی القوام
منقطع ہوتے ہیں۔

اس مخروطی کی عام مساوات جو تین دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس
کرتا ہے

$$لہ، س، ۱، لہ، س، ۲، لہ، س، ۳ = ۰ \dots (۱)$$

ہے جہاں لہ، لہ، لہ، کی کوئی قیمتیں ہو سکتی ہیں اور س، س، س، = ۰۔ (۳۳۵)

س، = کوئی تین مخروطی ہیں جو خطوط کو مس کرتے ہیں۔
اب دفعہ ۲۳۹ سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی مخروطی کے مرتب دائرہ کی
مساوات، لہ، لہ، ب وغیرہ کی رقوم میں درجہ اول کی ہوتی ہے۔

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ج، = ۰، ج، = ۰، ج، = ۰۔ علی الترتیب

$$س، = ۰، س، = ۰، س، = ۰۔ کے مرتب دائرے ہوں تو لہ، س، ۱،
+ لہ، س، ۲، لہ، س، ۳ = ۰ کے مرتب دائرہ کی مساوات$$

$$لہ، ج، + لہ، ج، + لہ، ج، = ۰$$

ہوگی۔

اب ایک دائرہ ایسا ہوگا جو کسی تین دائروں ج، =، ج، =، ج، =۔
 کو علی القوائم قطع کرے گا اور دفعہ ۸۱ میں معلوم شدہ شرط سے یہ ظاہر ہے کہ
 اگر ایک دائرہ تین دائروں ج، =، ج، =، ج، =۔ کو علی القوائم
 قطع کرے تو وہ نظام

$$لہ، ج، + لہ، ج، + لہ، ج، =$$
 کے تمام دائروں کو علی القوائم قطع کرے گا۔

بارہویں باب پر مثالیں

- ۱۔ ایک ناقص کے متعین مزدوج قطروں کے ایک زوج کے
 سروں پر ف، ف، د، د، ہیں۔ ف، د، کا لفاف معلوم کرو۔ نیز اس خط کا
 لفاف معلوم کرو جو ف، ف، اور د، د، کے وسطی نقطوں میں سے گزرتا ہے۔
- ۲۔ ا، ب، ا، ب، دو دے ہوئے محدود خطوط مستقیم ہیں، ایک
 خط ف، ف، ان خطوں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ نسبت ا، ف، : ف، ب،
 = ا، ف، : ف، ب، ثابت کرو کہ ف، ف، اس مکانی کو لف کرتا ہے
 جو دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔
- ۳۔ و، ا، ف، و، ب، ق، دو ثابت خطوط مستقیم ہیں۔ ا، ب،
 ثابت نقطے ہیں اور ف، ق، ایسے ہیں کہ مستطیل ا، ف، x ب، ق، متشکل
 ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق، ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔
- ۴۔ دے ہوئے نصف قطر کے دائرے ایک دے ہوئے خط مستقیم کو
 مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ دائروں کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کے

قطبی ایک مکافی کو لف کرتے ہیں۔

۵۔ مستقل نصف قطر کے دائروں کے مرکز ایک دے ہوئے دائرہ پر ہیں۔
ثابت کرو کہ ان دائروں کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا
لغاف ایک مخروطی ہے۔

۶۔ ایک دے ہوئے خط مستقیم پر کسی نقطہ ف میں سے ایک
خط ف ق کھینچا گیا ہے جو ف کے قطبی کے متوازی ہے جہاں یہ قطبی ایک
دے ہوئے مخروطی کے لحاظ سے لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان خطوط مستقیم کا
لغاف ایک مکافی ہے۔

۷۔ اگر کتاب کے ایک ورق کو اس طرح موڑا جائے کہ اس کا ایک
کونہ مقابل کے ضلع پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ سل کا خط ایک مکافی کو اس
کرے گا۔

۸۔ ایک ناقص اپنے مرکز کے گرد گردش کرتا ہے۔ ابتدائی محل کے
ساتھ تقاطع کے دتروں کا لغاف معلوم کرو۔

۹۔ مستقل مقدار کا ایک زاویہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک
ساق ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتی ہے اور اس کا سر ایک ثابت
خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک مکافی کو لف
کرتی ہے۔

۱۰۔ ناقص کے ایک وتر ف ق کا وسطی نقطہ ایک دے ہوئے
خط مستقیم پر ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ف ق ایک مکافی کو لف کرتا ہے۔

۱۱۔ ایک ناقص کے مزدوج قطروں کا کوئی زوج ایک ثابت دائرہ
سے جو ناقص کے ہم مرکز ہے نقطوں ف ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ
ف ق ایک متشابہ اور متشابہا واقع ناقص کو لف کرے گا۔

۱۲۔ اگر ایک خط مستقیم پر متعدد ثابت نقطوں سے عمود کھینچے جائیں
اور ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط مستقیم ایک
مخروطی کو لف کرے گا۔

۱۳۔ ایک مثلث کے ضلع (مدودہ بضرورت) ایک خط مستقیم سے نقطوں 'ل'، 'م'، 'ن' پر منقطع ہوتے ہیں۔ اگر 'ل'، 'م'، 'ن' مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ایک مکانی کو لف کرے گا۔

۱۴۔ ایک ثابت نقطہ میں سے جو ایک مکانی کے محور پر ہے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو منحنی کو 'ف'، 'ق' پر قطع کرتا ہے، اور وہ دائرہ جو 'ف'، 'ق' اور ماسکہ میں سے گزرتا ہے مکانی کو مکرر 'ف'، 'ق' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق' دوسرے مکانی کو لف کرتا ہے جس کا ماسکہ میں ہے۔

۱۵۔ اگر کسی مثلث 'ف'، 'ق' کا مرکز ہندسی جس کو 'ت'، 'م' زائد لا 'ما' = 'لا' میں کھینچا گیا ہو ثابت نقطہ (عہ، 'بہ') پر ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کے ضلع اس محروطی کو لف کریں گے جس کی مساوات

$$۴(۲ - لا) = (۳ - ما) = (۳ - لا + ۳ + ما - ۹ عہ - ۲ - لا) = ۲$$

ہے۔

$$۱۶۔ \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱ کا کوئی وتر 'ف'، 'ق' ایک ثابت نقطہ$$

(ف، گ) میں سے کھینچا گیا ہے۔ اگر 'ف'، 'ق' اور ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والا دائرہ ناقص کو مکرر 'ما'، 'لا' پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ 'ما'، 'لا' مکانی

$$= \left\{ \frac{۲ لا + ۲ ما}{۲} - (لا + ما) - (لا - ما) \right\} = ۰$$

کو مس کرے گا۔

۱۷۔ 'ما' = 'لا' = ۴۔ میں مثلث کھینچے گئے ہیں جن کے دو ضلع (لا - ۱۳) = 'ما' + 'لا' = ۲ کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کا لفاف معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ لفاف خود دائرہ ہے اگر چہ ۱۲ = ۱۲۔

۱۸۔ اُن تمام محزوطیوں کے متقارب جو دو دئے ہوئے خطوط مستقیم کو دئے ہوئے نقطوں پر مس کریں ایک مکانی کو لف کرتے ہیں۔

۱۹۔ ایک مکانی دو ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے اور ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرتب ایک محزوطی کو لف کرتا ہے۔

۲۰۔ ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دو طرف 'ق' ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے تو وتر 'س' میں ایک مکانی کو لف کرے گا۔

۲۱۔ ایک قائم زائد کسی نصف قطر کے ایک دائرہ سے منقطع ہوتا ہے اور اس دائرہ کا مرکز زائد کے محوروں میں سے ایک پر ایک ثابت نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو نقاط تقاطع کو ملاتے ہیں یا تو زائد کے ایک محور کے متواری ہیں یا ایک ثابت مکانی کے مماس ہیں۔

۲۲۔ ناقصوں کا ایک نظام ہے جن کے محور مقدار اور سمت میں دئے گئے ہیں اور مرکز ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کا لقا ایک مکانی ہے۔

۲۳۔ دو مساوی دائروں میں سے ایک ثابت ہے اور دوسرا ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کا بنیادی محور ایک محزوطی کو جس کا ماسک ثابت نقطہ ہے لف کرتا ہے۔

۲۴۔ اگر ایک ناقص کے مرکز سے سمتی نصف قطروں کے زوج محور اعظم کے ساتھ ایسے زاوے بناتے ہوئے کھینچے جائیں جن کا مجموعہ ایک قائمہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ اُن وتروں کے قطبیوں کا طریق جو ان کے سرونگو ملاتے ہیں ایک ہم مرکز زائد ہے اور وتروں کا لقا ایک قائم زائد ہے۔

۲۵۔ ایک محزوطی کے مساوی محزوج قطروں میں سے ایک کے کسی نقطہ سے ایک محور کے سروں تک خطوط کھینچے گئے ہیں اور یہ خطوط

منحنی کو مکرر نقطوں 'ف' 'ق' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' کا لُفاف ایک قائم زائد ہے۔

۲۶۔ ایک ناقص کا دو ہر اُنعین 'ف' 'ن' ہے جو مرکز 'ج' (۳۳۸)

اور ایک راس سے مساوی فاصلہ پر ہے۔ اگر 'ف' 'ن' 'ج' میں سے مکانی کھینچ جائیں تو ثابت کرو کہ مکانی اور ناقص کے دیگر نقاط تقاطع کو ملانے والے وتر ایک دوسرے ناقص کو مس کریں گے جو ہر طرح دئے ہوئے ناقص کے مساوی ہوگا۔

۲۷۔ دو دئے ہوئے متوازی خطوط مستقیم ایک خط سے جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے نقطوں 'ف' 'ق' پر منقطع ہوتا ہے۔ اُس دائرہ کا لُفاف معلوم کرو جو 'ف' 'ق' کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو۔

۲۸۔ ایک مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام پر نہیں قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کا لُفاف دوسرا مخروطی ہے۔

۲۹۔ ایک مکانی کا ایک وتر ایسا ہے کہ وہ دائرہ جو اس وتر کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو منحنی کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ایک دوسرے مکانی کو لُف کرتا ہے۔

۳۰۔ ایسے مکانی کھینچے گئے ہیں جن میں راس 'ا' مشترک ہے اور جو ایک ثابت نقطہ 'ف' میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تمام مکانیوں کے مربتوں کا لُفاف ایک مکانی ہے جس کے وتر خاص کا طول 'ا' 'ف' ہے۔

۳۱۔ ایک مکانی کے دو عماس کھینچے گئے ہیں، اگر ان عماسوں کے درمیانی داخلی اور خارجی زاویوں کے ناصف مخروطی کے دو دئے ہوئے قطروں کے متوازی ہوں تو وتر تماس ایک زائد کو لُف کرے گا جس کے متقارب قطروں کے مزدوج ہوں گے۔

۳۲۔ ایک دئے ہوئے مخروطی 'س' کے لحاظ سے ایک نقطہ

ف کا قطبی دو ثابت خطوط مستقیم (ب، ج) کو ق، ق پر قطع کرتا ہے۔
اگر ا، ف، ق، ق کی تصفیہ کرے تو ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک مخروطی
ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ق، ق کا لغاف دوسرا مخروطی ہے۔

۳۳۔ اگر ایک مخروطی پر دو نقطے ایسے لیے جائیں کہ ایک ماسک
میں سے ان کے فاصلوں کا اوسط موسیقی مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ان کو
ملانے والا وتر ہمیشہ ایک مخروطی کو مس کرے گا جس کا ایک ماسک میں ہوگا۔
۳۴۔ ایک مکانی کے اس وتر کا لغاف جس کے محاذی ماسک پر
ایک قائمہ زاویہ بنے ناقص

$$(لا - ۱۳) + ۲ = ۸$$

ہوگا اگر مکانی کی مساوات ۲ - ۱۴ = ۰ ہو۔
۳۵۔ مخروطی کا ایک وتر منحنی کے ایک دے ہوئے نقطہ پر مستقل
زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ایک مخروطی کو جو دے ہوئے مخروطی سے
ساتھ دو ہر اتاس رکھتا ہے لف کرتا ہے۔

(۳۳۹)

۳۶۔ ایک ثابت نقطہ میں سے ایک دائرہ کے دو وتر ایک
دوسرے کے علی القواہم لکھنے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس چار ضلعی کا
ہر ضلع جو ان وتروں کے سروں کو ملانے سے بنتا ہے ایک مخروطی کو
لف کرتا ہے جس کے ماسکے ثابت نقطہ اور دائرہ کا مرکز ہیں۔

۳۷۔ ایک نقطہ میں سے اس کے قطبی (بلحاظ ایک مکانی کے)
پر عمود کھینچا گیا ہے جو مکانی کے محور سے ج پڑتا ہے۔ ثابت کرو کہ
مکانی کے وہ وتر جن کے محاذی میں پر قائمہ زاویہ بنے سب کے سب
ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں جس کا مرکز ج ہے۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے وتر جن کے محاذی ایک
ثابت نقطہ پر قائمہ زاویہ بنے دوسرے مخروطی کو لف کرتے ہیں۔
نیز ثابت کرو کہ ولغاف کا ماسک ہے اور و کے متناظر مرتب
و کا قطبی (بلحاظ ابتدائی مخروطی) ہے۔

ثابت کرو کہ متشابه اور متشابه واقع ہم مرکز محزوطیوں کے متناظر لفاف ہم ماسکی ہوتے ہیں۔

۳۹۔ ایک ثابت خط مستقیم ہم ماسکی محزوطیوں کے ایک نظام کے ایک محزوطی سے نقطوں 'ف' 'ق' پر ملتا ہے۔ 'ف' اور 'ق' پر عماد کھینچے گئے ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع سے کھینچے ہوئے دودھ سرے عمادوں کو ملانے والا خط 'س' 'س' ہے۔ ثابت کرو کہ 'س' 'س' کا لفاف ایک مکافی ہے جو محزوروں کو مس کرتا ہے۔

۴۰۔ ایک خط دودھے ہوئے دائروں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ خط کے وہ حصے جو دائروں سے منقطع ہوتے ہیں مستقل نسبت میں ہیں ثابت کرو کہ خط ایک محزوطی کو لف کرے گا جو ایک مکافی ہوگا اگر نسبت ایک کے مساوی ہو۔

۴۱۔ ایک قائم زاویہ کے وتر جو ایک دوسرے کے علی القواوم ہیں ایک ثابت نقطہ و پر اپنے محاذی قائمہ زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ و کے قطبی پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۴۲۔ مکافی $MA = 12$ کے دو وتر 'ف' 'ق' 'ر' 'س' میں سے گزرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں اور یہ وتر ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{4}$ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط 'ف' 'ق' ہمیشہ ناقص

$$(12 - 1) + 8 = 12$$

کو مس کرے گا۔

۴۳۔ ایک محزوطی پر نقطوں کے ایسے زوج لیے گئے ہیں کہ

وہ خطوط جو ان نقطوں کو ایک دے ہوئے نقطہ سے ملاتے ہیں ایک دے ہوئے خط مستقیم کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ وتر جو نقطوں کے کسی ایسے زوج کو ملاتا ہے ایک محزوطی کو لف کرتا ہے جس کا مرتب دائرہ ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۴۴۔ مخروطی مس کے وتر جو ایک ثابت نقطہ پر اپنے محاذی قائمہ زاویہ بناتے ہیں مخروطی مس کو لف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مس چار ثابت نقطوں میں سے گزرے تو مس چار ثابت خطوط مستقیم کو مس کرے گا۔
 ۴۵۔ ایک مخروطی چار ثابت نقطوں (ا، ب، ج، د) میں سے گزرتا ہے اور ب اور ج پر اس کے حماس (ج، ا اور ج، ب) (ممدودہ) سے نقطوں ف، ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف، ق ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جو ب، ا، ج کو مس کرتا ہے۔

۴۶۔ اگر ایک وتر ایک دائرہ کو دو ایسے نقطوں (ا، ب) پر قطع کرے کہ مستطیل و (ا، ب) مستقل ہو جہاں و ایک ثابت نقطہ ہے تو ثابت کرو کہ وتر کا لغاف ایک مخروطی ہے جس کا مسکہ وہ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر و (ا، ب) مستقل ہو تو وتر ایک مکانی کو لف کرے گا۔

۴۷۔ ایک دائرہ کے ایک قطر پر دو نقطے (ا، ب) مرکز سے مساوی فاصلہ پر لیے گئے ہیں اور وہ خطوط جو ان نقطوں کو دائرہ کے کسی نقطہ ف سے ملاتے ہیں دائرہ کو مرکز ق، مس پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق، س ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جس کا امدادی دائرہ دیا ہوا دائرہ ہے۔

۴۸۔ (ا، لا، ب، ما، ا)۔ کے وتر جو نقطہ (ع، ب) پر اپنے محاذی قائمہ زاویہ بناتے ہیں ایک مخروطی کو لف کرتے ہیں جس کے اعظم امدادی دائرے کی مساوات (ا، ب) (لا، ا، ما) - ۲ ب ع لا - ۲ ب ع ا + ۲ ب ع ا - ۱ = ۱۔

ہے۔

۴۹۔ دو دائرے ہوئے دائروں میں سے ایک پر نقطہ ف اور دوسرے نقطہ ق لیے گئے ہیں ایسے کہ ف، ق اور ق، پ کے حماس عمود واریں۔ ثابت کرو کہ ف، ق ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔

۵۰۔ ایک مخروطی کو ایک دائرے ہوئے شلت میں کھینچا گیا ہے اور مخروطی کے محوروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

تیرہواں باب

سہ خطی محدود

۲۴۷۔ فرض کرو کہ کوئی تین خطوط مستقیم لیے گئے ہیں جو ایک نقطہ پر نہیں ملتے اور فرض کرو کہ ان خطوط مستقیم سے مثلث (ج ب ج) بنتا ہے۔ فرض کرو کہ اضلاع ج ب ج، ج ا ج، ا ب ج سے کسی نقطہ ف کے عمودی فاصلے علی الترتیب ع، ع، ع، جہ ہیں، تب ع، ع، ع جہ کو مثلث ا ب ج کے حوالے سے نقطہ ف کے سہ خطی محدود کہا جاتا ہے۔ ہم ع، ع، ع جہ کو مثبت سمجھیں گے جبکہ وہ اُسی سمت میں کھینچے گئے ہوں جس میں حوالے کے مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمود کھینچے جاتے ہیں۔

ان عمودی فاصلوں میں سے دو کسی نقطہ کے محل کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں، اس لیے ان تین فاصلوں میں کوئی رشتہ موجود ہونا چاہئے۔ یہ رشتہ

$$1 + ع + ب + ج = 2 \Delta$$

ہے جہاں Δ مثلث ا ب ج کا رقبہ ہے۔ یہ رشتہ مثلث کے اندر کسی نقطہ کے لیے صریحاً درست ہے کیونکہ مثلث ب ج ج، ج ا ج، اور ا ب ج باہم ملکر مثلث ا ب ج کے مساوی ہیں۔ اگر عمودوں کی علامتوں کا لحاظ کیا جائے تو یہ بھی آسانی

معلوم ہو سکتا ہے کہ رشتہ بالا مثلث کے باہر یا ضلعوں کے اوپر کسی نقطہ کے لیے درست ہے اگر مختلف صورتوں کے لیے مختلف شکلیں کھینچ لی جائیں۔ پس ثابت ہوا کہ رشتہ $1e + b + c = \Delta 2$ عام طور پر درست ہے۔

۲۴۸۔ رشتہ $1e + b + c = \Delta 2$ کے ذریعہ کسی مساوات کو e, b, c میں متجانس بنایا جاسکتا ہے، اور جب یہ ہو جائے تو ہم نقطہ کے اصلی محوروں کو استعمال کرنے کی بجائے ان کے متناسب کوئی مقداریں استعمال کر سکتے ہیں کیونکہ اگر کوئی قیمتیں e, b, c ایک متجانس مساوات کو پورا کریں تو قیمتیں $k e, k b, k c$ بھی اس مساوات کو پورا کریں گی۔

۲۴۹۔ اگر مثلث کے اندر کسی مبداء کو لیا جائے تو اس نقطہ میں سے گزرنے والے کسی قائم محوروں کے حوالے سے مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں شکل (۳۴۲)

$$- \text{لاجم طم} - \text{ماجب طم} + \text{ع} = 0$$

$$- \text{لاجم طم} - \text{ماجب طم} + \text{ع} = 0$$

$$- \text{لاجم طم} - \text{ماجب طم} + \text{ع} = 0$$

میں لکھی جاسکتی ہیں جہاں $\text{جم}(\text{طم}) = \text{جم}(\text{ا})$ ، $\text{جم}(\text{طم}) = \text{جم}(\text{ب})$

اور $\text{جم}(\text{طم}) = \text{جم}(\text{ج})$

[ہم نے ان مساواتوں کو اس طرح لکھا ہے کہ مستقل رقمیں

مثبت ہیں، اس کی وجہ یہ ہے کہ مثلث کے اندر کسی نقطہ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود سب کے سب مثبت ہوتے ہیں]۔

پس [دفعہ ۱] حاصل ہوتا ہے

عہ = ع - لاجم طہ - ماجب طہ ،

بہ = ع - لاجم طہ - ماجب طہ ،

جہ = ع - لاجم طہ - ماجب طہ ،

ان مساواتوں کی مدد سے ہم کسی مساوات کو جو سہ خطی محدود

میں ہو کارٹیزی محدودوں کی مساوات میں تحویل کر سکتے ہیں۔

۲۵۰۔ درجہ اول کی ہر مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔
فرض کرو کہ مساوات

$$ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰$$

ہے۔ اگر ہم عہ ، بہ ، جہ کی بجائے ان قیمتوں کو درج کریں جو دفعہ سابق میں حاصل ہوئی ہیں تو کارٹیزی محدودوں کی مساوات جو اس طرح حاصل ہوگی صرف درجہ اول کی ہوگی۔ اس لیے طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۲۵۱۔ ہر خط مستقیم کو درجہ اول کی ایک مساوات سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

یہ ثابت کرنا کافی ہو گا کہ ل ، م ، ن کی ایسی قیمتیں ہمیشہ معلوم ہو سکتی ہیں کہ مساوات ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ جو ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے کسی دو نقطوں کے محدودوں سے پوری ہو۔
اگر نقطوں کے محدود (عہ ، بہ ، جہ) اور (عہ ، بہ ، جہ) ہوں تو

$$ل\text{ عہ} + م\text{ بہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

$$ل\text{ عہ} + م\text{ پہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

حاصل ہونا چاہئے اور صریحاً ل، م، ن کی قیمتیں ہمیشہ معلوم کیجا سکتی ہیں جو ان دو مساواتوں کو پورا کریں۔

۲۵۲۔ دو دے ہوئے نقطوں میں سے گزرنیوالے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دے ہوئے نقطوں کے محدود (عہ، بہ، جہ) اور (عہ،

بہ، جہ) ہیں۔ کسی خط مستقیم کی مساوات

$$ل\text{ عہ} + م\text{ بہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

ہے۔ نقطے (عہ، بہ، جہ) اور (عہ، پہ، جہ) اس خط پر ہوں گے اگر

$$ل\text{ عہ} + م\text{ بہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

$$ل\text{ عہ} + م\text{ پہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

ان مساواتوں سے ل، م، ن کو سا قط کرنے پر مطلوبہ مساوات

$$۰ = \begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ} & \text{پہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۳۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین دے ہوئے نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں۔

فرض کرو کہ تین دے ہوئے نقطے (عہ، پہ، جہ)، (عہ، بہ، جہ) اور

(عہ، بے، جہ) ہیں۔ اگر یہ نقطے خط مستقیم

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ پر ہیں تو

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰

پس ل، م، ن کو سا قف کرنے پر مطلوبہ شرط

$$= \begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۴۔ دو دے ہوئے خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع معلوم کرنا۔ (۳۳۳)

فرض کرو کہ دے ہوئے خطوط مستقیم کی مساواتیں

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰

اور

ہیں۔

اُس نقطہ پر جو دونوں خطوں میں مشترک ہے

$$\frac{\text{عہ}}{\text{م} - \text{ن}} = \frac{\text{بہ}}{\text{ن} - \text{ل}} = \frac{\text{جہ}}{\text{ل} - \text{م}} \dots (۱)$$

ان مساواتوں سے محدودوں کی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں۔

اگر اصلی قیمتیں مطلوب ہوں تو کسروں (۱) کے نسب نماؤں

اور شمار کنندوں کو علی الترتیب ۱، ۲، ۳ سے ضرب دیکر

جمع کرو، تب ہر کسر

$\Delta 2$			۱ عہ + ب بہ + ج جہ
ل	م	ن	(م ن - م ن) + ب (ن ل - ن ل) + ج (ل م - ل م)
ل	م	ن	
ل	م	ن	

کے مساوی ہے۔
یہ خطوط حوالے کے مثلث سے محدود فاصلہ پر ایک نقطہ میں نہیں
ملیں گے یعنی وہ متوازی ہونگے اگر

$$\begin{vmatrix} ل & م & ن \\ ل & م & ن \\ ل & م & ن \end{vmatrix} = 0$$

۲۵۵۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین خطوط مستقیم ایک نقطہ پر
فرض کرو کہ خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$ل_1 عہ + م_1 بہ + ج_1 جہ = 0$$

$$ل_2 عہ + م_2 بہ + ج_2 جہ = 0$$

$$ل_3 عہ + م_3 بہ + ج_3 جہ = 0$$

ہیں۔ یہ خطوط ایک نقطہ پر ملیں گے اگر اوپر کی مساواتیں سب کی سب

عہ، بہ، جہ کی اُن ہی قیمتوں سے پوری ہوں۔ پس عہ، بہ، جہ کو
ساقط کرنے سے مطلوبہ شرط

$$\begin{vmatrix} ل_1 & م_1 & ج_1 \\ ل_2 & م_2 & ج_2 \\ ل_3 & م_3 & ج_3 \end{vmatrix} = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔

(۳۴۵) ۲۵۶۔ اگر کارٹیزی محدودوں میں ایک خط مستقیم کی مساوات
 $لا + ب + ج = ۰$ ہو تو وہ مقطوع جو خط محوروں پر قطع کرتا ہے
 علی الترتیب - $\frac{ج}{ب}$ ، - $\frac{ج}{ب}$ ہیں۔ پس اگر $لا$ اور $ب$ بہت چھوٹے
 ہوں تو خط مبدا سے بہت دور فاصلہ پر واقع ہوگا۔ انتہا میں خط کی مساوات
 شکل

$$۰ = ج + لا + ۰ \times ۰$$

اختیار کریں گی۔ پس لا انتہاؤں میں خط مستقیم کی مساوات جس کو بالعموم
 لاتناہی پر کا خط کہتے ہیں

$$۰ = ج + لا + ۰ \times ۰$$

۴۔

جب لاتناہی پر کے خط کو دوسرے جملوں کے ساتھ جن میں لا اور
 ما ہوں استعمال کرنا پڑتا ہے تو اس کو صرف ج = ۰ لکھتے ہیں۔
 سہ خطی محدودوں میں لاتناہی پر کے خط کی مساوات

$$۱ = ج + ب + ج + ج = ۰$$

ہے۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدود $ج$ ، $ب$ ، $ج$ ، $ج$ ہو تو غیر متغیر
 رشتہ سے $ک (۱ = ج + ب + ج + ج) = ۵۲$ حاصل ہوتا ہے یا

$$۱ = ج + ب + ج + ج = \frac{۵۲}{ک}$$

پس اگر $ک$ لا انتہا بڑا ہو جائے تو انتہا میں رشتہ $۱ = ج + ب + ج + ج = ۰$
 حاصل ہوتا ہے۔ یہ ایک خطی رشتہ ہے جو محدود مقدا روں سے جو کسی
 لا انتہاؤں نقطہ کے محدودوں کے متناسب ہوں پورا ہوتا ہے لیکن وہ
 ان محدودوں یا مقدا روں سے پورا نہیں ہوتا جو حوالے کے مثلث سے محدود
 فاصلہ پر کے کسی نقطہ کے محدودوں کے متناسب ہوں۔

۲۵۷۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دے ہوئے خطوط مستقیم متوازی ہوں۔
فرض کرو کہ خطوط کی مساواتیں

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

ہیں۔ اگر یہ خطوط متوازی ہیں تو ان کا نقطہ تقاطع مبدا سے لامتناہی فاصلہ پر ہوگا اور اس لیے اس کے محدود رشتہ

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

کو پورا کریں گے۔

اوپر کی تین مساواتوں سے ع، ب، جہ کو سا قح کرنے پر مطلوبہ

مساوات

(۳۴۶)

$$= \begin{vmatrix} ل & م & ن \\ ل & م & ن \\ ل & م & ن \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۸۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ایک دے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دے ہوئے خط مستقیم کے متوازی ہو۔

فرض کرو کہ دے ہوئے خط کی مساوات

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

ہے۔ مطلوبہ خط اس خط سے وہاں ملتا ہے جہاں

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

اس لیے مطلوبہ مساوات کی شکل

ل عہ + م بہ + ن جہ + لہ (ل عہ + ب بہ + ج جہ) = ۰
ہے۔ اگر دئے ہوئے نقطہ کے محدود ف، گ، ہ ہوں تو
ل ف + م گ + ن ہ + لہ (ل ف + ہ گ + ج جہ) = ۰
بھی حاصل ہونا چاہئے۔ اس لیے

$$\frac{\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} + \text{لہ}}{\text{ل ف} + \text{م گ} + \text{ن ہ} + \text{لہ}} = \frac{\text{ل عہ} + \text{ب بہ} + \text{ج جہ}}{\text{ل ف} + \text{ہ گ} + \text{ج جہ}}$$

اس کی ایک مخصوص اور مفید صورت اس خط مستقیم کی مساوات
معلوم کرتا ہے جو حوالے کے مثلث کے ایک راس میں سے گزرے
اور ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے متوازی ہو۔

اگر ل راس ہے تو اس کے محدود (ف، گ، ہ) ہیں اور مساوات
(م ل - ل ب) بہ + (ن ل - ل ج) جہ = ۰
ہو جاتی ہے۔

۲۵۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دئے ہوئے خطوط مستقیم

ایک دوسرے پر عمود ہوں۔
فرض کرو کہ خطوط کی مساواتیں

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} = ۰$$

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} = ۰$$

ہیں۔ اگر ان مساواتوں کو دفعہ ۲۴۹ میں حاصل شدہ مساواتوں کے
ذریعہ کارٹینی محدودوں میں بیان کیا جائے تو وہ

$$\text{لا} (\text{ل جم طہ} + \text{م جم طہ} + \text{ن جم طہ}) + \text{ما} (\text{ل جب طہ} + \text{م جب طہ} + \text{ن جب طہ})$$

$$- \text{ل ع} - \text{م ع} - \text{ن ع} = ۰$$

اور (۳۴۷) لا (ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) + ما (ل جب طہ + م جم طہ + ن جب طہ)

- ل ع - م ع - ن ع = ۰

ہو جاتی ہیں۔ اس لیے یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں گے اگر

(ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) (ل جم طہ + م جم طہ + ن جب طہ)

+ (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ) (ل جب طہ + م جم طہ + ن جب طہ)

+ ن جب طہ = ۰

یعنی اگر

ل ل + م م + ن ن + (ل م + ل م) جم (طہ طہ) + (م ن

+ م ن) جم (طہ طہ) + (ن ل + ن ل) جم (طہ طہ) = ۰

لیکن جم (طہ طہ) = جم ۱، جم (طہ طہ) = جم ۲

اور جم (طہ طہ) = جم ج

اس لیے مطلوبہ شرط

ل ل + م م + ن ن - (م ن + م ن) جم ۱ - (ن ل + ن ل) جم ۲

- (ل م + ل م) جم ج = ۰

ہے۔ اگر خطوط مستقیم مساوات

ع ۱ + و ۲ + ط ۳ + ع ۴ + و ۵ + ع ۶ + و ۷ + ع ۸ + و ۹ + ع ۱۰ = ۰

سے معلوم ہوں تو اوپر کی شرط سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عمود وار ہونی کی شرط

- ع ۱ + و ۲ - ع ۳ - و ۴ + ع ۵ - و ۶ + ع ۷ - و ۸ + ع ۹ - و ۱۰ + ع ۱۱ = ۰

۲۶۰۔ ایک دے ہوئے خط مستقیم سے ایک دے ہوئے
نقطہ کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا۔
فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

ل ع + م + ن جہ = ۰
ہے۔ اس مساوات کو کارٹیزی محدودوں میں بیان کرنے سے مساوات
لا (ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) + ما (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ)
ل ع - م ع - ن ع = ۰

حاصل ہوتی ہے۔
اس خط سے کسی نقطہ کا عمودی فاصلہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ
اس نقطہ کے محدودوں کو مساوات کی دائیں جانب کے جملہ میں درج
کر کے لا اور ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر المربع سے
تقسیم کیا جائے۔ اس کے بعد اگر اس کو پھر سہ خطی محدودوں میں بیان
کیا جائے تو نقطہ (ف، گ، ص) سے دے ہوئے خط پر عمود کا طول
(۳۴۸) ل ف + م گ + ن ص

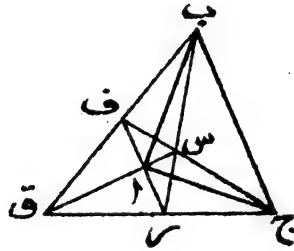
لا (ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) + ۲ (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ)
حاصل ہوگا۔ اس کسر کا نسب نما

ل + م + ن + ۲ م ن جم (طہ - طہ) + ۲ ن ل جم (طہ - طہ) + ۲ ل م جم (طہ - طہ)
یا ل + م + ن - ۲ م ن جم - ۲ ن ل جم - ۲ ل م جم ج
کا جذر المربع ہے۔
پس عمود کا طول

ل ف + م گ + ن ہ

آل + م + ن - ۲م ن جم - ۱- ۲ن ل جم ب - ۲ل م جم ج

۲۶۱ - ثابت کرو کہ کسی چار نقطوں کے محدود شکل \pm ف
 \pm گ \pm ہ میں بیان کئے جاسکتے ہیں -
 فرض کرو کہ چار نقطے 'ف' 'ق' 'س' 'ہ' ہیں -



ان چار نقطوں میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط اور دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط کے نقطہ تقاطع کو چار زاویوں کا وتری نقطہ کہتے ہیں - اس طرح تین وتری نقطے ہوتے ہیں 'ب' 'ج' (شکل) -
 فرض کرو کہ 'ا' 'ب' 'ج' کو حوالہ کا مثلث قرار دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ 'ف' کے محدود 'گ' 'ہ' ہیں -

تب 'ا' 'ف' کی مساوات $\frac{ف}{ا} = \frac{ب}{ج}$ ہوگی -

پنل 'ا' 'ب' 'س' 'ا' 'ج' 'ا' 'ف' موسیقی ہے [دفعہ ۵۹] اور 'ا' 'ب'

'ا' 'ج' کی مساویں جہ '۔' 'ہ' ہیں اور 'ا' 'ف' کی مساوات $\frac{ف}{ا} = \frac{ب}{ج}$ معلوم

ہوئی ہے۔ اس لیے اس کی مساوات $\frac{ج}{جھ} = \frac{ج}{جھ}$ ہوگی۔ [دفعہ ۵۶]

ج ف کی مساوات $\frac{ج}{جھ} = \frac{ج}{جھ}$ ہے

اس لیے اس اور ج ف جس نقطہ پر متقاطع ہوتے ہیں وہاں یعنی
میں پر

$$\frac{ج}{جھ} = \frac{ج}{جھ} = \frac{ج}{جھ}$$

اس لیے میں کے محور د ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

اسی طرح میں کے محور د، ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

اسی طرح ق کے محور د، ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

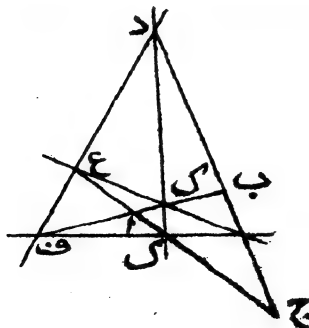
۲۶۲۔ ثابت کرو کہ کسی چار خطوط مستقیم کی مساواتیں

شکل ل ع ہ م بہ \pm ن جہ = ۰ میں بیان ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ د ع ف، د گ، ع گ، ہ گ، چار خطوط ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب ج وہ مثلث ہے جو چار ضلعی کے وتروں ف، گ،

ع، گ، اور د ہ سے بنا ہے۔ مثلث ا ب ج کو حوالے کا مثلث قرار دو۔



(۳۵۰)

فرض کرو کہ د ع ف کی مساوات ل ع + م بہ + ن جہ = ۰ ہے۔
تب ا د کی مساوات م بہ + ن جہ = ۰ ہے۔

چونکہ نیل ا د ' اب ' اھ ' ا ج موسیقی ہے [دفعہ ۵۹] اور

ا د ' اب ' ا ج کی مساواتیں علی الترتیب م بہ + ن جہ = ۰، جہ = ۰،
بہ = ۰ ہیں اس لیے اھ کی مساوات [دفعہ ۵۶] م بہ - ن جہ = ۰ ہے۔
چونکہ ع و د نقطہ ہے جو بہ = ۰، ل ع + ن جہ = ۰ سے حاصل
ہوتا ہے اور ھ وہ نقطہ ہے جو عہ = ۰، م بہ - ن جہ = ۰ سے حاصل ہوتا
ہے اس لیے ھ ع کی مساوات

ل ع - م بہ + ن جہ = ۰
ہے۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ د گ کی مساوات
ل ع + م بہ + ن جہ = ۰
ہے اور ف ھ کی مساوات
ل ع + م بہ - ن جہ = ۰
ہے۔

مثالیں

۱۔ حوالے کے مثلث کے تین زاویوں کے ناصفوں کی مساواتیں

بہ - جہ = ۰، جہ - عہ = ۰، اور عہ - بہ = ۰ ہوتی ہیں۔

۲۔ حوالے کے مثلث کے خطوط وسطی کی مساواتیں ب بہ - ج جہ = ۰

ج جہ - ا عہ = ۰، ا عہ - ب بہ = ۰ ہوتی ہیں۔

۳۔ اگر حوالے کے مثلث کے ضلعوں کے تقاطع وسطی ا ب ' ج ہوں تو

ب ج ' ج ا ' ا ب کی مساواتیں ب بہ + ج جہ - ا عہ = ۰، ج جہ

+ ا عہ - ب بہ = ۰، اور ا عہ + ب بہ - ج جہ = ۰ ہونگی۔

۴۔ اس خط کی مساوات جو ایک مثلث کے اندر دنی اور بیرونی دائروں کے

مرکزوں کو ملاتا ہے

ع (جم ب - جم ج) + ح (جم ج - جم ا) + ج (جم ا - جم ب) = ۰ ہوتی ہے۔

۵۔ ان چار دائروں کے مرکزوں کے محدود معلوم کرو جو حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔ نیز ان چھ خطوں کے نقاط وسطی کے محدود معلوم کرو جو ان چار مرکزوں کو ملاتے ہیں اور ثابت کرو کہ یہ چھ نقطے سب کے سب مساوی
 $ا + ب + ج = ح$ ہوتے ہیں۔

۶۔ اگر ا، ب، ج، د، مثلث ا ب ج کے ضلعوں سے (۳۵۱)

ا، ب، ج پر ملیں اور اگر ب، ج، ب سے ف، ب، ج، ا سے ق پر ملے، اور ا، ب، ج سے ر پر ملے تو ثابت کرو کہ 'ق'، 'ر' ایک خط مستقیم ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ ب، ق، ج، ر، ا، ایک نقطہ ف پر ملتے ہیں، ج، ر، ا، ف، ب، ب، ایک نقطہ ق پر ملتے ہیں، اور ا، ف، ب، ق، ج، ج، ایک نقطہ ر پر ملتے ہیں۔

۷۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے نقاط وسطی ا، ب، ج میں سے خطوط ا، ف، ب، ق، ج، ر، ایسے کھینچے جائیں کہ وہ ضلعوں پر عمود اور ان کے مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ ا، ف، ب، ق، ج، ر، ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۸۔ اگر حوالے کے مثلث کے راسوں سے کسی خط مستقیم پر عمود ف، ق، ر ہوں تو ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کی مساوات ا، ف، ب، ق، ج + ج، ر = ۰ ہے۔

۹۔ اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ متناظر راسوں کو ملانے والے خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ متناظر ضلعوں کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔

[فرض کرو کہ مثلثوں میں سے ایک مثلث (ب ج کے حوالے سے نقطہ کے محدود ف، گ، ہ ہیں۔ تب دوسرے مثلث (ب ج کے راستے محدود علی السریب (ف، گ، ہ) (ف، گ، ہ) اور (ف، گ، ہ) لیے جاسکتے ہیں۔ ب ج، ب ج کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ع = ۰ اور ج = ۰۔

$$+ \frac{ج}{ہ} = ۰ \text{ اس لیے متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع خط } ف - ع + \frac{ع}{ہ} = ۰ \text{ پر واقع ہیں۔}$$

۱۰۔ مساواتوں ع ج = ۱ + ب ج + ج ج = ۰ اور ع ۱ + ب ج = ۰ سے جو خطوط حاصل ہوتے ہیں متوازی ہوتے ہیں۔

۱۱۔ ایک مثلث کے زاویوں کے تین بیرونی ناصف مقابل کے ضلعوں سے تین ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک خط مستقیم میں ہوتے ہیں اور یہ خط حائل مرکز اور اندرونی مرکز کو ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

۱۲۔ خطوط ل ع ± م ± ن ج = ۰ سے جو چار ضلعی بنتا ہے اسکے تین وتروں کے نقاط وسطی میں سے گزرنیوالے خط کی مساوات $\frac{ل}{ا} + \frac{م}{ب} + \frac{ن}{ج} = ۰$ ہوتی ہے۔

۱۳۔ اگر مثلث (ب ج کا حائل مرکز س، مرکز عمودی و، نقطہ مرکزی ن، اور مرکز ہندسی ث ہو تو ثابت کرو کہ خط س و ن گ کی مساوات ع ج ب ۲ (ج ب - ج) + ب ج ۲ (ب ج - ج) + ج ج ۲ (ج ب - ب) = ۰۔

۲۶۳ - سہ خطی محدودوں میں درجہ دوم کی عام مساوات (۳۵۲)

۶ عہ + دہ + ط جہ + ۲ عہ + ۲ وجہ + ۲ ط عہ بہ =
ایک مخروطی کی مساوات ہوگی کیونکہ اگر اس کو کارٹیزی محدودوں میں بیان
کیا جائے تو درجہ دوم کی مساوات حاصل ہوگی۔
نیز چونکہ مساوات میں پانچ غیر تابع مستقل ہیں اس لیے ان کو
اس طرح متعین کیا جاسکتا ہے کہ مساوات سے تعبیر شدہ منحنی پانچ
دے ہوئے نقطوں میں سے گزرے اور اس لیے وہ کسی دے ہوئے
مخروطی پر منطبق ہوگا۔

۲۶۴۔ مخروطی کے کسی نقطہ پر ماس کی مساوات معلوم کرنا۔
فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$۶ (عہ بہ) = ۶ عہ + دہ + ط جہ + ۲ عہ + ۲ وجہ + ۲ ط عہ بہ =$$

ہے اور فرض کرو کہ اس پر دو نقطوں کے محدود (عہ بہ، جہ) اور (عہ بہ، جہ)
ہیں۔

مساوات

$$۶ (عہ - عہ) (عہ - عہ) + د (بہ - بہ) (بہ - بہ) + ط (جہ - جہ) (جہ - جہ) + ۲ (بہ - بہ) (بہ - بہ) + ۲ (جہ - جہ) (جہ - جہ) + ۲ ط (عہ - عہ) (عہ - عہ) = ۶ (عہ بہ) (عہ بہ) + د (بہ بہ) (بہ بہ) + ط (جہ جہ) (جہ جہ) + ۲ (بہ بہ) (بہ بہ) + ۲ (جہ جہ) (جہ جہ) + ۲ ط (عہ بہ) (عہ بہ)$$

عہ بہ، جہ میں فی الحقیقت درجہ اول کی مساوات ہے اور اس لیے
وہ کسی خاص خط مستقیم کی مساوات ہے۔

یہ مساوات قیمتوں عہ = عہ بہ = بہ = جہ اور نیز قیمتوں
عہ = عہ بہ = بہ = جہ سے پوری ہوتی ہے۔ اس لیے وہ اس
خط کی مساوات ہے جو نقطوں (عہ بہ، جہ) (عہ بہ، جہ) کو ملاتا ہے۔
اب فرض کرو کہ نقطہ (عہ بہ، جہ) نقطہ (عہ بہ، جہ) کی جانب
حرکت کر کے بالآخر اس پر منطبق ہوتا ہے تو (عہ بہ، جہ) پر کے ماس

کی مساوات

$$۶ \text{ عہ عہ} + ۵ \text{ ید ید} + ۴ \text{ جہ جہ} + ۳ \text{ عہ (بہ جہ + جہ ید)} \\ + ۲ \text{ و (جہ عہ + عہ جہ)} + ۱ \text{ ط (عہ ید + ید عہ)} = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔
تفریق انحصار کی ترتیم استعمال کر کے نقطہ (عہ، ید، جہ) پر کے
ماس کی مساوات کو حسب ذیل شکلوں میں سے کسی ایک میں لکھا
جا سکتا ہے؛

$$۶ \frac{\text{عہ}}{\text{فرعہ}} + ۵ \frac{\text{ید}}{\text{فرید}} + ۴ \frac{\text{جہ}}{\text{فرجہ}} = ۰$$

$$\text{یا } ۶ \frac{\text{عہ}}{\text{فرعہ}} + ۵ \frac{\text{ید}}{\text{فرید}} + ۴ \frac{\text{جہ}}{\text{فرجہ}} = ۰$$

۲۶۵۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط مستقیم
ایک مخروطی کو مس کرے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے خط کی مساوات

$$۱ \text{ عہ} + ۲ \text{ م بہ} + ۳ \text{ ن جہ} = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اس خط اور مخروطی کے نقاط تقاطع کو اس ۱ سے ملانے والے
خطوط مساوات

$$۱ \text{ عہ (م بہ + ن جہ)} + ۲ \text{ ول ید} + ۳ \text{ ط ل جہ} + ۴ \text{ ع ل بہ جہ} + ۵ \text{ و ل جہ} \\ + ۶ \text{ ط ل بہ (م بہ + ن جہ)} = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر خط (۱) ماس ہے تو اوپر کی مساوات سے حاصل شدہ خطوط
منطبق ہونے چاہئیں جس کے لیے شرط

$$(۶ \text{ ع م} + ۵ \text{ و ل} - ۴ \text{ ط ل م}) (۳ \text{ ع ن} + ۲ \text{ و ل ن}) \\ - (۶ \text{ ع م ن} + ۵ \text{ و ل ن} - ۴ \text{ ط ل ن}) = ۰$$

یا ل (و ط - ع) + م (ط - و) + ن (ع - و - ط) + م (ن - و ط - ع)

+ ن (ل - ط - ع - و) + ل (م - ع - و - ط) =

یا ع ل + و م + ط ن + ع م + ن + و ن ل + ط ل م =
ہے جہاں ع، و، ط، ع، و، ط، قطع

و	ط	ع
ع	و	ط
ط	ع	و

میں ع، و، ط، ع، و، ط کے ہم جزو ضربی ہیں۔

۲۶۶۔ ایک دے ہوئے نقطہ کے قطبی کی مساوات معلوم کرنا۔

دفعہ ۷، ۱۰۰، ۱۱۹ کے ٹھیک مطابق یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ
ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی کی مساوات اسی شکل کی
ہے جو دفعہ ۲۶۴ میں ماس کی مساوات کی ہے۔

وہ شرط کہ دو نقطے (عم، بیہ، جہ)، (عم، بیہ، جہ) مخروطی کے لحاظ
سے مزدوج ہوں اسی طریقہ پر معلوم کی جاسکتی ہے جو دفعہ ۱۸۱ میں ان کو معلوم
کرنے کے لیے استعمال کیا گیا ہے چنانچہ یہ شرط

ع عم + و بیہ + ط جہ جہ + ع (بیہ جہ + بیہ جہ) + و (جہ عم + جہ عم)

+ ط (عم بیہ + عم بیہ) = ۰

ہے۔

اسی طرح خطوط ل، ع، م، بیہ + ل، جہ = ۰ اور ل، ع + م، بیہ + ل، جہ = ۰
کے مزدوج ہونے کی شرط

ع ل ل + و م م + ط ن ن + ع (م ل ل + م ل ل)

+ و (ن ل ل + ن ل ل) + ط (ل م م + ل م م) = ۰

ہے۔

۲۶۷۔ مخروطی کے مرکز کے محدود معلوم کرنا۔

چونکہ مخروطی کے مرکز کا قطبی لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے اس لیے اس کی مساوات

۱ = $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ ہے۔ لیکن [دفعہ ۲۶۶] مرکز کے قطبی کی مساوات

$$1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$$

ہے جہاں a ، b ، c ، مرکز کے محدود ہیں۔ اس لیے مرکز کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں

$$\frac{a^2}{bc} = \frac{b^2}{ca} = \frac{c^2}{ab}$$

حاصل ہوتی ہیں۔

۲۶۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے

تعبیر شدہ منحنی مکانی ہو۔

منحنی کے مرکز کے محدود مساواتوں

$$1 = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2}{ca} = \frac{c^2}{ab}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

ان میں سے ہر کسر کو۔ لہ کے مساوی رکھو تو

$$1 = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2}{ca} = \frac{c^2}{ab}$$

$$1 = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2}{ca} = \frac{c^2}{ab}$$

$$1 = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2}{ca} = \frac{c^2}{ab}$$

(۳۵۵)

نیز چونکہ مکانی کام کرنا لاتنا ہی پر ہے اس لیے

$$1 \text{ عبد} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج} = 0$$

ان چار مساواتوں سے عبد، ب، ج، کہ کو سا قذ کرو تو مطلوبہ شرط

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مکانی لاتنا ہی پر کے خط کو مس کرتا ہے (دفعہ ۲۶۵)۔

۲۶۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات
تعبیر شدہ منحنی دو خطوط مستقیم ہو سکے۔

مطلوبہ شرط کو حسب دفعہ ۲۷۰ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ یہ شرط

$$1 \text{ عبد} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج} - 4 \text{ د} - 5 \text{ ه} - 6 \text{ و} = 0$$

ہے یا مقطع کی شکل میں

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۲۷۰۔ محزوطی کے متقارب معلوم کرنا۔

منحنی کی مساوات اور متقاربوں کی مساوات میں صرف ایک
مستقل مقدار کا فرق ہوتا ہے۔

پس اگر منحنی کی مساوات

$$1 \text{ عبد} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج} - 4 \text{ د} - 5 \text{ ه} - 6 \text{ و} = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \epsilon \quad \tau \quad \omega \\ \hline \epsilon \quad \omega \quad \epsilon \\ \hline \tau \quad \epsilon \quad \tau \end{array} & + (1\epsilon + 2\tau + 3\omega) & \begin{array}{c} \epsilon \quad \tau \quad \omega \\ \hline \tau \quad \omega \quad \epsilon \\ \hline \omega \quad \epsilon \quad \tau \\ \hline 1\tau + 2\omega \end{array} \end{array}$$

فرد (۱ء، ۲ء، ۳ء) حاصل ہوتی ہے۔

۲۷۱۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ مخروطی قائم زائد ہو سکے۔

کارٹیزی محدودوں میں تبدیل کرو۔ تب مخروطی ایک قائم زائد یا دو عمود وار خطوط مستقیم ہوگا اگر لاء اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔ پس شرط

$$1\epsilon + 2\tau + 3\omega = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۷۲۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

اگر مثلث (ب ج کے) حائط دائرہ کے کسی نقطہ ف سے مثلث

(۲۷۵) کے ضلعوں پر تین عمود ف ل، ف م، ف ن کھینچے جائیں جو ان ضلعوں سے علی الترتیب ل، م، ن پر ملیں تو یہ معلوم ہے کہ یہ تین نقطے ل، م، ن ایک خط مستقیم میں ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ف کے محدد ۱، ۲، ۳ ہیں۔

مثلثوں م ف ن، ن ف ل، ل ف م کے رقبے

علی الترتیب $\frac{1}{2}$ بہ جب ۱، $\frac{1}{2}$ جہ جب ۲، $\frac{1}{2}$ اے جب ۳ ہیں۔

چونکہ 'ل'، 'م'، 'ن' ایک خط مستقیم میں ہیں اس لیے ان میں سے ایک مثلث دوسرے دو مثلثوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ اس لیے علامت کا لحاظ کرتے ہوئے

$$بہ جب (ا) + جہ جب ب + عہ جب ج = .$$

$$یا \quad ا + ب + ج + عہ جب ب + جہ جب = .$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال۔ و سے ایک مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں

جو ضلعوں سے 'د'، 'ع'، 'ف' پر ملتے ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر مثلث د ع ف کا رقبہ مستقل ہو تو و کا طریق ایک دائرہ ہے جو حائط دائرہ کے ہم مرکز ہے۔

۲۷۳۔ چونکہ درجہ دوم کی ریمیں تمام دائروں کی مساواتوں میں وہی ہوتی ہیں اس لیے اگر کسی ایک دائرہ کی مساوات سے = ہو تو کسی دوسرے دائرہ کی مساوات کو شکل

$$س + ل + عہ + مہ بہ + نہ جب = .$$

میں لکھا جاسکتا ہے، یا متجانس شکل

$$س + (ل + عہ + مہ بہ + ن جب) + (ا + عہ + ب بہ + ج جب) = .$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

دائرہ کی عام مساوات کی اس شکل سے یہ واضح ہے کہ لائنہا ہی

پر کا خط تمام دائروں کو ان ہی دو نقطوں (خیالی) پر قطع کرتا ہے جیسا کہ ہم قبل انہیں دیکھ چکے ہیں [دفعہ ۱۹۴]۔

۲۷۴۔ وہ شرطیں معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ منحنی ایک دائرہ ہو سکے۔

حوالے کے مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات [دفعہ ۲۷۲]

$$ا + ب + ج + عہ جب ب + جہ جب = .$$

$$۲- و ج ع (ا ع + ب ب) + ۲ ط ج ا ع ب = ۰$$

ہوگی۔

مخروطی ناقص، مکانی، یا زائد ہوگا بموجب اس کے کہ یہ خطوط خیالی، منطبق، یا حقیقی ہوں، اور یہ خطوط خیالی، منطبق، یا حقیقی ہونگے بموجب اس کے کہ

$$(ط ا ب - ع ا ج - و ب ج + ط ج ا) - (ع ج ا + ط ا ج - ۲ و ا ج)$$

$$\times (و ج ا + ط ب ا - ۲ ع ب ج)$$

منفی، صفر، یا مثبت ہو۔ یعنی بموجب اس کے کہ

$$ع ا + و ب + ط ج + ۲ ع ب ج + ۲ و ا ج + ط ا ب$$

مثبت، صفر، یا منفی ہو۔

۲۷۶۔ ماسوں کے اُس زوج کی مساوات جو کسی نقطہ سے مخروطی

کے کھینچے گئے ہوں دفعہ ۱۸۸ کے طریقہ سے معلوم کیجا سکتی ہے، اور کسی وتر کے سروں پر کے ماسوں کی مساوات دفعہ ۱۸۹ کے طریقہ سے معلوم کیجا سکتی ہے۔

مخروطی کے مرتب دائرہ کی مساوات کو دفعہ ۱۹۰ کے طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

وہ مساواتیں جن سے ماسکے اور مرتب حاصل ہوتے ہیں دفعہ ۱۹۴ کے طریقہ سے معلوم کیجا سکتی ہیں۔

(۳۵۹)

ماسکوں کے لیے مساواتیں حسب ذیل حاصل ہونگی :

$$۴ (ب ا ط + ج ا و - ۲ ب ج ع) - (ع ب ج) - (ب ج ا - ج ا ب) - (ج ا ب - ب ج ا)$$

$$= ۴ (ج ا ط + ا و ج - ۲ ج ا و) - (ع ب ج) - (ج ا ب - ب ج ا) - (ب ج ا - ج ا ب)$$

$$= ۳(ا^۱و + ب^۲ع - ۲ا^۱ب ط) ف (ع^۱بہ، جہ) - (ا^۱ف - ب^۱ف) ف (ف^۱ف)$$

ان سے ف (ع^۱بہ، جہ) کو ساقل کیا جائے تو مخروطی کے محوروں کی مساوات حاصل ہوگی۔

$$۲۷۷ - مخروطی ع^۱ع + د^۱ب + ط^۱جہ + ع^۱ع + جہ + ۲و + جہ + ع + ط + ع + ب =$$

کے محوروں کے طول معلوم کرنا۔

مخروطی کی مماسی مساوات

$$ع^۱ل + و^۱م + ط^۱ن + ع^۱م + ن^۱و + ل^۱و + ط^۱ل = ۰ \dots (۱)$$

ہے۔ اب فرض کرو کہ ماسکوں کا زوج (ع^۱بہ، جہ) (ع^۱م، بہ، جہ) ہے اور عمود وار محور کا طول ۲ رہے۔ پس اگر ل ع + م + ب + ن جہ = مخروطی کا کوئی مماس ہو تو

$$۲ = \frac{(ل ع + م + ب + ن جہ) (ل ع + م + ب + ن جہ)}{}$$

$$ل^۱ل + م^۱ن - ۲م ن جم - ۲ن ل جم ب - ۲ل م جم ج$$

$$پس (ل ع + م + ب + ن جہ) (ل ع + م + ب + ن جہ) - ۲(ل^۱ل + م^۱ن +$$

$$- ۲م ن جم - ۲ن ل جم ب - ۲ل م جم ج)$$

$$= ل (ع^۱ل + و^۱م + ط^۱ن + ع^۱م + ن^۱و + ل^۱و + ط^۱ل م)$$

اس مثال میں ل^۱م، ن کی بجائے علی الترتیب ا^۱ب، ج رکھو تب

$$۴ = ل (ع^۱ا + و^۱ب + ط^۱ج + ع^۱ب + ج + ۲و + ج + ط + ا)$$

$$(۲) \dots \dots \dots$$

اور چونکہ

$$L = (E_1 + \dots + E_m) + (L_1 + \dots + L_n)$$

(۳۶۰) غلطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے اس لیے

لـ + عـ	لـ طـ	لـ وـ
لـ طـ	لـ وـ	لـ عـ
لـ وـ	لـ عـ	لـ طـ

جہاں لہ (۲) سے معلوم ہوتا ہے۔
 اوپر کی مساوات دو درجی ہے، کیونکہ x^2 کا سر صریحاً صفر ہے۔ اس سے
 مخروطی کے محوروں کے مربع معلوم ہوں گے۔

رقیبی محدود

۲۷۸۔ کسی نقطہ ف کا محل متعین ہو جائے گا اگر وہ نسبتیں معلوم

ہوں جو مثلث فی بج 'ف ج ا' اور ف اب حوالے کے مثلث

یہ آج کے ساتھ رکھتے ہیں۔ ان نسبتوں کو علی المرتیبا لا، ما، ی سے

تعبیر کیا جاتا ہے اور ان کو نقطہ ف کے برقی محاذ کہا جاتا ہے۔

کسی نقطہ کے رقبی محدود رشتہ

$$1 = 6 + 6 + 11$$

ہیں مربوط ہوتے ہیں۔

چونکہ $\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_2}$ ، $\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_2}$ اور $\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_2}$ اس لیے اگر

کوئی متجاسن مساوات سے خطی محدودوں میں دی گئی ہو تو ہم اس مساوات کو عہدہ، جہ کی بجائے علی الترتیب $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{c}$ رکھ کر فی محدود

مساوات میں فوراً تبدیل کر سکتے ہیں، مثلاً لا تناہی پر کے خط کی مساوات رقبی محدودوں میں لا + ما + ی = ۰ ہے۔ لیکن ہم حادثہ دائرہ کی رقبی مساوات کو اس استحالہ کے بغیر ہی معلوم کریں گے۔

۲۷۹۔ اس دائرہ کی مساوات رقبی محدودوں میں معلوم کرنا جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

اگر ف اس دائرہ پر کوئی نقطہ ہو جو مثلث ا ب ج کے گرد

کھینچا گیا ہے تو ٹوٹلی کے مسئلہ (اقلیدس ششم) کی رُو سے

ف (ا ب ف ± ف ب × ف ج ± ف ج × ا ب) = ۰ ... (۱)
لیکن چونکہ زاوے ب ف ج، ا ب ج یا تو مساوی ہیں یا متمم اسلئے (۳۶۱)

$$\frac{ف ب \times ف ج}{ا ب \times ا ج} = لا$$

اسی طرح ما اور ی کے لیے۔ پس لا، ما، ی کی علامتوں کا لحاظ رکھنے سے (۱) سے

$$\frac{ف \times ا \times ف ب \times ف ج}{ا ب \times ج} + \frac{ف \times ا \times ف ب \times ف ج}{ب ج \times لا} = ۰$$

$$\frac{ف \times ا \times ف ب \times ف ج}{ا ب \times ج} = ۰$$

حاصل ہوتا ہے یعنی

$$۰ = \frac{ا^۲}{لا} + \frac{ب^۲}{ا} + \frac{ج^۲}{ی}$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔
۲۸۰۔ اگر وہ مخروطی جو سہ خطی محدودوں میں درجہ دوم کی عام مہادات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ع^۲ + و^۲ + ج^۲ + و^۲ + ج^۲ + ط^۲ + ع^۲ = ۰$$

سے تعبیر ہوتا ہے وہی جو رقبی محدودوں میں مساوات

$$ل + لا + م + ما + ن + نا + مای + ۲ + مہ + ی + لا + ۲ + نہ + لا + م = ۰$$

سے تعبیر ہوتا ہے تو چونکہ $\frac{لا}{۱} = \frac{ما}{ب} = \frac{ی}{ج}$ اس لیے ہمیں

حاصل ہونا چاہئے

$$\frac{۱}{ل} = \frac{۲}{لا} = \frac{۲}{ما} = \frac{۲}{ن} = \frac{۲}{م} = \frac{۲}{ی} = \frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}$$

پس اگر سہ خطی مساوات کے سروں میں کوئی رشتہ دیا گیا ہو تو اس کے جواب میں ہم وہ رشتہ معلوم کر سکتے ہیں جو رقبی مساوات کے سروں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

بہت سی صورتوں میں یہ بات کوئی اہمیت نہیں رکھتی کہ آیا متعلقہ محدود رقبی ہیں یا سہ خطی لیکن بعض ضابطے ان دو قسم کے محدودوں میں مختلف ہوتے ہیں۔ سب سے زیادہ اہم ضابطے جو رقبی محدودوں میں قابل یادداشت ہیں حسب ذیل ہیں، ان ضابطوں کو سہ خطی محدودوں کے متناظر ضابطوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے یا انہیں بلا واسطہ بھی معلوم کیا جاسکتا ہے:

۱۔ دو خطوط مستقیم

$$ل + لا + م + ما + ن + نا + مای + ۲ + مہ + ی = ۰$$

علی القوائم ہوں گے اگر

$$ل + لا + م + م + ب + ن + نا + ج - (م + ن + م + ن) - جم - ل - ن - ل = ۰$$

$$ن + ل - جم - ب - (ل + م + ل + م) - جم - ج = ۰$$

۲۔ وہ خطوط مستقیم جو

$$لا + و + ما + ط + ۲ + مای + ۲ + و + لا + ۲ + ط + لا + م = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں علی القوالم ہوں گے اگر

$$ع^۱ + و^۲ + ط^۳ - ع^۲ ب - ج^۲ و - ج^۲ ط + ب^۲ ج = ۰$$

۳۔ نقطہ (لا، ما، ی) کا عمودی فاصلہ خط لا + م + ن ی = ۰ سے

$$\Delta ۲ (ل، م + ن، ی)$$

$$\sqrt{۳ ل^۲ - ۲ م ن ب ج}$$

ہے۔

۴۔ مخروطی $ع^۱ + و^۲ + ط^۳ + ع^۲ مای + و^۲ ی لا + ط^۲ لا ما = ۰$ قائم زائد ہوگا (بشمول دو عمودی خطوں کی خاص صورت کے) اگر

$$۳ ع^۱ - ۲ ع^۲ ب - ج^۲ و = ۰$$

۵۔ دائرہ کے لیے شرطیں ہیں

$$\frac{و + ط - ع^۲}{ل^۱} = \frac{ط + ع - و^۲}{ب^۲} = \frac{و + ع - ط^۲}{ج^۲}$$

۶۔ مخروطی کے مرکز کے محدود

$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

حائط مخروطی

۲۸۱۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے

مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

مخروطی کی عام مساوات

$$ع^۱ + و^۲ + ط^۳ + ع^۲ ب + ج^۲ و + و^۲ ج + ط^۲ ع = ۰$$

(عم، بی، جم) کو ملاتا ہے (۱) سے

$$(۲) \dots\dots\dots '۰ = \frac{ل}{عم} + \frac{م}{بی} + \frac{ن}{جم} \quad \text{ہے۔}$$

[بلاشبہ یہ واضح ہے کہ خط (۲) دئے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرے گا بشرطیکہ یہ نقطے مخروطی پر ہوں]

(۲) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ (عم، بی، جم) پر کے تماس کی

مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots '۰ = \frac{ل}{عم} + \frac{م}{بی} + \frac{ن}{جم} \quad \text{ہے۔}$$

اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ خط ل + عم + م بی + ن جم = ۰ مخروطی کو مس کرے۔ کیونکہ اگر یہ خط نقطہ (عم، بی، جم) پر تماس ہو تو (۳) سے

$$\frac{ل}{عم} = \frac{م}{بی} = \frac{ن}{جم}$$

لیکن $\frac{ل}{عم} + \frac{م}{بی} + \frac{ن}{جم} = ۰$ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$(۴) \dots\dots\dots '۰ = \sqrt{ل} + \sqrt{م} + \sqrt{ن}$$

اندرونی مخروطی

۲۸۳۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو والے کے مثلث کے ضلعوں کو مس کرے۔
مخروطی کی عام مساوات

$$۶عہ + و بہ + ط جہ + ۲ع بہ جہ + ۲و جہ + ۲ط جہ = ۰$$

ہے۔ یہ مخروطی عہ = کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں (۳۶۴)

و بہ + ط جہ + ۲ع بہ جہ = قطع کرے تو
پس اگر مخروطی عہ = کو دو منطبق نقطوں پر قطع کرے تو

$$و ط = ع' یا ع' = و ط$$

اسی طرح اگر مخروطی مثلث کے دوسرے ضلعوں کو بھی مس کرے تو

$$و = ط ع' اور ط = ع' و$$

پس ع' و ط کی بجائے علی الترتیب ل' م' ن' رکھنے سے

ہمیں مساوات

$$ل'عہ + م' بہ + ن' جہ + ۲ل' م' نہ جہ + ۲م' نہ جہ + ۲ن' جہ = ۰$$

$$۰ = ۲ل' م' نہ جہ + ۲م' نہ جہ + ۲ن' جہ$$

حاصل ہوتی ہے۔

اس مساوات میں مبہم علامتوں میں سے یا تو ایک منفی ہونی چاہئے یا تینوں منفی ہونی چاہئیں، کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو مساوات کا دائیں جانبی رکن ایک کامل مربع ہوگا اور اس صورت میں مخروطی دو منطبق خطوط مستقیم ہوگا۔

مساوات کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$$ل'عہ + م' بہ + ن' جہ = ۰$$

۲۸۴ — نقطوں (عم، یم، جم) اور (عم، یم، جم) کو ملانے والے خط کی مساوات

عم (یم، جم - یم، جم) + جم (جم، عم - جم، عم) + جم (عم، یم - عم، یم) = (۱)
ہے۔ لیکن اگر یہ دو نقطے مخروطی پر ہوں جس کی مساوات

$$\overline{الہ عم} + \overline{امہ یم} + \overline{انہ جم} = ۰$$

ہے تو

$$\overline{الہ عم} + \overline{امہ یم} + \overline{انہ جم} = ۰, \overline{الہ عم} + \overline{امہ یم} + \overline{انہ جم} = ۰$$

اس لیے

$$\frac{\overline{انہ}}{\overline{الہ جم} - \overline{الہ عم}} = \frac{\overline{امہ}}{\overline{الہ عم} - \overline{الہ جم}} = \frac{\overline{الہ}}{\overline{الہ جم} - \overline{الہ عم}}$$

پس (۱) سے اس وتر کی مساوات جو مخروطی کے نقطوں

(عم، یم، جم)، (عم، یم، جم) کو ملاتا ہے

$$\overline{الہ عم} + \overline{الہ جم} + \overline{الہ جم} + \overline{الہ عم} + \overline{الہ جم} + \overline{الہ عم}$$

$$+ \overline{جمہ انہ} + \overline{العم یم} + \overline{العم یم} = ۰ \dots (۲)$$

ہے۔

(۲) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ (عم، یم، جم) پر طاس کی مساوات (۳۱۵)

$$\overline{العم} + \overline{یمہ} + \overline{جمہ انہ} + \overline{جمہ انہ} = ۰ \dots (۳)$$

ہے۔

اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ خط ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰۔
مخروطی کو مس کر سکے۔ کیونکہ اگر وہ نقطہ (عہ، بہ، جہ) پر تماس ہے تو
(۳) سے

$$ل \sqrt{ل عہ} = م \sqrt{م بہ} = ن \sqrt{ن جہ}$$

$$لیکن \sqrt{ل عہ} + \sqrt{م بہ} + \sqrt{ن جہ} = ۰$$

اس لیے مطلوبہ شرط

$$\frac{ل}{ل} + \frac{م}{م} + \frac{ن}{ن} = ۰ \quad (۴)$$

ہے۔

دفعہ ۲۸۲ اور دفعہ ۲۸۴ سے یہ معلوم ہوگا کہ خط

$$ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ \quad (۱)$$

$$\text{حائط مخروطی} \quad \frac{ل}{ل} + \frac{م}{م} + \frac{ن}{ن} = ۰ \quad (۲)$$

کو مس کرتا ہے اگر نقطہ (ل، م، ن) اندرونی دائرہ

$$\sqrt{ل عہ} + \sqrt{م بہ} + \sqrt{ن جہ} = ۰ \quad (۳)$$

پر ہو۔

نیز خط (۱) اندرونی دائرہ (۳) کو مس کرتا ہے اگر نقطہ (ل، م، ن)

حائط دائرہ (۲) پر ہو۔

وہ مخروطی جو چار دے ہوئے نقطوں میں گزریں

۲۸۵۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو چار دے ہوئے

نقطوں میں سے گزرے۔

اگر چار زاویہ کے وتری نقطے حوالے کے مثلث کے راس ہوں تو چار نقطوں کے محدود \pm ف \pm گ \pm ح سے حاصل ہوتے ہیں [دفعہ

۲۶۱]۔

اگر یہ چار نقطے اس مخروطی پر ہوں جس کی مساوات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ + ۲ و ح + ۲ و ط + ۲ ح ط = ۰$$

(۳۶۶)

ہے تو ہمیں مساواتیں

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ۲ و ح + ۲ و ط + ۲ ح ط = ۰$$

حاصل ہوتی ہیں۔ اس لیے

$$ع = و = ط = ۰$$

اس لیے مخروطی کی مساوات $ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰$ ہے معاً اس

شرط کے کہ $ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰$ ۔

مثال ۱۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق معلوم کرو جو چار

دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے \pm ف \pm گ \pm ح ہیں۔

کسی مخروطی کی مساوات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰$$

ہوگی معاً اس شرط کے کہ

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰ \dots \dots (۱)$$

مخروطی کے مرکز کے محدود

$$\frac{ع}{ا} = \frac{و}{ب} = \frac{ط}{ج}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اب (۱) میں $ع$ ، $و$ ، $ط$ کی بجائے اندراج کرو تو

مطلوبہ طریق کی مساوات

۱ ف ۲ بہ جہ + ب گ ۳ جہ عہ + ج ۴ عہ بہ = ۰ [دیکھو دفعہ ۲۱۰]

حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۳۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطی کے
لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔
مثال ۳۔ مخروطیوں کے ایک ایسے نظام کے لحاظ سے
جو چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں ایک دئے ہوئے نقطہ کے
قطب ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں گے۔

مخروطی جو چار دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں
۲۸۶۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو چار دئے ہوئے
خطوط مستقیم کو مس کرے۔
فرض کرو کہ اُس مثلث کو جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے
حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے، تب [دفعہ ۲۶۲] چار خطوں کی مساوات
شکل

$$ل عہ \pm م بہ \pm ن جہ = ۰$$

کی ہونگی۔ مخروطی

۶ عہ + ۲ وہ + ۲ ط جہ + ۲ غ بہ جہ + ۲ وجہ + ۲ ط عہ بہ = ۰ ... (۱)
خط (ل، م، ن) کو مس کریگا اگر $ل + م + ن + ۲ ط + ۲ غ + ۲ وجہ + ۲ ط عہ بہ = ۰$
 $۲ + ۲ و ن ل + ۲ ط ل م = ۰$
اس لیے اگر مخروطی چاروں خطوں کو مس کرتا ہے تو ہمیں حاصل
ہونا چاہئے

$$۶ = و = ط = ۰$$

$$و ط - ۶ = ۰$$

یعنی

(۳۶۷)

$$\text{ط} \text{ع} - \text{و} \text{و} = .$$

$$\text{ع} \text{و} - \text{ط} \text{ط} = .$$

$$\text{ع} = \text{و} = \text{ط} = .$$

اگر ایسا نہیں ہے تو (۱) ایک کامل مربع ہے اور اس لیے مخروطی منطبق خطوط مستقیم کا ایک زوج ہے۔

پس $\text{ع} = \text{و} = \text{ط} = .$ حاصل ہونے چاہئیں اور تماس کی شرط

$$\text{ل} \text{و} + \text{م} \text{ط} + \text{ع} \text{ن} = .$$

ہے۔ اس لیے ہر مخروطی جو چاروں خطوں کو مس کرتا ہے مساوات

$$\text{ع} \text{ع} + \text{و} \text{و} + \text{ط} \text{ط} = .$$

$$\text{میں شامل ہے بشرطیکہ } \frac{\text{ل}}{\text{ع}} + \frac{\text{م}}{\text{و}} + \frac{\text{ن}}{\text{ط}} = .$$

مثال ۱۔ ان مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو

چار دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں۔
کوئی مخروطی مساوات

$$\text{ع} \text{ع} + \text{و} \text{و} + \text{ط} \text{ط} = .$$

$$\text{سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ } \frac{\text{ل}}{\text{ع}} + \frac{\text{م}}{\text{و}} + \frac{\text{ن}}{\text{ط}} = .$$

مخروطی کے مرکز کے محدود

$$\frac{\text{ع} \text{ع}}{1} = \frac{\text{و} \text{و}}{\text{ب}} = \frac{\text{ط} \text{ط}}{\text{ج}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے مرکزوں کے طریق کی مساوات

$$\frac{\text{ل} \text{ع}}{1} + \frac{\text{م} \text{و}}{\text{ب}} + \frac{\text{ن} \text{ط}}{\text{ج}} = .$$

ہے جو ایک خط مستقیم کو تعمیر کرتی ہے۔

یہ خط مستقیم چار ضلعی کے تین وتروں کے تقاطع وسطی میں سے گذرتا ہے۔
[دیکھو دفعہ ۲۱۹]

مثال ۲۔ مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دے ہوئے
خط کے قطب کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جہاں مخروطیاں ایک ہی چار ضلعی
میں کھینچے گئے ہیں۔

مثال ۳۔ مخروطیوں کا ایک نظام چار ثابت خطوں کا مستقیم کوس
کرتا ہے۔ اس نظام کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا لفظ
ایک مخروطی ہوگا۔

مخروطی بحوالہ خود قطبی مثلث

(۳۶۸)

۲۸۷۔ جب مخروطی کی مساوات شکل $ع + و + ط + ج = ۰$ کی
ہوتی ہے تو حوالے کے مثلث کا ہر اس مقابل کے ضلع کا قطب ہوتا
ہے۔ یہ بڑی آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے اگر ہم مثلث کے کسی راس
کے محدود کو ($ع$ ، $و$ ، $ط$ ، $ج$) کے قطبی کی مساوات
 $ع + و + ط + ج = ۰$

میں درج کریں۔
اس کے بالعکس اگر حوالے کا مثلث خود قطبی ہو تو مخروطی کی
مساوات کی شکل $ع + و + ط + ج = ۰$ ہوگی۔ کیونکہ عام مساوات سے تعبیر شدہ
مخروطی کے لحاظ سے $(\frac{\Delta}{1}, ۰, ۰)$ کے قطبی کی مساوات

$$ع + و + ط + ج = ۰$$

ہے۔ اس لیے اگر (کا قطبی ج) ہے تو $ط = و = ۰$ ۔ اسی طرح
اگر (کا قطبی ج) ہے تو $و = ع = ۰$ ۔ پس $ع$ ، $و$ ، $ط$ سب صفر ہیں۔
۲۸۸۔ اگر دو مخروطی چار حقیقی نقطوں پر متقاطع ہوں اور ان چار

نقطوں سے بنے ہوئے چار زاویہ کے وتری نقطوں کو حوالے کا مثلث قرار دیا جائے تو ان دو مخروطیوں کی مساواتیں [دفعہ ۲۸۵] شکل

$$e^2 + w^2 + p^2 = 0 \text{ اور } e^2 + w^2 + p^2 = 0$$

کی ہونگی۔ پس جیسا کہ ہم دفعہ ۲۱۵ میں دیکھ چکے ہیں کوئی دو مخروطی جو چار حقیقی نقطوں پر متقاطع ہوں ایک مشترک خود قطبی مثلث رکھتے ہیں۔ اگر دو مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے دو حقیقی اور دوسرے دو خیالی ہوں تو مشترک خود قطبی مثلث کے دور اس خیالی ہوں گے۔ اگر دو مخروطیوں کے چاروں نقاط تقاطع خیالی ہوں تو ایک حقیقی خود قطبی مثلث ہوگا [دیکھو

Ferrer's Trilinears, or

[Solomon's Conic Sections, Art 82

دو مماس اور ان کا وتر تماس

(۳۶۹)

۲۸۹ — جب اس مثلث کو جو دو مماسوں اور ان کے وتر تماس سے بنتا ہے حوالے کے مثلث کے طور پر لیا جاتا ہے تو مخروطی کی مساوات شکل

$e^2 - 4k^2 = 0$ (۱)

کی ہوتی ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (۲ ک ع، ک ع، ۱ ع) کی تمام قیمتوں کے لیے مخروطی پر ہے۔ اور حسب دفعہ ۱۰۷ یا دفعہ ۱۵۵ اس نقطہ کو ہم نقطہ "ع" کہہ سکتے ہیں۔

نقطوں ع، ع، کو طانے والے وتر کی مساوات

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ہے، اس لیے پھیلائے اور ع۔ ع۔ سے تقسیم کرنے پر

$$(ع + ع) = ۲ - ۲ ک ع ع ج = ۰ \dots (۲)$$

اسکے "ع" پر کے حماس کی مساوات

$$ع - - - - - ک ع ج = ۰ \dots (۳)$$

ہے۔

اب وہ خطوط جو ج کو ل ع + م + ن ج = ۰ اور ع۔ م ک ج = ۰ کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں مساوات

$$ن ع + م ک ج = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس لیے وہ شرط کہ ل ع + م + ن ج = ۰ مخروطی کو مس کرے یہ ہے کہ

$$م ک م ن - م ک ل = ۰ \text{ یعنی } ل = م ن \dots (۴)$$

یا ل ع + م + ن ج = ۰ کا مقابلہ ع پر کے حماس کے ساتھ کرنے سے

$$ل ع = م = - - - - - ک ع ج \text{، اس لیے } ل = م ن$$

مثال ۱۔ اگر ایک مثلث کو ایک مخروطی میں بنایا جائے اور اسکے

دو ضلع دیئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں تو تیسرا ضلع ایک مخروطی کو لف کر نیگا۔
دو نقطوں کو ملانے والے خط اور اس خط کے سروں پر کے حماسوں کو
حوالے کے مثلث کے ضلع کو۔

تب مخروطی کی مساوات

$$ع - - - - - م ک ج = ۰ \dots (۱)$$

(۳۷۰)

ہوگی اور ثابت نقطوں کو (، گ، ہ) (، گ، ہ) لے سکتے ہیں۔
اگر مثلث کے اس مخروطی پر کے نقطے ع، ع، ع، ہ ہوں تو ضلعوں کی
مساواتیں

$$(ع + ع) ع - ع - ۲ - ۲ ک ع ع ع ج = ۰$$

$$(ع + ع) ع - ع - ۲ - ۲ ک ع ع ع ج = ۰$$

اور (ع + ع) ع - ع - ۲ - ۲ ک ع ع ع ج = ۰
ہونگی۔ چونکہ ان میں سے دو ضلع دے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں

$$گ + ک ع ع ع ج = ۰ \text{ اور } گ + ک ع ع ع ج = ۰$$

$$گ + ک ع ع ج = گ + ک ع ع ج$$

اس لیے باقی ضلع کی مساوات کو

$$(گ + گ) ع - ع - ۲ - ۲ ک گ ع ع ج = ۰$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا لفافہ ع کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$۱ ک گ گ ع ع ج = ۰ \text{ (گ + گ) ع ع ج = ۰}$$

مثال ۲۔ اگر دو مخروطی ایسے ہوں کہ ان کے مشترک
نقطوں میں سے دو نقطوں پر ایک مخروطی کے حماس دوسرے
مخروطی پر متقاطع ہوتے ہیں تو ثابت کرو کہ دوسرے مخروطی میں
ایسے چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے
ضلع پہلے مخروطی کو مس کریں۔

دو عاسوں اور ان کے وترتاس کو حوالے کے مثلث کے ضلع قرار دو۔
تب مخروطیوں کی مساواتوں کو

$$\begin{aligned} \text{س} &= \text{ع}^2 - \text{ہ}^2 \text{ ک بہ جہ} = ۰ \\ \text{س} &= \text{لہ بہ جہ} + \text{مہ جہ عہ} + \text{نہ عہ بہ} = ۰ \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ س میں کھینچے ہوئے کسی چار ضلعی ف ق س میں کے
ضلع ف ق 'ق س' اور س میں 'مخروطی میں' کو مس کرتے ہیں اور چار
ضلعی کے واس (عم، بی، جم) وغیرہ ہیں۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ
س ف بھی میں کو مس کرتا ہے
اب ف ق 'ق س' س میں 'س میں' س ف کی مساواتیں

$$\text{لہ عہ} + \frac{\text{مہ بہ}}{\text{بہ بہ}} + \frac{\text{نہ جہ}}{\text{جم جم}} = ۰ \text{، وغیرہ}$$

ہیں۔ اب چونکہ ف ق 'ق س' اور س میں 'مخروطی میں' کو مس کرتے

ہیں اس لیے

$$\frac{\text{ک لہ}^2}{\text{عم عم}} = \frac{\text{مہ نہ}}{\text{بہ بہ جم جم}} \text{، اور}$$

$$\frac{\text{ک لہ}^2}{\text{عم عم}} = \frac{\text{مہ نہ}}{\text{بہ بہ جم جم}}$$

پہلی اور تیسری مساواتوں کے نظیری ارکان کو ضرب دو اور دوسری
مساوات کے نظیری ارکان سے تقسیم کرو تو

$$\frac{\text{ک لہ}^2}{\text{عم عم}} = \frac{\text{مہ نہ}}{\text{بہ بہ جم جم}}$$

اور یہی شرط ہے کہ س ف بھی میں کو مس کرے۔

مثال ۳۔ اگر ایک چار ضلعی ایک مخروطی میں بنایا جائے اور اسکے ضلع دوسرے مخروطی کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ایسے چار ضلعیوں کی لاتنتاہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے۔

چار ضلعی کے ضلعوں کو $ل$ ، $ع$ ، $م$ ، $ن$ ، $ج$ ۔ کیا جاسکتا ہے یا $ل$ ، $ع$ ، $م$ ، $ن$ ، $ج$ کی بجائے $لا$ ، $ما$ ، $ی$ رکھنے سے ان خطوں کی مساواتیں $لا \pm ما \pm ی = ۰$ ہو جاتی ہیں۔

مخروطی $س \equiv ع + لا + و + ما + ط ی = ۰$ ۔

ان چار خطوں کو مس کر لیا اگر $وط + طع + عو = ۰$ (۱)
چار ضلعی کے راسوں میں سے چار $(ا \pm ۰)$ ، $(ا \pm ۱)$ اور $(ا \pm ۱)$ ، $(ا \pm ۰)$ ہیں اور کوئی مخروطی جو ان چار نقطوں میں سے گزرے

$س \equiv لا - ما - ی + ۲ ع + ما ی = ۰$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اب خطوط

$(۱) \dots (۲) \dots (۳) \dots$

س اور س کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔

اگر خطوں (۲) میں سے ایک $ما + ک ی = ۰$ ہو اور س کے لحاظ سے

اس کا قطب $(۰، ما، ی)$ ہو تو $و + ما + ط ی + ی = ۰$ وہی ہے جو $ما + ک ی$

$= ۰$ ہے اور اس لیے کہ $\frac{ط ی}{و + ما}$

اس لیے (۲) سے

$(۳) \dots (۴) \dots$

(۳) سے حاصل شدہ دو نقطے $س$ پر ہوں گے اگر (۳) وہی ہو جو

$ما + ی - ۲ ع + ما ی = ۰$ ہے، اس لیے شرطیں یہ ہیں کہ

$$(۶ + و) ط^۲ = (ط + و) و^۲ = ۶ و ط$$

اور یہ شرطیں صریحاً (۱) سے حاصل ہوتی ہیں۔

پس اگر ایک چار ضلعی مخروطی س میں بنایا جائے اور اس کے ضلع مخروطی س کو مس کریں تو س کے وہ تماس جو س میں اور س کے تقاطع کے دتروں میں سے دو کے سروں پر کھینچے گئے ہوں س میں پریں گے۔

اس کے بعد مثال ۲ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ س میں ایسے چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع س کو مس کریں۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۲۴ مثال ۷]

وہ دائرے جن کا تعلق ایک مثلث سے ہوتا ہے

۲۹۰۔ ہم اس دائرہ کی مساوات معلوم کر چکے ہیں جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو یعنی

$$\frac{1}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = 0$$

اب ہم چند دوسرے دائروں کی مساواتیں معلوم کریں گے جو ایک مثلث سے متعلق ہوتے ہیں۔

۱۔ ان دائروں کی مساواتیں معلوم کرنا جو حوالے کے

(۳۷۲)

مثلث کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

اگر وہ نقطہ ہو جہاں اندرونی دائرہ ضلع ب ج کو مس کرتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ

$$د ج = س - ج اور د ب = س - ب$$

اس لیے d کی مساوات

$$(1) \dots \frac{b}{(s-b)} = \frac{c}{(s-c)}$$

ہوگی۔ اب کسی اندرونی مخروطی کی مساوات

$$(2) \dots \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - c^2} = 0$$

ہوتی ہے۔ اس خط کی مساوات جو d کو b ج اور مخروطی کے نقطہ تماس سے ملاتا ہے

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - c^2} = 0$$

سے حاصل ہوگی۔

(3) ... $\frac{b}{(s-b)} = \frac{c}{(s-c)}$ پس اگر (2) اندرونی دائرہ ہے تو (1) اور (3) سے

$$\frac{b}{(s-b)} = \frac{c}{(s-c)}$$

اسی طرح ج ۱ پر کے نقطہ تماس پر غور کرنے سے

$$\frac{c}{(s-c)} = \frac{a}{(s-a)}$$

اس لیے اندرونی دائرہ کی مساوات

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - d^2} = 0$$

ہے۔ جانبی دائروں کی مساواتیں بھی اسکے مشابہ طریقہ سے معلوم کی جاسکتی ہیں۔

۲۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جس کے لحاظ سے
حوالے کا مثلث خود قطبی ہوتا ہے۔
اُن تمام مخروطیوں کی مساواتیں جن کے لحاظ سے حوالے کا
مثلث خود قطبی ہے شکل
ع ۲ + و ۲ + ط ۲ = ۔

کی ہیں۔ کسی دائرہ کی مساوات کو شکل

ا ب ج + ب ج ع + ج ع د + (ل ع + م ب + ن ج) (ا ع
+ ب ب + ج ج) = ۔

میں لکھا جاسکتا ہے۔
اگر اوپر کی دو مساواتیں ایک ہی منحنی کو تعبیر کرتی ہیں تو
ع = ل ا ، د = م ب ، ط = ن ج ،

ا + م ج + ن ب = ۰ ، ب + ن ا + ل ج = ۰ ، اور ج + ل ب
+ م ا = ۰

اس لیے ل = جم ا ، م = جم ب ، ن = جم ج
اس لیے مطلوبہ مساوات

ا جم ا + ب جم ب + ج جم ج + ج ج = ۰

ہے۔

۳۔ نو نقطی دائرہ کی مساوات معلوم کرنا

فرض کرو کہ اس دائرہ کی مساوات

ا ب ج + ب ج ع + ج ع د + (ل ع + م ب + ن ج) (ا ع
+ ب ب + ج ج) = ۰

ہے۔ یہ دائرہ ع = کو دہاں قطع کرتا ہے جہاں ب ب = ج ج

$$\text{نہ } ۱ \text{ ب ج} - ۲ (\text{مہ ج} + \text{نہ ب}) \text{ ب ج} = ۰$$

$$\text{یا } \frac{\text{نہ}}{\text{ب}} + \frac{\text{مہ}}{\text{ج}} = \frac{\text{نہ}}{\text{ب ج}}$$

$$\text{اسی طرح } \frac{\text{نہ}}{\text{ج}} + \frac{\text{لہ}}{\text{ا}} = \frac{\text{نہ}}{\text{ا ج}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{نہ}}{\text{ا}} + \frac{\text{مہ}}{\text{ب}} = \frac{\text{نہ}}{\text{ا ب}}$$

اس لیے $۲ \text{ لہ} = \text{جم ا}$ ، $۲ \text{ مہ} = \text{جم ب}$ ، $۲ \text{ نہ} = \text{جم ج}$
اس لیے دائرہ کی مساوات

$$۲ \text{ لہ} + \text{ب جہ} + ۲ \text{ مہ} + \text{ا جہ} + ۲ \text{ نہ} + \text{ا ب جہ} = ۰$$

$$- (\text{عجم ا} + \text{بہ جم ب} + \text{جہ جم ج}) (\text{ا عہ} + \text{بہ جہ} + \text{جہ جہ}) = ۰$$

$$\text{یا } ۱ \text{ بہ جہ} + \text{ب جہ عہ} + \text{ا جہ نہ} - \text{بہ ا جم ب} - \text{جہ ا جم ج} = ۰$$

ہے۔

اس مساوات کی شکل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہی دائرہ، حاملہ
دائرہ اور خود مخروطی دائرہ مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں جس کی مساوات
عجم ا + بہ جم ب + جہ جم ج = ۰

ہے۔

مثالیں

(۳۷۴)

۱۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جس کی مساوات

$$\sqrt{\text{ا عہ}} + \sqrt{\text{بہ جہ}} + \sqrt{\text{جہ جہ}} = ۰$$

ہے حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو ان کے نقاط وسطی پر بس کرتا ہے۔

۲۔ اگر ایک مثلث میں ایک مخروطی کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ

(۱' ۱' ۱') کا قطبی

لہ (بہ + جہ) + سہ (بہ + عہ) + نہ (عہ + بہ) = ۰ (۲)

ہے۔

شرط (۱) کے ساتھ (۲) کا لفاف [دفعہ ۲۸۴]

$$۰ = \frac{ج}{بہ + عہ} + \frac{ب}{جہ + عہ} + \frac{۱}{بہ + جہ}$$

[۴۷]

۲۹۱۔ پیاسکل کا مسئلہ۔ اگر ایک مسدس کو ایک

مخروطی میں گھینپا جائے تو متقابلہ ضلعوں کے تین زوجوں کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم میں ہونگے۔

فرض کرو کہ مسدس کے راس 'ا'، 'ب'، 'د'، 'ج'، 'ع' ہیں۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' کو حوالے کا مثلث قرار دو اور فرض کرو کہ نقطے 'د'، 'ع'، 'ف' علی الترتیب (عہ، بہ، جہ)، (عہ، بہ، جہ)، (عہ، بہ، جہ) ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$۰ = \frac{لہ}{عہ} + \frac{سہ}{بہ} + \frac{نہ}{جہ} \dots\dots\dots (۱)$$

ہے۔

ب د اور ا ع کی مساواتیں $\frac{عہ}{جہ} = \frac{جہ}{بہ}$ اور $\frac{بہ}{جہ} = \frac{جہ}{بہ}$

ہونگی۔

اس لیے ان کے نقطہ تقاطع پر $\frac{عہ}{جہ} = \frac{بہ}{جہ} = \frac{جہ}{بہ} = ۱$

اسی طرح ج د اور ا ف نقطہ (ع، ا، ج) پر ملتے ہیں،

اور ج ع اور ب ع نقطہ (ا، ب، ج) پر ملتے ہیں۔

یہ تین نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں گے اگر

(۳۷۶)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{ج} & \frac{1}{ج} & \frac{1}{ج} \\ \hline \frac{1}{ب} & \frac{1}{ب} & \frac{1}{ب} \\ \hline \frac{1}{ع} & \frac{1}{ع} & \frac{1}{ع} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{ع}{ج} & \frac{ب}{ج} & ۱ \\ \hline \frac{ع}{ب} & ۱ & \frac{ج}{ب} \\ \hline ۱ & \frac{ب}{ع} & \frac{ج}{ع} \\ \hline \end{array} = ۰ \text{، یا اگر}$$

(۲) لیکن چونکہ تین نقطے د، ع، ف، مخروطی (۱) پر ہیں اسلئے

$$\frac{ل}{ع} + \frac{م}{ب} + \frac{ن}{ج} = ۰$$

$$\frac{ل}{ع} + \frac{م}{ب} + \frac{ن}{ج} = ۰$$

$$\frac{ل}{ع} + \frac{م}{ب} + \frac{ن}{ج} = ۰ \text{ اور}$$

ل، م، ن کو ساقط کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ شرط (۲) پوری ہوتی ہے۔ اور اس لئے مسئلہ ثابت ہے۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۲۴ مثال ۳]۔ چونکہ چھ نقطوں کو ترتیب میں ساٹھ مختلف طریقوں سے لیا جاسکتا ہے اس لئے مخروطی پر چھ نقطوں کے جواب میں ساٹھ مسدس ہوتے ہیں اور چونکہ ان میں سے ہر مسدس کے لیے پیاسکل کا مسئلہ درست ہے اس لئے مخروطی پر کے چھ نقطوں کے جواب میں ساٹھ پیاسکل خطوط

ہوتے ہیں۔ — اگر ایک مسدس ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے تو اسکے ضلعوں کے نقاط تماس اس مسدس کے راس ہوں گے جو مخروطی میں کھینچا گیا ہو۔ حائل مسدس کا ہر راس، اندرونی مسدس کے متناظر ضلع کا قطب ہوگا، اس لیے حائل مسدس کا ایک وتر یعنی وہ خط جو دو متقابلہ راسوں کو ملاتا ہے اس نقطہ کا قطبی ہوگا جو اندرونی مسدس کے دو متقابلہ ضلعوں کا نقطہ تقاطع ہے۔ لیکن اندرونی مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے زوجوں کے تین نقاط تقاطع پیا سکاں کے مسئلہ کی رو سے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں، اس لیے ان کے تین قطبی یعنی حائل مسدس کے تین وتر ایک نقطہ پر ملیں گے۔ اس سے بریان کان (Brianchon) کا مسئلہ ثابت ہوتا ہے جو یہ ہے کہ اگر ایک مسدس کو ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے تو اس کے تین وتر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

(۳۷۷)

۲۹۳۔ اگر ایک مخروطی کے پانچ تماس دے گئے ہوں تو ہم ان کے نقاط تماس کو بریان کان کے مسئلہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دے ہوئے تماسوں سے جو مخمس بنتا ہے اس کے راس ا، ب، ج، د، ع ہیں۔ تب اگر ا ب کا نقطہ تماس گ ہو تو ا، گ، ب، ج، د، ع، ایک حائل مسدس کے راس ہیں جس کے دو ضلع منطبق ہیں۔ بریان کان کے مسئلہ کی رو سے د گ، ا ج اور ب ع کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے، اس طرح کی معلوم ہو جاتا ہے۔ دوسرے نقاط تماس بھی اسی طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں اسی طرح پیا سکاں کے مسئلہ سے ہم پانچ دے ہوئے نقطوں پر کسی مخروطی کے تماس معلوم کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ پانچ

دے ہوئے نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ع' ہیں اور فرض کرو کہ مخروطی پر
اسے لا انتہا قریب ایک نقطہ 'ف' ہے۔ تب پیا سکاں کے مسئلہ
سے 'ا' 'ب' اور 'د' 'ع' 'ب' 'ج' اور 'ع' 'ف' 'ج' 'د' اور 'ف' 'ع'
کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہونے چاہئیں۔ پس
اگر 'ا' 'ب' اور 'د' 'ع' 'ب' 'ج' اور 'ع' 'ف' کے نقاط تقاطع کو ملائیو الاخط
ج 'د' سے 'ہ' پر ملے تو 'ا' 'ہ' پر کا نماں ہوگا۔ دوسرے نماں
جی اسی طرح معلوم کئے جائیں گے۔

ماسی محدود

۲۹۴۔ اگر کسی خط مستقیم کی سہ خطی یا قریبی مساوات کے تین مستقل
'ل' 'م' 'ن' ہوں تو خط کا محل متعین ہو جائے گا جبکہ 'ل' 'م' اور 'ن'
دے گئے ہوں۔ اور 'ل' 'م' 'ن' کی قیمتوں کو بدلنے سے مساوات
کسی خط مستقیم کو تعبیر کر سکے گی۔

مقداروں 'ل' 'م' 'ن' کو جن سے اس طرح ایک خط مستقیم کا محل متعین
ہوتا ہے خط کے محدود کہتے ہیں۔
اگر ایک خط مستقیم کی مساوات قریبی محدودوں میں

ل + لا + م + ما + ن ی = ۰
ہو تو حوالے کے مثلث کے راسوں سے اس خط مستقیم پر عمودوں کے
(۳۷۸) طول 'ل' 'م' 'ن' کے متناسب ہوں گے۔ یہ نتیجہ دفعہ ۲۶۰ سے ماخوذ
ہوتا ہے لیکن ہم اس کا علاحدہ ثبوت دیں گے۔

فرض کرو کہ حوالے کے مثلث کے راسوں 'ا' 'ب' 'ج' سے
خط مستقیم پر کھینچے ہوئے عمودوں کے طول علی الترتیب 'ف' 'ق' 'ر'
ہیں۔ فرض کرو کہ خط مستقیم ضلع 'ب' 'ج' کو 'ک' پر قطع کرتا ہے اور
فرض کرو کہ 'ک' کے محدود (۰، 'ما'، 'ن') ہیں۔

تب ق:ر = ب:ک:ج:ک = - ی:ما
لیکن چونکہ گ خط پر ہے اس لئے م + ا + ن ی = . اور اسلئے

ق:ر = م:ن
۲۹۵۔ اگر حوالے کے مثلث کے راسوں سے ایک خط مستقیم پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے طولوں کو خط کے محدود کہا جاسکتا ہے۔ اگر ان میں سے کوئی دو عمود مختلف سمتوں میں ہوں تو یہ سمجھنا ہوگا کہ انکی علامتیں مختلف ہیں۔

دفعہ ماسبق سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک خط کی مساوات جبکہ خط کے محدود ف، ق، ر ہوں ف + لا + ق + ما + ری = . ہے۔

جب ایک خط مستقیم پر کھینچے ہوئے تین عمودوں میں سے دو کے طول دئے گئے ہوں تو خط کے دو اور صرف دو محل ہوتے ہیں اور اس لیے جب خط کے دو محدود دئے جاتے ہیں تو تیسرے محدود کی قیمت دو مخصوص قیمتوں میں سے ایک ہوتی ہے۔ پس ایک خط کے تین محدودوں میں کوئی خاص متماثلہ رشتہ ہونا چاہئے اور وہ دوسرے درجہ کا ہونا چاہئے۔

۲۹۶۔ وہ متماثلہ رشتہ معلوم کرنا جو کسی خط مستقیم کے

تین محدودوں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ط وہ زاویہ ہے جو خط ضلع ب ا سے بناتا ہے تب ق - ف = ج جب ط اور ق - ر = ا جب (ط + ب) - ط کو ساتھ کرنے پر مطلوبہ رشتہ

$$ا(ق - ف) - ۲ ا ج ب (ق - ف) (ق - ر) + ج(ق - ر) = ۴ ا$$

$$\text{یعنی } ۳ ف ا - ۲ ق ر ب ج = ۴ ا$$

میں علی الترتیب ع، و، ط، ء، و، ط کے صغیر ہیں۔ چونکہ ع، و، ط، ء کا مقطع

ع	ط	و
ط	و	ع
و	ع	ط

میں ع، و، ط، ء، و، ط کے صغیروں کے متناسب ہیں اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر سا (ل، م، ن) = اس مخروطی کی ماسی مساوات ہو جس کی رقبی مساوات فہ (لا، ما، ی) = ہے تو فہ (ل، م، ن) = اس مخروطی کی ماسی مساوات ہوگی جس کی رقبی مساوات سا (لا، ما، ی) = ہے۔

۲۹۹۔ کسی ماس کے نقطہ تماس کی مساوات کو دفعہ ۲۳۸ میں استعمال شدہ طریقہ کے مشابہ طریقہ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ مساوات

$$ف = \frac{فره}{فرق} + ق \frac{فره}{فرق} + ر \frac{فره}{فرق} =$$

$$یا \quad ف = \frac{فره}{فرق} + ق \frac{فره}{فرق} + ر \frac{فره}{فرق} =$$

ہے جہاں فہ (ف، ق، ر) = مخروطی کی مساوات ہے اور ف، ق، ر ماس کے محدود ہیں۔

اگر (ف، ق، ر) منحنی کا ماس نہ ہو تو اوپر کی مساوات (ف، ق، ر) کے قطب کی مساوات ہوگی۔

مرکز، لانتنا ہی پر کے خط کا قطب ہے اور لانتنا ہی پر کے خط کے محدود ۱، ۱، ۱ ہیں اس لیے منحنی کے مرکز کی مساوات

$$= \frac{فره}{فرق} + \frac{فره}{فرق} + \frac{فره}{فرق} =$$

۳۰۰۔ اگر ایک مثلث ایک مخروطی میں اور دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جاسکے تو ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور ایسے تمام مثلث ایک تیسرے ثابت مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوتے ہیں۔
فرض کرو کہ حوالے کا مثلث، مخروطی

$$س_۱ = \frac{ل_۱}{ع_۱} + \frac{م_۱}{ب_۱} + \frac{ن_۱}{ج_۱} = ۰$$

میں اور مخروطی

$$س_۲ = \frac{ل_۲}{ع_۲} + \frac{م_۲}{ب_۲} + \frac{ن_۲}{ج_۲} = ۰$$

کے گرد کھینچا گیا ہے۔
اب س_۱ کے کسی نقطہ (ا) سے مخروطی س_۱ کے دو مماس 'ا ب'، 'ا ج'، 'ا کھینچو اور فرض کرو کہ یہ مماس مخروطی س_۱ کو 'ب'، 'ج' پر مکرر قطع کرتے ہیں۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ 'ب ج'، 'مخروطی س_۱ کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محدود (ع_۱، ب_۱، ج_۱) وغیرہ ہیں۔ (۳۸۱)
تب خطوط 'ا ب'، 'ا ج'، 'مساواتوں

$$۰ = \frac{ل_۱}{ع_۱} + \frac{م_۱}{ب_۱} + \frac{ن_۱}{ج_۱}$$

$$۰ = \frac{ل_۲}{ع_۲} + \frac{م_۲}{ب_۲} + \frac{ن_۲}{ج_۲} \quad \text{اور}$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

چونکہ یہ خطوط m کو مس کرتے ہیں اسلئے [دفعہ ۲۸۴]

$$\frac{l}{r} عم عم + \frac{m}{r} عم عم + \frac{n}{r} عم عم = 0, \quad \frac{l}{r} عم عم + \frac{m}{r} عم عم + \frac{n}{r} عم عم = 0$$

$$\text{ایسے} \quad \frac{\frac{l}{r} عم عم}{عم عم - عم عم} = \frac{\frac{m}{r} عم عم}{عم عم - عم عم} = \frac{\frac{n}{r} عم عم}{عم عم - عم عم}$$

اس لیے b ج کو

$$\frac{l}{r} عم عم + \frac{m}{r} عم عم + \frac{n}{r} عم عم = 0, \dots \dots (1)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اور یہ m کو مس کرتا ہے کیونکہ $\frac{l}{r} عم عم + \frac{m}{r} عم عم + \frac{n}{r} عم عم = 0$

$$= \frac{n}{r} عم عم +$$

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ m میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد چھپی جاسکتی ہے جن کے ضلع m کو مس کریں۔

اب b ج کی مساوات کو شکل

$$(2) \dots \dots = \frac{\frac{l}{r} عم عم}{عم عم - عم عم} + \frac{\frac{m}{r} عم عم}{عم عم - عم عم} + \frac{\frac{n}{r} عم عم}{عم عم - عم عم}$$

میں بھی لکھا جاسکتا ہے اس لیے

$$\frac{ل\ عم\ عم\ عم}{ر} = \frac{م\ م\ م\ م\ م}{م} = \frac{ن\ ج\ ج\ ج\ ج}{ن} \dots (۳)$$

مخروطی $س = ل\ عم + م\ م + ن\ ج =$
 کے لحاظ سے نقطہ (عم، م، ج) کا قطبی

$$ل\ عم + م\ م + ن\ ج =$$

ہے۔

یہ وہی خط ہے جو ب ج ہے جس کی مساوات

$$= \frac{ل\ عم}{عم\ عم} + \frac{م\ م}{م\ م} + \frac{ن\ ج}{ج\ ج}$$

$$\frac{ل\ عم\ عم\ عم}{ر} = \frac{م\ م\ م\ م\ م}{م} = \frac{ن\ ج\ ج\ ج\ ج}{ن}$$

$$\frac{ل\ ل}{ل} = \frac{م\ م}{م} = \frac{ن\ ن}{ن}$$

پس وہ تمام مثلث جو مخروطی

$$س = \frac{ل}{عم} + \frac{م}{م} + \frac{ن}{ج} =$$

میں اور مخروطی

$$س = \sqrt{ل\ عم} + \sqrt{م\ م} + \sqrt{ن\ ج} =$$

کے گرد کھینچے گئے ہوں مخروطی

$$س = \frac{ل}{ر} + \frac{م}{م} + \frac{ن}{ن} =$$

کے لحاظ سے خود قطبی ہوتے ہیں۔
فرض کرو کہ $س$ پر کوئی نقطہ (عہ، بیہ، جہ) ہے۔ تب $س$ کے
لحاظ سے اس کا قطبی

$$\frac{ل}{ل} عہ + \frac{م}{م} بیہ + \frac{ن}{ن} جہ = ۰ \dots (۴)$$

ہے۔ وہ شرط کہ (۴)، مخروطی $س$ کو مس کرے یہ ہے کہ

$$۰ = \frac{ل}{ل} عہ + \frac{م}{م} بیہ + \frac{ن}{ن} جہ$$

$$۰ = \frac{ل}{ل} عہ + \frac{م}{م} بیہ + \frac{ن}{ن} جہ$$

جو $س$ پر کے کسی نقطہ کے لیے درست ہے۔

اس طرح $س$ اور $س$ ، $س$ کے لحاظ سے، ایک
دوسرے کے متکافی ہیں۔

مثال۔ اگر ایک مثلث جو $س$ کے لحاظ سے خود قطبی
ہو مخروطی $س$ کے گرد کھینچا جاسکے تو $س$ میں ایسے مثلثوں کی
لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو $س$ کے لحاظ سے خود قطبی

ہوں۔

مخروطیوں کی مساواتوں کو

$$س \equiv عہ + بیہ + جہ = ۰$$

$$س \equiv لہ + مم + نن = ۰$$

لیا جاسکتا ہے۔

مخروچی میں 'بہ' اور 'جہ' کو ان نقطوں پر مس کرتا ہے جو خط

(1) - ...

پر واقع ہیں۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ ۵۰ جہاں غدا (۱) مخروطی سے کو قطع کرتا ہے

(عربی میں) (جس) (ہے) (تو)

(۲)..... ' = نه جبر + مه بر + له عم

اور $e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \pi$ (۳)

سے کے لحاظ سے (عمر، جسم،) کا قطبی

لہ عم (لہ عم - مہ بہ - نہ جم) + مہ بہ (- لہ عم + مہ بہ - نہ جم)

$$+n\text{جہ} - (\text{لے} - \text{دے} + \text{نہ جہ}) = 0$$

یہ یا (۲) کی رُو سے $\text{جم} + \text{جم} = \dots \dots \dots (۴)$

اب خط (۴) کی رُوسے میں کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں $\frac{ع_۲}{ع_۱} = \frac{ب_۲}{ب_۱}$

پس اگر فاضل سے کہ نقطوں ق، م پر قطع کرے تو یہ نقطے

(± ع، '، '، - ج،) -

اب میں نے لحاظ سے قیامت، مزدوج ہیں اگر

ل.ع. (- ل.ع. - م.ب. + ن.ج.) + م.ب. (+ ل.ع. + م.ب. + ن.ج.)

تہجہ، (+ لہ عم - مہ ہم - نہ جم) = .

اور یہ (۳) سے حاصل ہوتا ہے۔

پس مثلث ف ق س میں ہے اور س کے لحاظ سے

خود قطعی ہے۔

اب دُفعہ ۳۰۰ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اس میں ایسے مثلثوں کی لاتعدادی

تعداد کیسچی جاسکتی ہے جو س کے لحاظ سے خود قطعی ہوں۔

۳۰۱۔ فرض کرو کہ ایک مخروطی میں پر کوئی چار نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہیں۔ چار زاویے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کے وتری مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو۔ اب چار نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کو (۱±، ۱±، ۱±) لیا جاسکتا ہے، ان کو ملانے والے خطوں کے تین زوج
 $ب^۲ - ج^۲ = ۰$ ، $ج^۲ - ع^۲ = ۰$ ، $ع^۲ - ب^۲ = ۰$

ہیں۔ نیز میں کی مساوات شرط $ع + و + ط = ۰$ کے ساتھ $ع^۲$
 $+ و^۲ + ط^۲ = ۰$ ہے۔
 پس میں، مساواتوں

$$\frac{ب^۲ - ج^۲}{و} = \frac{ج^۲ - ع^۲}{ط} = \frac{ع^۲ - ب^۲}{و}$$

میں سے کسی ایک سے حاصل ہوتا ہے۔
 اب حسب ذیل تین مخروطیوں پر غور کرو:

$$س \equiv ل (ل ع + م ب + ن ج) - (ب^۲ - ج^۲) | ع = ۰$$

$$س \equiv ل (ل ع + م ب + ن ج) - (ج^۲ - ع^۲) | و = ۰$$

$$س \equiv ل (ل ع + م ب + ن ج) - (ع^۲ - ب^۲) | ط = ۰$$

جہاں $ل ع + م ب + ن ج = ۰$ کوئی خط مستقیم ہے۔ (۱) سے یہ صاف ظاہر ہے کہ یہ تمام مخروطی، میں پر کے اسی چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں، پس میں پر کے اسی چار نقطوں میں سے گزرتے ہوئے تین مخروطیوں کو کھینچنا ممکن ہے انہیں سے ہر مخروطی خطوں کے زوج (ا' ب' ج' د) (ا' ج' ب' د) (ا' د' ب' ج) میں سے

ایک کے ساتھ دو ہر تاس رکھتا ہے، اور وتر تاس کسی دے ہوئے خط ل $ع + م + ب + ن$ جہ $= ۰$ پر ہوتے ہیں۔

اگر ل کو ایسا منتخب کیا جائے کہ س کوئی دیا ہوا مخروطی ہو

جو اب ج د کو ف ق پرس کرے تو س اور س میں معلوم ہو جاتے ہیں اور یہ وہ مخروطی ہیں جو س اور س کے چار نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں اور علی الترتیب خطوں کے زوجوں (۱ ج ب د) (۱ د ب ج) کو مس کرتے ہیں، ہر صورت میں ف ق وتر تاس ہے۔

۳۰۲۔ اب فرض کرو کہ مخروطی س میں کھینچے ہوئے دو مثلث ۱ ج ب، ۱ ب ج ایسے ہیں کہ ضلع ۱ ب ج، ۱ ج ب، ۱ ب ج، مخروطی س کو علی الترتیب نقطوں ف، ق، ف، ق پر مس کرتے ہیں۔

اب دفعہ ۳۰۱ کی رو سے (۱ اور ۱ ب ب) س اور س کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے ایک مخروطی کو مس کریں گے اور نقاط تاس وہ نقطے ہوں گے جہاں ف و ف علی الترتیب ۱ ب ب کو قطع کرتا ہے۔

نیز ۱ ب ب اور ج ج، س اور س کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے ایک مخروطی کو مس کریں گے اور نقاط تاس وہ نقطے ہوں گے جہاں ق ق علی الترتیب ۱ ب ب اور ج ج کو قطع کرتا ہے۔

اب س کے لحاظ سے ف ق کا قطب ب ہے اور ف ق کا ب۔ اس لئے ۱ ب ب، و کا قطبی ہے جہاں و ف ق اور ف ق کا نقطہ تقاطع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ف و ف اور ق ق و

کے قطبی پر ملتے ہیں۔

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ میں اور میں کے نقاط تقاطع میں گزرنے والا ایک ہی مخروطی (۱) 'ب' ج 'ج' کو مس کرے گا۔ اب چونکہ (۱) اور ج 'ج' میں اور میں کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے مخروطی کو مس کرتے ہیں اس لیے یہ مستطیل ہوتا ہے کہ ج 'ج' اور آ ج بھی نظام کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

پس اگر ایک مخروطی میں ایک مثلث کھینچا جائے اور اس کے دو ضلع ایک مخروطی میں کو مس کریں تو تیسرا ضلع ایک مخروطی میں کو مس کرے گا، ان تینوں مخروطیوں کے نقاط تقاطع وہی ہوں گے۔ اگر تیسرا ضلع میں کو اس کے ایک محل میں مس کرے تو تیسرا ضلع ہمیشہ میں کو مس کرے گا [دفعہ ۳۰۰]۔

۳۰۳۔ پھر فرض کرو کہ مخروطی میں ایک مثلث (۱) ج 'ج' کھینچا گیا ہے اور فرض کرو کہ (۱) ب 'ج' مخروطی میں کو مس کرتا ہے اور ج 'ج' مخروطی میں کو مس کرتا ہے جہاں یہ تینوں مخروطیوں میں سے اسی چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث (۱) ج 'ج' کا دوسرا محل (۱) ج 'ج' ہے اور فرض کرو کہ ج 'ج' سے میں کے دوسرے پاس ج 'ج' کا لا ہیں جہاں نقاط لا 'لا' مخروطی میں پر ہیں۔

تب دفعہ ۳۰۱ سے (۱) اور ج 'ج' دونوں اس چار نقطہ نظام کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں کیونکہ (۱) ج 'ج' 'ج' مخروطی میں کو مس کرتے ہیں۔

(۳۸۵) اسی طرح ب ب اور ج ج 'نظام کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں، علیٰ ہذا ب ب اور لا لا بھی۔
چار نقطہ نظام کے صرف دو مخروطی ب، ب کو مس کریں گے اور اگر ان کے نقاط تماس ک، ک ہوں تو سمت {ب ک ب ک} موسیقی ہے کیونکہ ک، ک اُس درہنج کے دو ہرے نقطے ہیں جس کا ایک مزدوج زوج ب، ب ہے [دفعہ ۲۱۳ مثال ۵]۔ پس نظام کا صرف ایک مخروطی، ب ب کو ب اور ب کے درمیان ایک نقطہ پرس کرے گا لیکن اگر ا، ا اور ب، ب اور ج، ج اور لا، لا اور لا، لا ہم قریب ہوں تو متناظر و تراس، ب ب کو ب اور ب کے درمیان قطع کریں گے۔

اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر مثلث ا ب ج کو تبدیل کر کے اس طرح گھمایا جائے کہ وہ محل ا ب ج اختیار کرے اور اس اثناء میں ضلعوں کی سمتوں میں کوئی اچانک تبدیلیاں نہ ہوں تو خطوط ا، ا، ب، ب، ج، ج سب کے سب نظام کے ایک ہی مخروطی کو مس کریں گے۔ [یہ ا، ا، ب، ب اور لا، لا کے لیے بھی درست ہے]۔ اب چونکہ ا، ا اور ج، ج، نظام کے اسی مخروطی کو مس کرتے ہیں اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ا، ج اور ا، ج اس چار نقطہ نظام کے اسی مخروطی کو مس کرتے ہیں، اس لیے ا، ج کا لاف ایک ثابت مخروطی ہے۔ [اسی طرح لا، لا کا لاف بھی دو سر ثابت مخروطی ہے]۔

پس اگر ا ب ج کو مخروطی میں اس طرح کھینچا جائے کہ ا ب، مخروطی میں، کو مس کرے اور ب ج، مخروطی میں، کو مس کرے اور مخروطیوں میں، میں، کے نقاط تقاطع ایک ہی ہوں تو ضلع ج، ا، ا، ہی چار نقطوں میں سے گزرنیوالے

ایک یا دوسرے ثابت محروطی کو مس کرے گا۔

۳۰۴۔ اب کثیر ضلعی Δ ب ج د کی صورت پر غور کرو جو ایک محروطی میں اس طرح کھینچا گیا ہے کہ اس کے تمام ضلع سوائے ایک کے ایک محروطی میں Δ کو مس کرتے ہیں۔ چونکہ Δ ب ج د محروطی میں Δ کو مس کرتے ہیں اس لیے Δ ج ایک ایسے محروطی میں Δ کو مس کرتا ہے جو Δ اور Δ کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ پھر چونکہ Δ ج اور Δ د، اس چار نقطی نظام کے محروطیوں کو مس کرتے ہیں اس لیے Δ د، نظام کے دوسرے محروطی کو مس کرتا ہے، علیٰ ہذا القیاس۔ پس کثیر ضلعی کا باقی ضلع ایک ایسے ثابت محروطی Δ کو لف کرے گا جو Δ اور Δ کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے، اور اگر باقی ضلع محروطی میں Δ کو اس کے کسی محل میں مس کرے تو وہ ہمیشہ میں Δ کو مس کرے گا۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک مثلث کے لیے (دفعہ ۳۰۰) اور ایک چار ضلعی کے لیے (دفعہ ۲۸۹) مثال ۳) درست ہے، اور جب Δ ب ج د.... کے تمام ضلع میں Δ کو مس کرتے ہیں تو کسی ضلع کو بھی باقی (آزاد) ضلع تصور کیا جاسکتا ہے اور Δ اور دوسرے محروطی Δ کے چار سے زیادہ مشترک مماس نہیں ہو سکتے۔

(۳۸)

یہ اندرونی اور حائل کثیر ضلعیوں کا (Porism) ہے یعنی

اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک محروطی میں اس طرح کھینچا جاسکے کہ اس کے ضلع ایک دوسرے محروطی کو مس کریں تو ایسے کثیر ضلعی تعداد میں لامتناہی ہونگے۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۲۰ اور دفعہ ۳۲۱]

مثال ۱۔ ایک نقطہ سے دو دے ہوئے مخروطیوں کے تماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں جو موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے۔
مخروطیوں کے مشترک خود قطبی مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو اور فرض کرو کہ ان کی مساواتیں

$$e^2 = la + ma + p^2 \quad \text{اور} \quad e^2 = la + ma + p^2 =$$

ہیں۔
نقطہ (ف، گ، ہ) سے پہلے مخروطی کے تماس مساوات
(e² = la + ma + p²) (e² = la + ma + p²) (e² = la + ma + p²)
سے حاصل ہوتے ہیں۔
یہ تماس خط e = کو ایسے نقطوں پر قطع کرتے ہیں جن کو نقطہ (ا، ب) سے ملایا جائے تو خطوط

$$e^2 = la + ma + p^2 \quad \text{اور} \quad e^2 = la + ma + p^2 =$$

اسی طرح دوسرے مخروطی کے لیے

$$e^2 = la + ma + p^2 \quad \text{اور} \quad e^2 = la + ma + p^2 =$$

$$۶۱ (و ط + و ط) ف + و و (ط ع + ط ع) گ + ط ط (ع و)$$

$$۰ = ۲ (ع و + و و)$$

میں تحویل پذیر ہے۔ پس مطلوبہ طریق مخروطی

$$۳ ۶۶ (و ط + و ط) لا = ۰$$

ہے۔

اس مخروطی کو اکثر فا = سے تعبیر کیا جائے گا۔

چونکہ ایک نقطہ میں سے گزرنے والے تین منطبق خطوط اور کوئی دوسرا خط ایک موسیقی نپسل بناتے ہیں اس لیے مخروطی خادے ہوئے مخروطیوں کے مشترک مماسوں کے آٹھ نقاط اس میں سے گزرتا ہے، اس کی تصدیق بڑی آسانی سے اس مسافات سے کیجا سکتی ہے جو مخروطی فا کی ہے۔

مثال ۲۔ ایک خط مستقیم دو دے ہوئے مخروطیوں کو نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع کرتا ہے جو موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا لغات ایک مخروطی ہے۔ ہم مخروطیوں کی مساداتوں کو

(۳۸۷)

$$۶ لا + و ما + ط ی = ۰ اور ۶ لا + و ما + ط ی = ۰$$

لے سکتے ہیں۔

خط لا + م + ن ی = ۰ پہلے مخروطی کو ان نقطوں پر قطع کرتا جن کو نقطہ (ا، ا، ا) کے ساتھ ملایا جائے تو خطوط

$$۶ (م + ن ی) + و ل + ما + ط ل ی = ۰$$

$$یا (۶ م + و ل) + ما + ۲ م ن م ی + (ط ل + و ن) ی = ۰$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اسی طرح دوسرے مخروطی کے لیے خطوط

$$(\epsilon_1^2 + \rho_1^2) + \epsilon_2^2 + \rho_2^2 + \epsilon_3^2 + \rho_3^2 + \epsilon_4^2 + \rho_4^2 = 0$$

حاصل ہوں گے۔

چونکہ خطوں کے یہ زوج موسیقی طور پر مزدوج ہیں اس لیے

$$(\epsilon_1^2 + \rho_1^2) + (\epsilon_2^2 + \rho_2^2) + (\epsilon_3^2 + \rho_3^2) + (\epsilon_4^2 + \rho_4^2) = 0$$

$$\epsilon_1^2 + \rho_1^2 + \epsilon_2^2 + \rho_2^2 + \epsilon_3^2 + \rho_3^2 + \epsilon_4^2 + \rho_4^2 = 0$$

$$= (\epsilon_1^2 + \rho_1^2) + (\epsilon_2^2 + \rho_2^2) + (\epsilon_3^2 + \rho_3^2) + (\epsilon_4^2 + \rho_4^2) = 0$$

پس $\epsilon_1^2 + \rho_1^2 + \epsilon_2^2 + \rho_2^2 + \epsilon_3^2 + \rho_3^2 + \epsilon_4^2 + \rho_4^2 = 0$ کا لغات اوپر کی شرط کے ساتھ مخروطی

$$= \frac{\epsilon_1^2}{\rho_1^2} + \frac{\epsilon_2^2}{\rho_2^2} + \frac{\epsilon_3^2}{\rho_3^2} + \frac{\epsilon_4^2}{\rho_4^2} = 0$$

ہے۔

اس مخروطی کو اکثر $\epsilon^2 = 0$ سے تعبیر کیا جائے گا۔

چونکہ ایک خط مستقیم پر تین منطبق نقطے اور کوئی دوسرا نقطہ ایک موسیقی سمت بناتے ہیں اس لیے مخروطی $\epsilon^2 = 0$ دے ہوئے مخروطیوں کے مشترک نقطوں پر کے ماسوں کو مس کرتا ہے، اس کی تصدیق اسی مساوات سے بخوبی ہو سکتی ہے۔

مثال ۳۔ چار دائرے اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ

چار دے ہوئے خطوں میں سے تین تین سے جو چار مثلث بنتے ہیں انہیں سے ہر ایک دائروں میں سے ایک کے لحاظ سے

خود قطبی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر چار ضلعی کے دتروں سے بنے ہوئے مثلث کے گرد ایک دائرہ کھینچا جائے تو یہ دائرہ اور مذکورہ بالا چار دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھینگے۔

دتروں سے بنے ہوئے مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو تو چار خطوط مستقیم کی مساواتیں $ل = م \pm ن$ جب $ن = ۰$ ہونگی۔ وہ تمام مخروطی جن کے لحاظ سے خطوط

$$ل = م + ن \quad م = ن \quad ل = م - ن \quad م = ن - ل$$

اور $ل = م + ن$ جب $ن = ۰$ ۔

ایک خود قطبی مثلث بناتے ہیں مساوات

$$ل (ل = م + ن) + م (ل = م - ن) + ن (ل = م - ن)$$

میں شامل ہیں۔ اگر یہ مخروطی ایک دائرہ ہے تو اس کی مساوات کو شکل

$$۱) \quad ل = م + ن \quad م = ن \quad ل = م - ن$$

$$۲) \quad ل = م + ن \quad م = ن \quad ل = م - ن$$

میں رکھا جاسکتا ہے اور اس کا اور حالت دائرہ کا بنیادی محور $ل = م + ن$ جب $ن = ۰$ ہے۔ (۱) اور (۲) میں $ل = م + ن$ اور $ل = م - ن$ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ل}{ل} = \frac{م}{م} = \frac{ن}{ن}$$

اس لئے بنیادی محور کی مساوات

$$\frac{ل}{ل} + \frac{م}{م} + \frac{ن}{ن} = ۰$$

ہے۔ سر کیا تمام دائروں کے لیے یہ مساوات وہی ہے۔

مثال ۴۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ اُس مثلث کو جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے۔ تب چار ضلعی کے ضلعوں کی مساواتیں ل \pm م \pm ن \pm ج = ۰ ہونگی۔ [دفعہ ۲۶۲]

مخروطیوں میں سے کسی ایک کی مساوات $\epsilon + \epsilon^2 + \omega^2 + \omega^3 = ۰$ ہوگی

[دفعہ ۲۸۶] اُن دو مماثلوں کی مساوات جو نقطہ (ϵ, ω^2) سے کھینچے گئے ہوں

$(\epsilon + \epsilon^2 + \omega^2 + \omega^3) - (\epsilon + \epsilon^2 + \omega^2 + \omega^3)$

$= ۰$

ہے۔ وہ شرط کہ یہ خطوط عمود ہوں یہ ہے [دفعہ ۲۵۹] کہ

$\epsilon(\omega^2 + \omega^3 + \omega^4) + \omega(\epsilon^2 + \epsilon^3 + \epsilon^4) = ۰$

$\epsilon + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \epsilon^4 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = ۰$

پس مخروطی $\epsilon + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = ۰$ کے مرتب دائرہ کی مساوات

$\frac{\epsilon + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4}{\epsilon} + \frac{\epsilon^2 + \epsilon^3 + \epsilon^4 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4}{\omega} = ۰$

$\therefore = \frac{\epsilon + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4}{\epsilon} + \frac{\epsilon^2 + \epsilon^3 + \epsilon^4 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4}{\omega} = ۰$ (۱)

ہوگی۔ لیکن چونکہ مخروطی چار خطوں ل \pm م \pm ن \pm ج = ۰ کو مس کرتا ہے اسلئے

مسادات

$$= \begin{vmatrix} 1 + \frac{\Delta^2}{r} & -1b \cdot جم ج & -1ج \cdot جم ب \\ -1b \cdot جم ج & 1 + \frac{\Delta^2}{r} & 1ب \cdot جم ا \\ -1ج \cdot جم ب & -1ب \cdot جم ا & 1 + \frac{\Delta^2}{r} \end{vmatrix}$$

سے حاصل ہوتے ہیں جو

$$\Delta^2 \cdot لا \cdot با \cdot ی + ر^2 \cdot ج + 1ب \cdot ی + 1ج + 1ا = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

تیرہویں باب پرشالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کو ایک دے ہوئے مثلث میں کھینچا جائے تو اس کا محور اصغر مثلث کے اندرونی دائرہ کے قطر سے متجاوز نہیں ہو سکتا۔

۲۔ ایک مثلث کا رقبہ اس کے راسوں کے سہ خطی محدودوں یا رقبئی محدودوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

۳۔ اگر چار مخروطی ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہوں تو کسی دو کے چار نقاط تقاطع اور دوسرے دو کے چار نقاط تقاطع ایک مخروطی پر واقع ہوں گے۔

۴۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے مشترک مماسوں کے آٹھ نقاط تماس ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے مشترک نقطوں پر کے آٹھ مماس

گئے ہیں جو ایک نقطہ F میں سے گزرتے ہیں اور مقابل کے ضلعوں سے
 'ا' 'ب' 'ج' پر ملتے ہیں۔ نیز 'ب' 'ج' سے 'ک' پر ملتا ہے،
 'ج' 'ا' سے 'ل' پر ملتا ہے، اور 'ا' 'ب' 'ا' 'ب' سے 'د' پر ملتا ہے۔
 ثابت کرو کہ 'ک' 'ل' ہر ایک خط مستقیم پر ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) اگر
 F ایک خط مستقیم پر حرکت کرے تو 'ک' 'ل' ہر ایک مخروطی کو جو مثلث
 'ا' 'ب' 'ج' میں کھینچا گیا ہو مس کرے گا، (۲) اگر F ایک ثابت مخروطی پر
 جو مثلث 'ا' 'ب' 'ج' کے گرد کھینچا گیا ہو حرکت کرے تو 'ک' 'ل' ہر ایک
 ثابت نقطہ میں سے گزرے گا، (۳) اگر F ایک ثابت مخروطی پر حرکت
 کرے جو مثلث کے دو ضلعوں کو ان نقطوں پر مس کرتا ہے جہاں تیسرا ضلع
 ان سے ملتا ہے تو 'ک' 'ل' ہر ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۱۲۔ ایک مثلث کے راسوں 'ا' 'ب' 'ج' سے خطوط کھینچے
 گئے ہیں جو ایک نقطہ O میں سے گزرتے ہیں اور مقابل کے ضلعوں سے
 'ا' 'ب' 'ج' پر ملتے ہیں۔ اسی طرح نقطہ O میں سے گزرتے ہوئے خطوط
 مقابل کے ضلعوں سے 'ا' 'ب' 'ج' پر ملتے ہیں۔ اگر 'ب' 'ج' اور 'ب' 'ج'
 کا نقطہ تقاطع F 'ج' 'ا' اور 'ج' 'ا' کا نقطہ تقاطع 'ق' 'ا' 'ب' اور 'ا' 'ب'
 کا نقطہ تقاطع 'س' ہو تو ثابت کرو کہ 'ا' 'ف' 'ب' 'ق' 'ج' 'س' ایک نقطہ
 سے پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر 'ا' 'ب' 'ج' میں سے گزرنے والے
 ایک ثابت مخروطی پر 'و' کوئی دو نقطے ہوں تو نقطہ سے ثابت ہو گا۔

۱۳۔ مکانی $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$ کا ماسکہ اور مرتب

معلوم کرو۔

۱۴۔ مکانی $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$ کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک دئے ہوئے چار ضلعی میں مخروطی کھینچے گئے ہیں اور ان
 مخروطیوں کے تماس ایک ثابت خط کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت
 کرو کہ ان تماسوں کے نقاط تماس کا طریق ایک کروی ہے۔ نیز چار ضلعی سے

۲۱۔ اگر ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے اور اس کا مرکز ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو اس کے ایک کعبی پر جو مثلث کو حائل کرتا ہے واقع ہونے لگے۔

۲۲۔ اُن قائم زاہدوں کے مرکروں کا طریق جن کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود مزدوج ہو حائل دائرہ ہوگا۔

۲۳۔ اُن تمام قائم زاہدوں کے مرکروں کا طریق جو حوالے کے مثلث میں کھینچے گئے ہوں خود مزدوج دائرہ ہوگا۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کا نو نقطی دائرہ اندرونی دائرہ کو اور ہر جانبی دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۲۵۔ نو نقطی دائرہ کے اُن نقطوں پر کے تماس جہاں وہ اندرونی اور جانبی دائروں کو مس کرتا ہے ایک چار ضلعی بناتے ہیں جس کا ہر وتر مثلث کے ایک راس میں سے گزرتا ہے اور وہ خطوط جو ابتدائی مثلث کے راسوں کو وتروں سے جڑے ہوئے مثلث کے متناظر راسوں سے ملاتے ہیں سب کے سب نو نقطی دائرہ اور حائل دائرہ کے بنیادی محور کے متوازی ہوتے ہیں۔

۲۶۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے قطبی علی الترتیب 'ج'، 'ا'، 'ب' ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ج'، 'ا'، 'ب' نقطہ پر ملتے ہیں۔

۲۷۔ اگر ایک مساوی النجا و زواہ ایک مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کے ضلعوں کے نقاط وسطی میں سے گزرے اور ضلعوں 'ب'، 'ج'، 'ا'، 'ا'، 'ب' کو مکرر 'ع'، 'ب'، 'ج' پر قطع کرے تو 'ع'، 'ب'، 'ج'، 'ع'، 'ب'، 'ج' کے حائل دائرہ پر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۲۸۔ دو دہے ہوئے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دہے ہوئے خط مستقیم کے نقطوں کے قطبی معلوم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تمام نقطوں کے تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو دہے ہوئے مخروطیوں کے

مشترک خود مزدوج مثلث کو مائل کر تا ہے۔

۲۹۔ دو مخروطی دو ہر اتماں رکھتے ہیں۔ ان میں سے ایک مخروطی کے ماس کھینچے گئے ہیں اور ان ماسوں کے قطب دوسرے مخروطی کے لحاظ سے معلوم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہے جو دونوں مخروطیوں کے ساتھ ان کے مشترک نقطوں پر دو ہر اتماں رکھتا ہے۔

۳۰۔ ایک مخروطی میں دو مثلث کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے چھ قطع دوسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۳۱۔ دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے چھ راس ایک دوسرے مخروطی پر ہیں اور ان کے چھ قطع ایک تیسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۳۲۔ اگر ایک مثلث ایسا کھینچا جاسکے کہ وہ ایک دے ہوئے مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہو اور اس کے راس دوسرے دے ہوئے مخروطی پر واقع ہوں تو ایسے مثلث تعداد میں لامتناہی کھینچے جاسکتے ہیں۔

۳۳۔ متشابہ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جو ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے مرکز چوتھے درجہ کے ایک منحنی پر واقع ہیں جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں سے گذرتا ہے اور مثلث کے راس اس کے دو ہرے نقطے ہیں۔

۳۴۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ب'، 'ج' چھ ایسے نقطے ہوں کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ چھ خطوط مستقیم 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ب'، 'ج' پر ملتے ہیں۔

۳۵۔ ایک مثلث میں ایک ایسا مخروطی کھینچا گیا ہے کہ نقاط اتماں پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک منحنی ہے جس کے مقارب مثلث کے ضلعوں پر عمود ہیں۔

(۳۹۲)

۳۶۔ ایک چار ضلعی Δ ج د کو ایک مخروطی میں کھینچا گیا ہے اور $\text{ع}^1 \text{ع}^2 \text{ع}^3 \text{ع}^4$ اُن عمودوں کے طول ہیں جو راسوں Δ ج د سے مخروطی کے کسی دوسرے تماس پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نسبت $\frac{\text{ع}^1 \text{ع}^2}{\text{ع}^3 \text{ع}^4}$ مستقل ہے۔

۳۷۔ کسی مخروطی کے لحاظ سے ایک مثلث کے راسوں Δ ج کے قطبی، مقابل کے ضلعوں سے نقطوں Δ ج پر پڑتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر Δ ج کے قطر مانکر دائرے کھینچے جائیں تو یہ دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھیں گے۔

۳۸۔ ایک مکانی ایک مثلث کے ایک ضلع کو اس کے وسطی نقطہ پر مس کرتا ہے اور دوسرے دو محدودہ ضلعوں کو بھی مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ عمود جو مثلث کے راسوں سے مخروطی کے کسی تماس پر کھینچے گئے ہوں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ حاطہ دائرہ کی حماسی مسادات Δ ف + ب | ق + ج | ر = ۰ ہے۔ پس ثابت کرو کہ نقطہ دائرہ کی حماسی مسادات

$$1 \mid \text{ق} + \text{ر} + \text{ب} \mid \text{ر} + \text{ف} + \text{ج} \mid \text{ف} + \text{ق} = ۰$$

۴۰۔ ایک دے ہوئے مثلث میں ایک مخروطی کھینچا گیا ہے جس کے محوروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۱۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو ایک ہی مثلث میں

کھینچے گئے ہوں اُس دائرے سے علی القوائم قطع ہوتے ہیں جس کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود قطبی ہے۔

۴۲۔ وہ دائرے جو ایک کابل چار ضلعی کے وتروں پر ان کو قطر بانکر کھینچے گئے ہوں اُس دائرے سے علی القوائم قطع ہوتے ہیں جو وتروں سے بنے ہوئے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

۴۳۔ اگر تین مخروطی ایک ہی چار ضلعی کو حاطط کریں تو ثابت کرو کہ کسی دو کا مشترک تماس تیسرے سے موسیقی طور پر منقطع ہوتا ہے۔

۴۴۔ اگر تین مخروطی ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے دو کے ایک مشترک نقطہ پر ان کے تماس اور اس نقطہ سے تیسرے کے تماس ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۴۵۔ ایک نقطہ سے دو مساوی دائروں کے تماس کھینچے گئے ہیں جو ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے جو ایک ناقص ہوگا اگر دائرے حادہ زاویہ پر متقاطع ہوں اور دو متوازی خطوط مستقیم ہوگا اگر دائرے علی القوائم متقاطع ہوں۔

(۳۹۴)

۴۶۔ ایک مثلث کے راس ایک دے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر ہیں اور اس کے دو ضلع ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۴۷۔ اگر ایک مخروطی تین ثابت خطوط مستقیم کو مس کرے اور ایک دے ہوئے نقطہ ف میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ایک ثابت خط مستقیم کے قلب کا طریق ایک مخروطی ہے جو ف کے تمام محلوں کے لئے تین ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔

۴۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے اندر دو نقطے و و لے گئے ہیں۔ مثلث کے راسوں اور و و میں سے گزرتے ہوئے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں پر علی الترتیب نقطوں کے زوج لا اور کا، ہا اور ما، سے اور سے متعین کرتے ہیں۔ مثلثوں لا ما سے لا ما سے

کے متناظر ضلع نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ چھ نقطے 'لا'، 'ما'، 'ے'، 'لا'، 'ما'، 'ے' ایک مخروطی پر واقع ہیں جس کے لحاظ سے 'ف'، 'ق'، 'س' ایک خود قطبی مثلث ہے۔

$$۴۹۔ اگر مخروطی \epsilon \lambda^2 + \omega \mu^2 + \tau \gamma^2 + ۲\epsilon \gamma \mu + ۲\omega \lambda \gamma = ۰$$

مثلث 'ا ب ج' کے ضلعوں کو نقطوں کے تین زوجوں میں قطع کرے اور ان نقطوں کو مقابل کے راسوں سے ملایا جائے تو یہ چھ خطوط مستقیم مخروطی

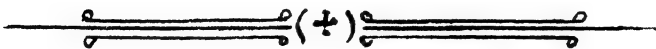
$$\epsilon \lambda^2 + \omega \mu^2 + \tau \gamma^2 - ۲\epsilon \omega \tau \mu \gamma = ۰$$

کو مس کریں گے۔

۵۰۔ بنیادی مثلث کے راسوں سے ($\epsilon \omega \tau \mu \gamma$) (لامائی) کے ماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں اور ہر زوج متقابل کے ضلعوں کے ساتھ نقطوں کا ایک زوج متعین کرتا ہے۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس پر یہ چھ نقطے واقع ہیں اور ثابت کرو کہ مخروطی

$$\sqrt{\lambda^2 \omega \tau - \epsilon \gamma^2} + \sqrt{\mu^2 \tau \epsilon - \omega \gamma^2} + \sqrt{\gamma^2 \epsilon \omega - \lambda^2 \tau^2} = ۰$$

اور اوپر کے دو مخروطی ایک مشترک اندرونی چار ضلعی رکھتے ہیں۔



چودہواں باب

متکافی قطبی ظل

۵۔ ۳۔ اگر ایک شکل ایک ستوی میں متعدد نقطوں اور خطوط مستقیم پر مشتمل ہو اور اگر ہم ایک ثابت مخروطی ج کے لحاظ سے ان نقطوں کے قطبی اور ان خطوط کے قطب لیں تو ایک دوسری شکل حاصل ہوگی جس کو امدادی مخروطی ج کے لحاظ سے اول الذکر کا قطبی متکافی کہا جائے گا۔

جب ایک شکل کا ایک نقطہ اور متکافی شکل کا ایک خط امدادی مخروطی ج کے لحاظ سے قطب اور قطبی ہوتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے کے متناظر ہیں۔

اگر ایک شکل میں ایک تنہی سے ہو تو وہ خطوط جو اس کے مختلف نقطوں کے متناظر ہیں سب کے سب کسی تنہی سے کو مس کریں گے۔ فرض کرو کہ اس کے دو نقطوں 'ف' و 'ق' کے متناظر خطوط پر ملتے ہیں تو 'ف' خط 'ق' کا قطب بلحاظ ج ہے یعنی خط 'ف' نقطہ 'ق' کے متناظر ہے۔ اب اگر نقطہ 'ق' 'ف' کی جانب حرکت کر کے بالآخر اس پر منطبق ہو جائے تو اس کے متناظر دو محاس بھی بالآخر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور ان کا نقطہ تقاطع

بالآخر منحنی میں پر ہوگا اور اس خط کے نقطہ تماس پر منطبق ہوگا جو نقطہ
ف کے متناظر ہے۔ پس میں کا ایک تماس منحنی میں کے ایک نقطہ
کے متناظر ہوتا ہے عین ویسے ہی جیسے میں کا کوئی تماس میں کے
ایک نقطہ کے متناظر ہوتا ہے۔ اس لیے میں میں سے ٹھیک اسی
طرح تکون پاتا ہے جس طرح میں میں سے چنانچہ ہمیں وہی منحنی میں
حاصل ہوگا خواہ ہم میں کے مختلف نقطوں کے قطبیوں کا لفافہ
لیں یا میں کے مختلف تماسوں کے قطبیوں کا طریق لیں۔

۳.۶۔ اگر کوئی خط 'ل' منحنی میں کو متعدد نقطوں 'ف' 'ق' 'س' ... (۳۹۶)
پر قطع کرے تو نقطوں 'ف' 'ق' 'س' ... کے متناظر میں کے
تماس حاصل ہوں گے اور یہ تماس سب کے سب ایک نقطہ میں سے
گذریں گے یعنی اس نقطہ میں سے جو امدادی مخروطی کے لحاظ سے 'ل'
کا قطب ہے۔ اس لیے ایک نقطہ میں سے میں کے اتنے ہی تماس
کھینچے جاسکتے ہیں جتنے نقطہ میں پر ایک ہی خط مستقیم میں ہوتے ہیں۔
یعنی میں کی جماعت (class) دفعہ ۲۳۸ میں کے درجہ کے
مساوی ہوتی ہے اور میں کا درجہ میں کی جماعت کے مساوی ہوتا ہے۔
بالخصوص اگر میں ایک مخروطی ہو تو وہ دوسرے درجہ کا اور
دوسری جماعت کا ہوگا۔ اس لیے متکافی منحنی دوسری جماعت کا
اور دوسرے درجہ کا ہوگا اور اس لیے وہ بھی ایک مخروطی ہے۔

۳.۷۔ ایک مخروطی کا قطبی متکافی دوسرے مخروطی کے

لحاظ سے معلوم کرنا۔
فرض کرو کہ ان مخروطیوں کی مساواتیں ان کے مشترک
خود قطبی مثلث کے حوالے سے

$$میں \equiv ع ع + و و + ط ط جہ = ۰$$

اور $s_p = e_p^2 + w_p^2 + p_p^2 = 0$

ہیں۔ s_p پر کے کسی نقطہ (e_p^2, w_p^2, p_p^2) کا قطبی لمحاظ s_p کے
 $e_p^2 + w_p^2 + p_p^2 = 0$

ہے۔ اس کا لاف شرط $e_p^2 + w_p^2 + p_p^2 = 0$ کے ساتھ

$$= \frac{e_p^2}{e_p} + \frac{w_p^2}{w_p} + \frac{p_p^2}{p_p} = 0$$

ہے۔ مخروطی l, e, w, n جہ $= 0$ کے لحاظ سے s_p کا
 شکافی

$$= \frac{e^2 l}{e} + \frac{w^2 m}{w} + \frac{n^2 n}{n} = 0$$

ہے۔ یہ مساوات مخروطی s_p کو تعبیر کرے گی اگر

$$\frac{l}{e} = \frac{m}{w} = \frac{n}{p}$$

پس مخروطی s_p اور s_p مخروطیوں

$$e^2 \pm w^2 + p^2 = 0$$

میں سے کسی ایک کے لحاظ سے ایک دوسرے کے شکافی ہیں۔
 ۳۰۸۔ کسی دئے ہوئے مسئلہ سے جو نقطوں اور خطوں کے محلوں
 متعلق ہو ایک دوسرا مسئلہ شکافی قطبیوں کے طریقہ سے ماخوذ کیا

جا سکتا ہے جس میں نقطوں کی بجائے خطوط مستقیم اور خطوط مستقیم کی بجائے نقطے ہونگے۔

متناظر کی سادہ ترین صورتیں حسب ذیل ہیں:

(۱) ایک شکل کے نقطے شکافی شکل میں خطوط مستقیم میں شکافی ہوتے ہیں۔

(۲) دو نقطوں کو ملانے والا خط، متناظر خطوں کے نقطہ تقاطع میں شکافی ہوتا ہے۔

(۳) کسی منحنی کا مماس، شکافی شکل کے متناظر منحنی پر ایک نقطہ میں شکافی ہوتا ہے۔

(۴) مماس کا نقطہ تماس، متناظر نقطہ پر کے مماس میں شکافی ہوتا ہے۔

(۵) اگر دو منحنی مس کر رہے ہوں تو اگر دو منطبق نقطے مشترک ہوں تو شکافی منحنیوں میں دو منطبق مماس مشترک ہوں گے اور اس لیے وہ (شکافی منحنی) ایک دوسرے کو مس کریں گے۔

(۶) وہ وتر جو ایک منحنی کے دو نقطوں کو ملاتا ہے شکافی منحنی کے متناظر ناموں کے نقطہ تقاطع میں شکافی ہوتا ہے۔

(۷) وہ خط جو دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کو ملاتا ہے متناظر نقطوں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع میں شکافی ہوتا ہے۔

(۸) چونکہ امدادی مخروطی کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط کا

قطب لگتا ہی پر ہوتا ہے اس لیے شکافی منحنی پر لگتا ہی

پر کے نقطے ابتدائی منحنی کے ان مماسوں کے متناظر ہونگے

جو امدادی مخروطی کے مرکز سے کھینچے گئے ہوں۔ پس ایک

مخروطی کا شکافی قطع زائد، شکافی، یا ناقص ہو گا بموجب اسکے کہ

امدادی مخروطی سے اس کے مماس حقیقی، منطبق، یا خیالی

ہوں یعنی بموجب اسکے کہ امدادی مخروطی کا مرکز منحنی کے

باہر یا اس پر یا اس کے اندر ہو۔

حسب ذیل مثالیں تکافی مسلوں کی ہیں:-

(۱) اگر دو مثلثوں کے راس ایک مخروطی پر ہوں تو ان کے چھ تقاطع راس کے چھ ضلع دوسرے مخروطی پر ہوں گے۔
(۱) اگر دو مثلثوں کے راس ایک مخروطی پر ہوں تو ان کے چھ تقاطع راس کے چھ ضلع دوسرے مخروطی پر ہوں گے۔

(۲) اگر ایک مخروطی میں ایک مسدس کھینچا جائے تو اس کے متقابلہ ضلعوں کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔
(۲) اگر ایک مخروطی کے گرد ایک مسدس کھینچا جائے تو اس کے متقابلہ راسوں کو ملانے والے تین خطوط ایک نقطہ پر ملینگے۔
(بریا نکاں کا مسلم)

(۳) اگر ایک مثلث کے تین راس ایک مخروطی پر واقع ہوں اور اس کے ضلعوں میں سے دو ایک دوسرے مخروطی کو مس کریں تو تیسرے ضلع کا لفاف ایک مخروطی ہوگا۔
(۳) اگر ایک مثلث کے تین ضلع ایک مخروطی کو مس کریں اور اس کے راسوں میں سے دو دوسرے مخروطی پر واقع ہوں تو تیسرے راس کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔

(۴) اگر ایک مثلث کے راس ایک مخروطی پر واقع ہوں تو وہ تین نقاط تقاطع جو ایک ضلع اور متقابلہ راس پر کے تماس کے تقاطع سے
(۴) اگر ایک مثلث کے ضلع ایک مخروطی کو مس کریں تو وہ تین خطوط جو ایک ایک راس کو متقابلہ کے ضلع کے

حاصل ہوتے ہیں ایک خط پر واقع ہوتے ہیں۔

(۵) چار دئے ہوئے خطوط مستقیم کو س کرنے والے مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطب سب کے سب ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

نقطہ تماس سے ملاتے ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۵) چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی سب کے سب ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

(۶) چار ثابت خطوں کو س کر نیوالے مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کا تغاف ایک مخروطی ہوتا ہے۔

(۶) چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔

۳۰۹۔ اب ہم ان نتیجوں پر غور کریں گے جو ایک دائرہ کے لحاظ سے مکافات کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ ایک دائرہ کے مرکز اور کسی نقطہ F کو ملانے والا خط دائرہ کے لحاظ سے F کے قطبی پر عمود ہوتا ہے۔ اس لیے اگر F ، Q کوئی دو نقطے ہوں اور ایک دائرہ کے لحاظ سے ان کے قطبی معلوم کئے جائیں تو ان قطبیوں کا درمیانی زاویہ اس زاویہ کے مساوی ہوگا جو F کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔ اس مسئلہ کا شکافی یہ ہے کہ کسی دو خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ اس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ان خطوط کے

قطبوں کو ملانے والے خط کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔
 نیز ہم جانتے ہیں کہ ایک دائرہ کے مرکز سے کسی نقطہ کے اور
 اُس کے قطبی (دائرہ کے لحاظ سے) کے فاصلے ایک دوسرے کے
 بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

۳۱۔ اگر ہم ایک دائرہ کے لحاظ سے مکافات کریں تو یہ واضح
 ہے کہ امدادی دائرہ کے نصف قطر میں کسی تبدیلی سے متکافی منحنی کی
 تعبیر میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی بلکہ صرف اس کے جثہ میں تبدیلی
 ہوگی۔ اب چونکہ متکافی منحنی کے خطوط کی مطلق مقداروں سے بالعموم
 واسطہ نہیں رہتا اس لیے صرف امدادی دائرہ کے مرکز کو معلوم کرنا
 ضرورت ہوگی۔ اس لیے یہ کہنے کی بجائے کہ ایک دائرہ کے لحاظ
 سے جس کا مرکز وہ ہے مکافات کی گئی ہے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک
 نقطہ کے لحاظ سے مکافات کی گئی ہے۔

۳۱۱۔ اگر کسی مخروطی کو ایک نقطہ کے لحاظ سے متکافی کیا جائے
 تو متکافی منحنی کے وہ نقطے جو ابتدائی منحنی کے اُن مماسوں کے متناظر
 ہیں جو و میں سے گزرتے ہیں لامتناہی فاصلہ پر ہونے چاہئیں اس لیے
 متکافی منحنی پر کے اُن نقطوں کی سمتیں جو لاتناہی پڑیں اُن مماسوں
 پر عمود ہیں جو و سے ابتدائی منحنی کے کھینچے گئے ہیں۔ اور
 اس لیے متکافی منحنی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ
 کا متعم ہوگا جو و سے کھینچے ہوئے ابتدائی منحنی کے مماسوں کے درمیان ہے۔

بالخصوص اگر و سے ابتدائی منحنی کے مماس علی القوائم ہوں تو
 متکافی منحنی قائم زاویہ ہوگا۔ نیز متکافی مخروطی کے محور اُس کے متقاربوں کے
 درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔ اس لیے محور اُن زاویوں کے

ناصریوں کے متوازی ہیں جو دسے کھینچے ہوئے ابتدائی منحنی کے حماسوں کے درمیان ہیں۔

ابتدائی مخروطی کے لاتناہی پر کے نقطوں کے جواب میں مکانی منحنی کے وہ حماس حاصل ہوتے ہیں جو مبداء میں سے گزرتے ہیں۔ پس مکانی مخروطی کے وہ حماس جو مبداء سے کھینچے گئے ہوں ان خطوں کی سمتوں پر عمود ہوں گے جو مبداء سے ابتدائی منحنی کے لاتناہی پر کے نقطوں کی جانب کھینچے گئے ہوں۔ اسلئے ابتدائی مخروطی کے مستقاربوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کا متمم ہوتا ہے جو مبداء سے کھینچے ہوئے مکانی منحنی کے حماسوں کے درمیان ہے۔

بالخصوص اگر ایک قائم زاؤ کو کسی نقطہ کے لحاظ سے مکانی کیا جائے تو اسے مکانی منحنی کے حماس ایک دوسرے کے علی القوم ہوں گے، یہ الفاظ دیگر و، مکانی مخروطی کے مرتب دائرہ پر ایک نقطہ ہے۔

۳۱۲۔ مبداء کا مکانی، لاتناہی پر کا خط ہوتا ہے اور اس لیے مبداء کے قطبی کا مکانی، لاتناہی پر کے خط کا قطب ہے۔ یعنی مبداء کا قطبی مکانی منحنی کے مرکز میں مکانی ہوتا ہے۔

مکانات کی حسب ذیل مثالیں اہم ہیں:

۱۔ وہ تمام مخروطی جو ایک مثلث کو حاطط کرتے ہیں اور اس کے مرکز عمودی میں سے گزرتے ہیں قائم زاؤ ہوئیں۔ اگر مرکز عمودی و کے لحاظ سے مکانات کی جائے تو ایک (۴۰۰)

دوسرا مثلث حاصل ہوگا جس کا مرکز عمودی و ہوگا۔
 قائم زائد مکانی ہو جائیں گے کیونکہ وہ سب و میں سے گذرتے
 ہیں۔ اور چونکہ ان مخروطیوں میں سے کسی ایک کے لاتنا ہی پر کے
 نقطے عمودی سمتوں میں ہوتے ہیں اس لیے ان مکافیوں میں سے
 کسی ایک کے وہ ماس جو دسے کھینچے گئے ہوں علی القوام ہوں گے
 اور اس لیے نقطہ و ہر مکانی کے مرتب بد ہے۔
 پس مکانی مسئلہ حسب ذیل ہے:

ان تمام مکافیوں کے مرتب جو ایک مثلث کے تین ضلعوں
 کو مس کرتے ہیں مثلث کے مرکز عمودی میں سے گذرتے ہیں۔
 ۲۔ اگر چار دے ہوئے نقطوں میں سے گذر نیوالے
 مخروطیوں میں سے دو قائم زائد ہوں تو یہ تمام مخروطی قائم زائد
 ہوں گے۔

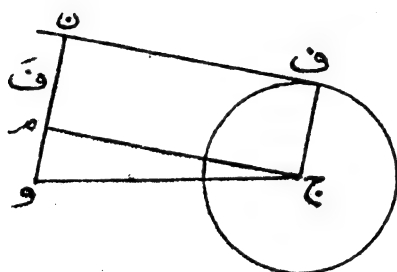
اگر اس مسئلہ کی مکافات کسی نقطہ و کے لحاظ سے کیجائے تو
 حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوگا:

اگر چار دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرنے والے
 مخروطیوں میں سے دو کے مرتب دائرے ایک نقطہ و
 میں سے گذریں تو ان تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے و میں
 سے گذریں گے۔

یعنی چار دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرنے والے

مخروطیوں کے مرتب دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۳۱۳۔ ایک دائرہ کا قطبی تثکافی بلحاظ دوسرے دائرہ کے معلوم کرنا۔



(۳۰۱) فرض کرو کہ اس دائرہ کا جس کی مکافات عمل میں لانا ہے نصف قطر ۱ اور مرکز ج ہے، فرض کرو کہ امدادی دائرہ کا مرکز و اور نصف قطر ک ہے۔ فرض کرو کہ ان دو دائروں کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ج ہے۔ فرض کرو کہ دائرہ ج کا کوئی مماس ف ن ہے اور اس مماس کا قطب بلحاظ امدادی دائرہ کے ف ہے۔ فرض کرو کہ و ف، مماس سے نقطہ ن پر ملتا ہے۔ ج م کو و ن پر عمود کھینچو۔

تب
$$و ف \times و ن = ک^۲$$

∴
$$و ف = \frac{ک^۲}{و ن} = و م + م ن = ج م + ج و م + ۱$$

∴ ف کے طریق کی مسادات

$$\frac{r}{1} = 1 + \frac{c}{r} \text{ جم طہ}$$

ہے۔ یہ ایک مخروطی کی مساوات ہے جس کا ماسکہ و نیم وتر خاص

$\frac{r}{1}$ ، اور خروج مرکز $\frac{c}{r}$ ہے۔ اس مخروطی کا مرتب وہ خط ہے جس کی مساوات

$$\frac{r}{c} = \text{جم طہ} \text{ یا لا} = \frac{r}{c}$$

ہے۔

پس متکافی منحنی کا مرتب ابتدائی منحنی کے مرکز کا قطبی ہے۔

خروج مرکز کی محصلہ بالا قیمت سے یہ واضح ہے کہ متکافی منحنی ایک ناقص ہوگا اگر نقطہ و دائرہ ج کے اندر ہو، ایک زائد ہوگا اگر نقطہ و دائرہ ج کے باہر واقع ہو، اور ایک مکافی ہوگا اگر و دائرہ ج کے محیط پر ہو۔

مثال ۱۔ مخروطی کے مماس جو کسی نقطے سے کھینچے گئے

ہوں ماسکہ پر مساوی زاوے بناتے ہیں۔

اس ماسکہ کے لجاٹ سے مکافات عمل میں لاؤ۔ تب مخروطی کے دو مماسوں کے متناظر دو نقطے ایک دائرہ پر حاصل ہوں گے، اور ان مماسوں کے نقطہ تقاطع کے متناظر ایک خط حاصل ہوگا جو دائرہ پر کے دو نقطوں کو ملاتا ہے، نیز مخروطی کے ان مماسوں کے نقاط تماس کے متناظر وہ مماس حاصل ہوں گے جو دائرہ پر کے نقطوں پر تماس کے کھینچے گئے ہوں۔ لیکن

کسی دو نقطوں کے محاذی مخروطی کے ماسکہ پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ان نقطوں کے متناظر خطوں کے درمیان ہوتا ہے پس شکافی مسئلہ حسب ذیل ہے۔

وہ خط جو ایک دائرہ پر کے دو نقطوں کو ملاتا ہے ان نقطوں پر کے محاسوں کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔
مثال ۲۔ اگر مخروطی کا ایک وتر ایک ثابت نقطہ پر قائمہ زاویہ بنائے تو اس وتر کا لفاف ایک مخروطی ہوگا جسکا ایک ماسکہ و ہوگا اور متناظر مرتب وہ خط ہوگا جو ابتدائی مخروطی کے لحاظ سے و کا قطبی ہے۔

و کے لحاظ سے مکافات کرو تو یہ مسئلہ حسب ذیل ہو جاتا ہے:
اگر ایک مخروطی کے محاس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائیں تو ان محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم مرکز دائرہ ہوگا۔

مثال ۳۔ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو ان کے مشترک وتروں میں سے دو ان کے مرتبوں نقطہ تقاطع میں سے گذریں گے۔

مشترک ماسکہ کے لحاظ سے مکافات کرو تو مسئلہ حسب ذیل ہوتا ہے:
دو دائروں کے مشترک محاسوں کے نقاط تقاطع میں سے دو اس خط پر ہوتے ہیں جو دائروں کے مرکوزوں کو ملاتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک مثلث کو ایک مکانی کے گرد کھینچا گیا ہے

اس مثلث کا مرکز عمودی مرتب پر ہوگا۔ مرکز عمودی کے لحاظ سے مکافات کرو تو حاصل ہوگا:

وہ محروطی جو ایک مثلث کو حائل کرتا ہے اور اس کے مرکز عمودی میں سے گذرتا ہے ایک قائم زاہد ہوتا ہے۔

آٹھویں باب میں مندرجہ متعدد مثالیں مکافات کے ذریعہ ثابت کیجا سکتی ہیں، مثلاً ۲۳ کا مشکانی، مشترک ماسکہ کے لحاظ سے صبیقل ہے:

مادی نصف قطروں کے دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے مرکز ایک دوسرے دائرہ پر ہیں۔

ثابت کرو کہ یہ سب دائرے دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں جن کے نصف قطر، متحرک دائرہ اور دوسرے دائرہ کے نصف قطروں کا علی الترتیب مجموعہ اور فرق ہیں اور جو دوسرے دائرہ کے ہم مرکز ہیں۔

۳۱۲۔ اگر دائروں کا ایک ایسا نظام ہو جن کا بنیادی محور وہی ہو تو ہم ان دائروں کو ہم ماسکی محروطیوں کے ایک نظام میں مشکانی کر سکتے ہیں۔

اگر کسی نقطہ کے لحاظ سے مکافات کی جائے تو محروطیوں کا ایک نظام حاصل ہوگا جن کا ایک ماسکہ و پر ہوگا اور کسی محروطی کا مرکز [دفعہ ۳۱۲] متناظر دائرہ کے لحاظ سے وئے قطبی کا مشکانی ہوگا۔

اب اس نظام کے ”دو انتہائی نقطوں“ میں سے ایک ایسا ہے کہ نظام کے کسی دائرہ کے لحاظ سے اس کا قطبی ایک ثابت خط استقیم ہے یعنی وہ خط جو دوسرے انتہائی نقطہ میں سے گذرتا ہے اور بنیادی محور کے متوازی ہے۔ پس اگر دائروں کو ایک انتہائی نقطہ کے لحاظ سے مشکانی کیا جائے تو تمام مشکانیوں کا مرکز ایک ہی ہوگا اور اگر یہ تمام مشکانی ایک مشترک مرکز اور ایک مشترک ماسکہ رکھتے ہوں تو وہ ہم ماسکی ہوں گے۔ نیز چونکہ بنیادی محور ایک انتہائی نقطہ کے قطبی کے

متوازی ہے اور انتہائی نقطہ اور اس کے قطبی کے وسط میں واقع ہے اس لیے اس انتہائی نقطہ کے لحاظ سے بنیادی محور کا منکافی اس خط پر ہے جو منکافی محروطیوں کے ماسکہ اور مرکز میں سے گذرتا ہے اور وہ ماسکہ سے مرکز کی یہ نسبت دو چند فاصلہ پر واقع ہے پس جب ہم محروطیوں کے ایک نظام کو ایک انتہائی نقطہ کے لحاظ سے منکافی کرتے ہیں تو بنیادی محور ہم ماسکی محروطیوں کے دوسرے ماسکہ میں منکافی ہوتا ہے۔

حسب ذیل مسئلے منکافی ہیں:

(۱) دو ہم ماسکی محروطیوں کے (۱) دو دائروں کے ایک مشترک کسی مشترک نقطہ پر کے ماس کے نقاط تماس کے محاذی ماس علی القوائم ہوتے ہیں۔ ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔

(۲) اگر دو خطوط دو ہم ماسکی محروطیوں میں سے ہر ایک کو مس کریں اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ان خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔ (۲) اگر دو دائروں میں سے ہر ایک پر ایک نقطہ لیا گیا ہو اور ان دو نقطوں کے محاذی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنے تو ان نقطوں کو ملائیو الے خط کا لفاف ایک محروطی ہوگا جس کے ماسکوں میں سے ایک ماسکہ اس انتہائی نقطہ پر ہوگا۔

(۳) اگر کسی نقطہ سے دو ہم ماسکی محروطیوں کے ماسکوں کے دو زوج ف' ف' اور ق' ق' کھینچے جائیں تو ف' اور ق' کا درمیانی زاویہ اگر کوئی خط مستقیم دو دائروں کو نقطوں ف' ف' اور ق' ق' پر قطع کرے تو ایک انتہائی نقطہ پر ف' ق' اور ق' ق' کے محاذی مساوی زاوے بنیں گے۔

ف اور ق کے درمیانی

زاویہ کے مساوی ہوگا۔

(۴) اگر کسی نقطہ سے دو ہم سطحی

مخروطیوں کے چار تماس

ف اور ق اور ق اور ق

کھینچ جائیں اور ف کے

نقطہ تماس کو ق اور ق کے

نقاط تماس کے ساتھ ملایا

جائے تو یہ خطوط تماس ف

کے ساتھ مساوی زاوے

بنائینگے۔ [دفعہ ۱۳۰]۔

(۴) اگر کوئی خط مستقیم دو دائروں کو نقطوں

ف اور ق اور ق اور ق پر قطع

کرے اور ف پر کا تماس ق

اور ق پر کے تماسوں سے ق

ق پر ملے تو ایک انتہائی نقطہ

ف ق اور ق کے محاذی

مساوی (یا متمم) زاوے بنینگے۔

مخروطی تطیل

(۴۰۴)

۳۱۵۔ اگر کسی نقطہ ف کو ایک ثابت نقطہ ط سے ملایا جائے

اور ط ف کسی ثابت مستوی سے ف پر منقطع ہو تو نقطہ ف کو مستوی

مذکور پر ف کا ظل کہتے ہیں۔ نقطہ ط کو تطیل کا راس یا مرکز اور قاطع

مستوی کو تطیل کا مستوی کہا جاتا ہے۔

۳۱۶۔ کسی خط مستقیم کا ظل ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔

کیونکہ وہ خطوط مستقیم جو ط کو کسی خط مستقیم کے تمام نقطوں سے ملاتے

ہیں ایک مستوی میں ہوتے ہیں اور یہ تطیل کے مستوی سے ایک خط

مستقیم میں منقطع ہوتا ہے۔

۳۱۷۔ کوئی مستوی منحنی اُسی درجہ کے ایک منحنی میں منطیل ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر کوئی خط مستقیم ابتدائی منحنی سے نقطوں ا، ب، ج... پر ملے تو خط کا ظل منحنی کے منطیل سے اُن نقطوں پر ملے گا جہاں ط ا، ط ب، ط ج... منطیل کے مستوی سے ملتے ہیں۔ اس لیے ایک منحنی میں ایک خط مستقیم پر اتنے ہی نقطے ہونگے جتنے دوسرے منحنی میں ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

بالخصوص ایک مخروطی کا ظل ایک مخروطی ہوتا ہے۔

اس مسئلہ میں وہ ہندسی مسئلہ شامل ہے کہ ایک قائم مستوی

مخروط کی ہر مستوی تراش ایک مخروطی ہوتی ہے۔

۳۱۸۔ ایک منحنی کا حماس ظل کے منحنی کے حماس میں

منطیل ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر ایک خط مستقیم ایک منحنی سے دو

نقطوں ا، ب پر ملے تو اس خط کا ظل منحنی کے ظل سے دو نقطوں

ا، ب پر ملے گا جہاں ط ا، ط ب منطیل کے مستوی سے ا، ب پر ملتے ہیں۔ پس اگر ا، ب منطبق ہوں تو ا، ب بھی منطبق ہوں گے۔

۳۱۹۔ ایک منحنی کے لحاظ سے قطب اور قطبی کا رشتہ

منطیل سے نہیں بدلتا۔

یہ پچھلے دو مسئلوں سے ماخوذ ہوتا ہے۔

پہلی نظر ہے کہ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو مزدوج خط یا دو مزدوج نقطے ظل کے منحنی کے لحاظ سے دو مزدوج خطوں یا دو مزدوج

نقطوں میں مظلل ہوتے ہیں۔
 ۳۲۰۔ مثل کے راس میں سے ایک مُستوی تظلیل کے مُستوی کے متوازی کینچو اور فرض کرو کہ یہ مُستوی اصلی مُستوی کو خط Γ پر قطع کرتا ہے۔ اب چونکہ مُستوی Γ اور تظلیل کا مُستوی متوازی ہیں اس لیے ان کا خط تقاطع جو Γ کا مثل ہے لامتناہی فاصلہ پر ہے۔

پس کسی مخصوص خط مستقیم Γ کو لامتناہی فاصلہ پر مظلل کرنا ہو تو کسی نقطہ Γ کو راس اور مُستوی Γ کے متوازی ایک مُستوی کو تظلیل کا مُستوی قرار دو۔
 وہ خطوط مستقیم جو خط Γ پر کسی نقطہ میں ملتے ہوں متوازی خطوط مستقیم میں مظلل ہوں گے کیونکہ ان کا نقطہ تقاطع لامتناہی پر مظلل ہوگا۔

۳۲۱۔ اصلی مُستوی پر کے متوازی خطوط مستقیم کا کوئی نظام ایسے خطوں میں مظلل ہوگا جو ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔
 کیونکہ فرض کرو کہ Γ وہ خط ہے جو راس میں سے گذرتا ہے اور نظام کے متوازی ہے جہاں Γ تظلیل کے مُستوی پر ہے۔
 اب چونکہ Γ اس مُستوی میں ہے جو Γ میں سے اور کسی ایک متوازی خط میں سے گذرتا ہے اس لیے متوازی خطوں میں سے ہر ایک کا مثل Γ میں سے گذرے گا۔

متوازی خطوں کے مختلف نظاموں کے لیے نقطہ Γ کا محل بدلے گا، لیکن چونکہ Γ ہمیشہ اصلی مُستوی کے متوازی رہتا ہے اس لیے Γ ہمیشہ اس خط تقاطع پر ہوگا جو تظلیل کے مُستوی اور راس میں سے گذرنے والے اس مُستوی کا ہے جو اصلی مُستوی کے متوازی ہے۔

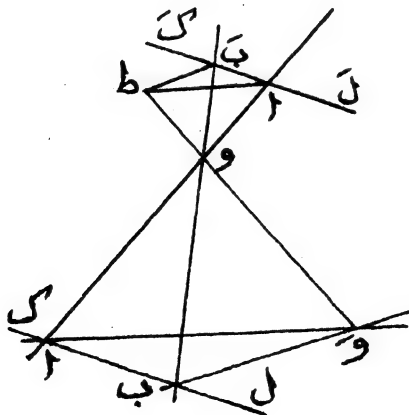
پس اصلی مُستوی پر کے متوازی خطوں کا کوئی نظام خطوں کے

ایک نظام میں مظلل ہوتا ہے جو ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ایسے تمام نقطے متوازی خطوں کے مختلف نظاموں کے لیے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۳۲۲۔ فرض کرو کہ اصلی مستوی اور تظلیل کے مستوی کا خط تقاطع ک ل ہے۔ اس میں سے ایک مستوی تظلیل کے مستوی کے متوازی کیچھو اور فرض کرو کہ وہ اصلی مستوی کو خط ک ل پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ دو خطوط مستقیم ا و ا' ب و ب' خطوط ک ل سے علی الترتیب ا ب اور ا' ب پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ ط و تظلیل کے مستوی سے ویرماتا ہے۔ تب ا و اور ب و، ا و ا' اور ب و ب' کے ظل ہیں۔

(۳۰۶)

چونکہ مستوی ط ا ب اور ا و ب متوازی ہیں اور متوازی مستوی ایک ہی مستوی سے متوازی خطوں میں منقطع ہوتے ہیں اس لیے خطوط ط ا، ط ب علی الترتیب ا و، ب و کے متوازی ہیں۔ اس لیے زاویہ ا ط ب = زاویہ ا و ب یعنی ا ط ب اس زاویہ کے مساوی ہے جس میں ا و ب مظلل ہوتا ہے۔



اسی طرح اگر خطوط مستقیم ج د اور ع د 'ک ل سے
 علی الترتیب ج 'د پر ملیں تو زاویہ ج ط د اس زاویہ کے مساوی
 ہوگا جس میں ج د ع مظلل ہوتا ہے۔
 اوپر کے مسئلہ سے غلوں کے نظریہ میں حسب ذیل مبنیادی
 مسئلہ ماخوذ ہوتا ہے:

کسی خطِ مستقیم کو لاتنا ہی مظلل کیا جاسکتا ہے اور
 اس کے ساتھ ہی کسی دو زاویوں کو دے ہوئے زاویوں
 میں مظلل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ وہ خطوط مستقیم جو دو زاویوں کی ساقوں کو تعبیر
 کرتے ہیں اس خط سے جس کو لاتنا ہی مظلل کرنا ہے نقطوں 'ا'
 'ب' اور ج 'د' پر ملتے ہیں۔ کوئی مستوی 'ا ب ج د' میں سے
 گذرتا ہوا کھینچو اور اس مستوی میں دائروں کے ایسے قطعے جو علی الترتیب
 'ا ب' اور ج 'د' میں سے گذریں اور ان میں دے ہوئے زاویوں کے
 مساوی زاوے بنیں۔ دائروں کے ان قطعوں کے نقاطِ تقاطع
 میں سے کسی ایک کو تنظیل کا مرکز قرار دیا جاسکتا ہے اور تنظیل کے
 مستوی کو اس مستوی کے متوازی لینا چاہئے جس کو ہم نے 'ا ب
 ج د' میں سے گذرتے ہوئے کھینچا ہے۔
 اگر قطعے ایک دوسرے سے نہ ملیں تو تنظیل کا مرکز خیالی ہوگا۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ کسی چار ضلعی کو ایک مربع میں

مظلل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ چار ضلعی 'ا ب ج د' ہے اور فرض کرو کہ متقابلہ ضلعوں کے
 ایک زوج کے نقاطِ تقاطع 'ف' 'ق' [دیکھو شکل دفعہ ۵] ہیں۔ فرض کرو کہ

وترب د' (ج خط ف ق سے نقطوں میں، سر پر ملتے ہیں۔ اب اگر ف ق کو لاتنا ہی پر اور اس کے ساتھ ہی زاویوں ف د ق اور س د س کو قائم زاویوں میں منسلک کیا جائے تو ظل کو ایک مربع ہونا چاہیے۔ کیونکہ ف ق لاتنا ہی پر منسلک ہو چکا ہے، اس لیے ظل میں متقابہ ضلعوں کے زوج متوازی ہوں گے یعنی ظل ایک متوازی الاضلاع ہے۔ نیز اس متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہے اور وتروں کا درمیانی زاویہ بھی قائمہ ہے، اس لیے ظل ایک مربع ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ وہ مثلث جو ایک چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے کسی مخروطی کے لحاظ سے جو چار ضلعی کے ضلعوں کو مس کرے خود قطبی ہے۔

چار ضلعی کو ایک مربع میں منسلک کرو۔ اب وہ دائرہ جو مربع کو محیط کرتا ہے مخروطی کا مرتب دائرہ ہے، اس لیے مربع کے وتروں کا نقطہ تقاطع مخروطی کا مرکز ہے۔ لیکن مرکز کا قطبی لاتنا ہی پر کا خط ہے، اس لیے وتروں میں سے دو کے نقطہ تقاطع کا قطبی تیسرا وتر ہے۔

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کو ایک چار ضلعی میں کھینچا جائے تو نقاط تماس میں سے دو کو ملائیے والا خط اس مثلث کے ایک راس میں سے گزرے گا جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے۔

مثال ۴۔ اگر ایک مکانی کے گرد مثلث (ب ج

کھینچا جائے اور متوازی الاضلاعوں (ب) (ج) (ب) (ج) (ب) (ج) اور (ج) (ج) (ب) کی تکمیل کی جائے تو وتر تماس علی الترتیب نقطوں (ا) (ب) (ج) میں سے گزریں گے۔

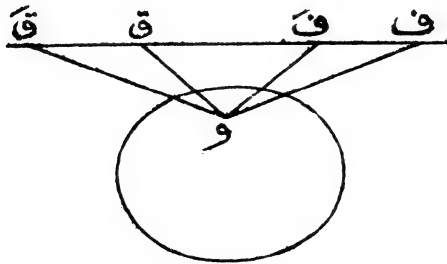
یہ مثال ۳ کی مخصوص صورت ہے جس میں چار ضلعی کا ایک ضلع لاتنا ہی پرہ کا خط ہے۔

مثال ۵۔ اگر دو مثلثوں کے راسوں کو ملانے والے تین خطوط ایک نقطہ پر ملیں تو متناظر ضلعوں کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔

متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع میں سے دو کو لاتنا ہی پر منظر کر دو تو متناظر ضلعوں کے دو زوج متوازی ہونگے اور پھر یہ بتانا آسان ہے کہ تیسرے زوج بھی متوازی ہوگا۔

(۲۰۸)

۳۲۳۔ کسی مخروطی کو ایک دائرہ میں منظر کیا جاسکتا ہے جسکا مرکز کسی دے ہوئے نقطہ کا ظل ہو۔



فرض کرو کہ وہ نقطہ ہے جس کے ظل کو ظل کے منحنی کا مرکز بنانا ہے۔

فرض کرو کہ وہ قطبی پرف کوئی نقطہ ہے اور ف کا قطبی وق ہے۔ اب وف اور وق مزدوج خطوط ہیں۔
مزدوج خطوط کا ایک اور زوج وف، وق کو۔

پھر وہ کے قطبی کو لاتنا ہی پر اور زاویوں ف، وق کا فوق کو قائمہ زاویوں میں منطلل کرو تو ایک مخروطی حاصل ہوگا جس کا مرکز و کا ظل ہوگا اور چونکہ مزدوج قطروں کے دوزوج علی التواءم ہیں اس لیے یہ مخروطی ایک دائرہ ہوگا۔

۳۲۴۔ مخروطیوں کا ایک نظام جو ایک چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں ہم ماسکی مخروطیوں میں منطلل کیا جاسکتا ہے۔
فرض کرو کہ چار ضلعی کے دو ضلع نقطہ ۱ پر متقاطع ہوتے ہیں

اور دوسرے دو ضلع نقطہ ب پر۔ کوئی مخروطی ۱ اور ب میں سے گذرتا ہو اکھینچو اور اس مخروطی کو ایک دائرہ میں منطلل کرو جبکہ خط ۱ ب کو لاتنا ہی پر منطلل کیا گیا ہو۔ اب ۱ اور ب لاتنا ہی پر انتہائی نقطوں میں منطلل ہوں گے اور چونکہ لاتنا ہی پر کے انتہائی نقطوں سے نظام کے تمام مخروطیوں کے تماس وہی ہوتے ہیں اس لیے یہ مخروطی ہم ماسکی ہونے چاہئیں۔

مثال ۱۔ چار نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطی ہم محور (۳۰۹) دائروں میں منطلل ہو سکتے ہیں۔

ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط کو لاتنا ہی پر منطلل کرو اور مخروطیوں میں سے ایک کو دائرہ میں منطلل کرو اب تمام مخروطی دائروں میں

منظیل ہوں گے کیونکہ وہ سب لاتنا ہی پر کے انتہائی نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

مثال ۲۔ وہ محرومی جو ایک دوسرے کے ساتھ دوہرا تماس رکھتے ہیں ہم مرکز دائروں میں منظور ہو سکتے ہیں۔

مثال ۳۔ ایک مسدس کو ایک محرومی میں کھینچا گیا، ثابت کرو کہ مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے تین تقاطع تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔ [پیا سکل کا مسئلہ]

محرومی کو ایک دائرہ میں اور متقابلہ ضلعوں کے دو زوجوں کے تقاطع کو ملانے والے خط کو لاتنا ہی منظور کرو تو یہ ثابت کرنا ہے کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ایک مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے دو زوج متوازی ہوں تو تیسرا زوج بھی متوازی ہوگا۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گذرنے والے تمام محرومی قائم زائدوں میں منظور ہو سکتے ہیں۔
خطوں کے تین زوج ہوں گے جو ان چار نقطوں میں سے گذریں گے اور اگر ان میں سے دو زوجوں کے درمیانی زاویوں کو قائمہ زاویوں میں منظور کیا جائے تو تمام محرومی قائم زائدوں میں منظور ہوں گے۔ [دفعہ ۱۸۷، مثال ۱]

مثال ۵۔ محرومی کے کوئی تین وتر ایک دائرہ کے مساوی وتروں میں منظور ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ (ا) 'ب' ج ج وتر ہیں فرض کرو کہ (ب) اور (ب) 'ک' پر ملتے ہیں اور (ج) اور (ج) 'ک' پر ملتے ہیں۔ محرومی کو

ایک دائرہ میں اور گ ل کو لاتا ہی پر منظر ل کر دے۔

مثال ۶۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوں تو ان کے چھ راس ایک مخروطی پر ہونگے اور ان کے چھ ضلع ایک مخروطی کو مس کریں گے۔

فرض کرو کہ مثلث (ا ب ج) (ا ب ج) ہیں۔ ب ج کو لاتا ہی پر اور مخروطی کو ایک دائرہ میں منظر ل کرو تو ا دائرہ کے مرکز میں منظر ل ہوگا اور ا ب، ا ج علی القوام ہوں گے کیونکہ (ا ب ج) خود قطبی ہے۔ نیز چونکہ (ا ب ج) دائرہ کے لحاظ سے خود قطبی ہے اس لیے (ا ب ج) کا مرکز ہندسی ہے۔

ا ب، ا ج میں سے گزرنے والا قائم زاہد ا میں سے گزرے گا اور ب میں سے گزرنے والا قائم زاہد ج میں سے گزرے گا۔ پس چونکہ ایک قائم زاہد کو کسی چار نقطوں میں سے کھینچا جاسکتا ہے اس لیے چھ نقطے (ا ب ج)، (ا ب ج)، (ا ب ج)، (ا ب ج) ایک مخروطی پر ہونگے۔ نیز ایک مکانی کھینچا جاسکتا ہے جو چار خطوط مستقیم ب ج، ج ا، ا ب، ب ا کو مس کرے۔ لیکن ا اس مکانی کے مرتب پر ہوگا [دفعہ ۵۔ ۱ (۳)] اس لیے ا ج ایک حاس ہے۔ اس لیے ایک مخروطی ان دو مثلثوں کے چھ ضلعوں کو مس کرتا ہے۔

مثال ۷۔ اگر ایک چار ضلعی کو ایک مخروطی میں اور (۴۶۰) ایک دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جاسکے تو ایسے چار ضلعی تعداد میں لامتناہی کھینچے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مخروطی میں پر چار نقطے ف، ق، س، س ہیں

اور فرض کرو کہ 'ف' 'ق' 'ر' 'س' 'س' 'ف' ایک مخروطی میں
کو مس کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ 'ف' 'ق' اور 'س' 'س' نقطہ ۱ پر 'ف' میں اور 'ق' میں
نقطہ ۲ پر 'ر' اور 'س' اور 'ق' میں نقطہ ۳ پر ملتے ہیں۔
مخروطی میں کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز ج کا ٹیل ہو مظلّل کرو
تو ۱ ج لاتنا ہی پر مظلّل ہو گا اور مخروطی میں ۱ اور میں ۲ ہم مرکز ہوں گے۔
اور چونکہ 'ف' 'ق' 'ر' میں ایک دائرہ کے اندرونی متوازی الاضلاع میں
مظلّل ہوا ہے اس لیے یہ متوازی الاضلاع ایک مستطیل ہونا چاہئے۔
لیکن ایک مستطیل کے راسوں میں سے گزرنیوالا دائرہ جس کے
ضلع ایک مخروطی کو مس کرتے ہوں مخروطی کا مرتب دائرہ ہوتا ہے۔
اس لیے اگر ایک چار ضلعی کو ایک مخروطی میں ۱ میں اور دوسرے
مخروطی میں ۲ کے گرد کھینچا جائے تو میں ۲ اور میں ۱ ایک مخروطی اور ایک
مرتب دائرہ میں مظلّل کئے جاسکتے ہیں۔

اب چونکہ ایک مخروطی کے مرتب دائرہ میں چار ضلعیوں کی لاتنا ہی
تعداد جن کے ضلع مخروطی کو مس کریں کھینچی جاسکتی ہے اس لیے مسئلہ

ثابت ہے۔ کسی شکل کے وہ خواص جو اس کے کسی ظل کے لیے

۳۲۵۔ درست ہوں ظلی خواص کہلاتے ہیں۔ بالعموم ایسے خواص میں

مقداروں سے واسطہ نہیں دہتا۔ تاہم بعض ظلی خواص ایسے ہیں
جن میں خطوں اور زاویوں کی مقداریں شامل ہوتی ہیں ان میں

سب سے اہم حسب ذیل ہے:
پنسلوں اور سقوں کی چلیبی نسبتیں تظلیل سے نہیں بدلتیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ایک خط مستقیم میں ہیں

اور ان کے ظل 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہیں۔ تب اگر تقطیل کامرکز ط ہو تو
ط ا ا' ط ب ب' ط ج ج' ط د د' خطوط مستقیم ہیں اور [دفعہ
[۵۵]

$$\{ \text{ا ب ج د} \} = \{ \text{ط ا ب ج د} \} = \{ \text{ا ب ج د} \}$$

اگر وہ چار خطوں کی کوئی پینسل ہو اور یہ پینسل کسی قاطع سے
نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' پر منقطع ہو تو

$$\{ \text{ا ب ج د} \} = \{ \text{ا ب ج د} \} = \{ \text{ط ا ب ج د} \}$$

$$\{ \text{ا ب ج د} \} =$$

$$= \{ \text{ا ب ج د} \}$$

پس اس سے اور دفعہ ۶۱ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر نقطوں کی

کوئی تعداد درپیش میں ہو تو ان کے ظل درپیش میں ہونگے۔

مثال ۱۔ مخروطی کا کوئی وتر جو ایک دائرے ہوئے نقطہ

و میں سے گزرے منحنی سے اور وہ کے قطبی سے موسیقی طور پر

تقسیم ہوتا ہے۔

ا کے قطبی کو لا تا ہی مظلل کر دو تو وظل کامرکز ہوگا اور اس لیے وتر
و پر تنصیف ہوگا اور سمت [ف وق ۵۵] موسیقی ہوگی جبکہ ف و

= وق۔

مثال ۲۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے

مخروطی کسی خط مستقیم سے نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع ہوتے ہیں جو درپیش میں ہوتے ہیں۔ [ڈیسارگ کا مسئلہ] ان میں سے دو نقطوں کو لاتنا ہی پر انتہائی نقطوں میں منظر کرو تو مخروطی ہم محور دائروں میں منظر ہوں گے اور پھر مسئلہ ثابت ہو جائیگا۔

۳۲۶۔ اُس منیل کی چلیبی نسبت جو چار متقاطع خطوط مستقیم سے بنے اُس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے جو کسی مخروطی کے لحاظ سے ان خطوط مستقیم کے قطبوں سے بنتی ہے۔

چونکہ منیلوں اور سعتوں کی چلیبی نسبتیں تغلیل سے نہیں بدلتیں اس لیے ہم مخروطی کو ایک دائرہ میں منظر کر سکتے ہیں۔ اب ایک دائرہ میں کوئی خط مستقیم اُس خط پر عمود ہوتا ہے جو دائرہ کے مرکز کو خط کے قطب (بلحاظ دائرہ) سے ملاتا ہے۔ پس اُس منیل کی چلیبی نسبت جو چار متقاطع خطوط مستقیم سے بنے اُس منیل کی چلیبی نسبت کے مساوی ہے جو دائرہ کے مرکز پر ان کے قطبوں کے محاذی بنتی ہے اور اس لیے اُس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہے جو ان کے قطبوں سے بنتی ہے۔

۳۲۷۔ اُس منیل کی چلیبی نسبت جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ کو چار ثابت نقطوں سے ملانے سے بنے مستقیم ہوتی ہے اور اُس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے جس میں ان نقطوں پر کے مماس کسی مماس سے منقطع

ہوتے ہیں۔

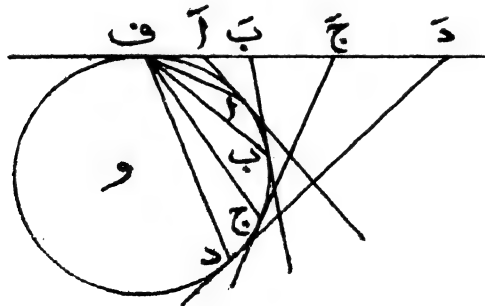
چونکہ پینلوں اور سعتوں کی طیبی نسبتیں تفصیل سے نہیں لیتیں اس لیے اس مسئلہ کو صرف ایک دائرہ کے لیے ثابت کرنا کافی ہے۔ فرض کرو کہ ایک دائرہ پر چار ثابت نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہیں، فرض کرو کہ دائرہ پر کوئی اور نقطہ 'ف' ہے اور فرض کرو کہ 'ف' پر محاس 'ا' 'ب' 'ج' 'د' پر کے محاسوں سے نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' پر ملتا ہے۔

اب اگر دائرہ کا مرکز وہ ہے تو 'ا' 'و' 'ب' 'و' 'ج' اور 'د' علی الترتیب 'ف' 'ا' 'ف' 'ب' 'ف' 'ج' اور 'ف' 'د' پر عمود ہیں۔

پس $\{ا ب ج د\} = \{و ا ب ج د\} = \{ف ا ب ج د\}$

لیکن زاوئے 'ا' 'ف' 'ب' 'ف' 'ج' 'ج' 'ف' 'د' مستقل ہیں کیونکہ 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ثابت نقطے ہیں۔

اس لیے $\{ا ب ج د\} = \{ف ا ب ج د\} = \{و ا ب ج د\}$ مستقل



اگر ق کوئی نقطہ ہو اور وہ دائرہ پر نہ ہو تو

ق { ا ب ج د } ف { ا ب ج د }
 کے مساوی نہیں ہو سکتا، یہ فوراً واضح ہو جاتا ہے اگر ہم ف ایسا
 لیں کہ ا ف ق ایک خط مستقیم ہو اور پھر ان سمتوں پر غور کریں
 جو ب ج پر ان دو پینسلوں سے بنتی ہیں۔ اس لیے حسب ذیل
 مسئلہ عکس حاصل ہوتا ہے:

اگر ایک نقطہ ف اس طرح حرکت کرے کہ اُس پینسل
 کی چلیبی نسبت جو اس کو چار ثابت نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د'
 سے ملانے سے بنے مستقل ہو تو ف ایک مخروطی مرسم کرے گا
 جو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے گزرے گا۔

مثال ۱۔ مخروطی کے دو مزدوج وتروں کے چار سرے
 اُس کے کسی نقطہ پر ایک موسیقی پینسل بناتے ہیں۔
 فرض کرو کہ وتر 'ا ج' 'ب' دیں۔ فرض کرو کہ ب د کا قطب ع
 ہے اور 'ا ج' 'ب' د کا نقطہ تقاطع ف ہے۔ یہ چار نقطہ 'ا' 'ب' 'ج' 'د'
 منحنی کے تمام نقطوں پر مساوی چلیبی نسبت کی پینسل بناتے ہیں۔ ایک
 نقطہ کو د سے لا انتہا قریب لو تو پینسل د { ا ب ج ع } کم حاصل ہوگی۔
 لیکن سمت 'ا' 'ب' 'ج' 'ع' موسیقی ہے جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

مثال ۲۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کو حاطط کریں تو
 ان کے چھ راس دوسرے مخروطی پر ہوں گے۔

فرض کرو کہ مثلث 'ا ب ج' 'ا ب ج' ہیں۔ فرض کرو کہ ب ج
 ضلعوں 'ا ب' 'ا ج' کو 'د' پر قطع کرتا ہے اور ب ج ضلعوں 'ا ب'
 'ا ج' کو 'ع' پر قطع کرتا ہے۔ تب وہ سمتیں جو چار ماسوں 'ا ب' 'ا ج' 'ب ج' 'ج د' پر

اَب، اَج پر دو ماسوں ب ج، ب ج سے بنتی ہیں مساوی ہیں۔

پس $\{ب ج ع د\} = \{ع د ب ج\}$

ا $\{ب ج ع د\} = \{ع د ب ج\}$

یا $\{ب ج ب ج\} = \{ب ج ب ج\}$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

(۴۱۳) اس مسئلہ کو اس طرح بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ب، ج کو لاتنا ہی پر کے دائری نقطوں میں منظر کیا جائے۔ چنانچہ مخروطی ایک ایسے مکانی میں منظر ہوگا جس کا ماسکہ ا ہے، اور یہ معلوم ہے کہ وہ دائرہ جو (ب ج) کو مانع کرتا ہے ا میں سے گزرتا ہے۔

۳۲۸۔ تعریف۔ سعتیں اور پنسلیں ہم رسم کہلاتی

ہیں جبکہ ایک کے ہر چار اجزاء اور دوسرے کے متناظر چار اجزاء مساوی چلیپی نسبتیں رکھیں۔

ہم رسم سعتوں یا پنسلوں کی دوسری تعریف حسب ذیل ہے: دو سعتیں یا پنسلیں ہم رسم کہلاتی ہیں جبکہ وہ اس طرح مربوط ہوں کہ ایک نظام کے ہر نقطہ یا خط کے متناظر دوسرے نظام کا ایک اور صرف ایک نقطہ یا خط ہو۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ ہم رسم سعتوں کی یہ تعریف پہلی تعریف کے مماثل ہے فرض کرو کہ دو نظاموں کے کسی دو متناظر نقطوں کے فاصلے (ثابت نقطوں سے پیمائش کردہ) لا، ما ہیں۔ تب ہمیں شکل

$$\frac{لا + ما}{د + ج} = لا$$

ج ج 'دو' ثابت خطوں سے مساوی جلیبی نسبت کی سمتوں میں منقطع ہوتے ہیں۔ پس ایک مخروطی ان ثابت خطوں کو اور نیز 'ا' 'ب' 'ج' ج 'دو' کو مس کرے گا۔ لیکن کسی مخروطی کو متعین کرنے کے لیے پانچ تماس کافی ہیں، اس لیے وہ مخروطی جو ثابت خطوں کو اور سمتوں کے متناظر نقطوں کو ملانے والے خطوں میں سے تین کو مس کرتا ہے باقی تمام دوسروں کو بھی مس کرے گا۔

مثال ۳۔ مستقل مقدار کے دو زاویے 'ف' (ق' ف' ج

ثابت نقطوں 'ا' 'ب' کے گرد حرکت کرتے ہیں اور نقطہ 'ف' ایک خط مستقیم مرسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق ایک مخروطی مرسم کرتا ہے جو 'ا' 'ب' میں سے گذرتا ہے۔ [نیوٹن]

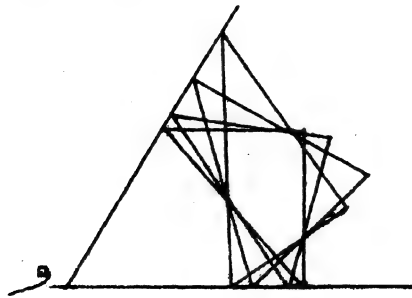
۱ ق کے ایک محل کے متناظر 'ب' ق کا ایک اور صرف ایک محل ہے۔ پس مثال اکی رو سے ق کا طریق ایک مخروطی ہے۔

مثال ۴۔ ایک مثلث کے تین ضلع ثابت نقطوں میں سے

گذرتے ہیں اور اس کے قاعدہ کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کا اس ایک مخروطی مرسم کرتا ہے۔ [میکلارن]

فرض کرو کہ تین ثابت نقطے 'ا' 'ب' 'ج' ہیں۔ اور فرض کرو کہ دو ثابت خطوط مستقیم 'و' 'و' ہیں۔ مثلثوں کو شکل کے مطابق کھینچا ہوا

سمجھو۔



تب سقیں { ا ب ج د } کے اور { ا ب ج د } کے ہم رسم ہیں۔
اس لیے پنسلیں ب { ا ب } اور ج { ا ب ج د } کے ہم رسم ہیں۔

مثال ۵۔ اگر ایک کثیر ضلعی کے تمام ضلع ثابت نقطوں میں سے گزریں اور تمام راس 'ا' کے ثابت خطوط مستقیم پر حرکت کریں تو بقیہ راس ایک مخروطی کو مشتمل کرے گا۔

مثال ۶۔ ایک مخروطی پر 'ا' (ثابت نقطے ہیں اور 'ا' سے کسی ہم ماسکی مخروطی کے ماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں جو ابتدائی مخروطی سے نقطوں ج 'د' اور ج 'د' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ج 'د' اور ج 'د' کے نقطہ تقاطع کا طریقی ایک مخروطی ہے۔

اسے ہم ماسکی کے ماس 'ا' پر کے ماس سے مساوی میلان رکھتیں [دفعہ ۲۳۰ نتیجہ صریح ۳] اس لیے وتر ج 'د' 'ا' پر کے ماس کو کسی ثابت نقطہ و قطع کرے گا [دفعہ ۱۹۶ مثال ۲]۔ اسی طرح ج 'د' بھی ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرے گا۔ اب اگر ہم و میں سے گزرتا ہوا کوئی خط وج 'د' لیں تو ایک اور صرف ایک ہم ماسکی خطوط ج 'ا' اور 'ا' کو مس کرے گا، اور 'ا' سے اس ہم ماسکی کے ماس 'ج' اور 'د' کو متعین کریں گے اور اس لیے وج 'د' کے کسی محل کے متناظر وج 'د' کا ایک اور صرف ایک محل ہے۔ اس لیے نقطہ تقاطع کا طریقی مثال انی ہو جب ایک مخروطی ہے۔

مثال ۷۔ اگر 'ا' 'ب' 'و' 'ب' 'ج' 'و' 'ج' 'د' 'د'۔

(۳۱۵)

.... ایک مخروطی کے وتر ہوں اور ف مخروطی پر کوئی نقطہ ہو تو پنسیس ف { ا ب ج د } اور ف { ا ب ج د } ہم رسم ہوں گی۔

مخروطی کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز و ہو مظلّل کرو۔

مثال ۸۔ اگر ایک مخروطی پر نقطوں کے دو نظام ہوں جن کے محاذی منحنی کے کسی نقطہ پر ہم رسم پنسیس بنیں تو وہ خطوط جو ان دو نظاموں کے متناظر نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں ایک مخروطی کو لف کر نیچے جو ابتدائی مخروطی کے ساتھ دہرا تماس رکھیگا۔

فرض کرو کہ نقطوں کے دو نظام 'ا ب ج د' اور 'ا ب ج د' ہیں۔ 'ا ب ج د' کو ایک دائرہ کے مساوی وتروں میں مظلّل کرو [دفعہ ۳۲۴ مثال ۵]۔ فرض کرو کہ متناظر نقطوں کا کوئی زوج ف ف ہے اور و دائرہ پر کوئی نقطہ ہے۔ ا ب و { ا ب ج ف } = { ا ب ج ف }۔ اس لیے ف ف = { ا ب ج ف } اور اس لیے ف ف کالفات ایک ہم مرکز دائرہ ہے۔

مثال ۹۔ اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی میں کھنچا جائے اور اس کے تمام ضلع الا ایک کے ثابت نقطوں میں سے گزریں تو بقیہ ضلع کالفات ایک مخروطی ہوگا۔

یہ شمال ۷ اور شمال ۸ سے حاصل ہوگا۔

۳۲۹۔ کوئی دو خط جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں اور وہ خط جو ان کے نقطہ تقاطع اور لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں سے گذریں ایک موسیقی منسل بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ وہ خط جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں لا ما = ہیں تب وہ خط جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں کو ان کے تقاطع سے ملائے ہیں لا ا + ما = سے حاصل ہوں گے۔ دفعہ ۷ کی رو سے خطوں کے یہ دو زوج موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ نیز ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ دو خط جو کسی مستقل زاویہ پر مل ہوں اور وہ خط جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں تک کھینچے جائیں مستقل جلیبی نسبت کی منسل بناتے ہیں۔ (۳۱۶)

مثال۔ ایک مخروطی کے دو محاس ایک دے ہوئے خط ا ب کو موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں ثابت کرو کہ ان محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو ا ب میں سے گذرتا ہے اور وتر تماس کا لفاف ایک مخروطی ہے جو ابتدائی مخروطی کے ان محاسوں کو مس کرتا ہے جو ا ب سے کھینچے گئے ہیں۔

ا ب کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں منطلل کرو تو مسئلہ ہو جاتا ہے: ایک مخروطی کے ان دو محاسوں کا طریق جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں ایک دائرہ ہے اور وتر تماس کا لفاف ایک

ہم ماسکی مخروطی ہے۔ تطیل کے طریقوں پر مزید مثالیں حسب ذیل ہیں:

مثال ۱۔ اگر ایک مثلث کے ضلع ایک مخروطی کو مس

کریں اور اگر اس کے دو راس دو ثابت ہم ماسکی مخروطیوں پر حرکت کریں تو تیسرا راس ایک ہم ماسکی مخروطی مرسم کرے گا۔

فرض کرو کہ مثلث کے دو لا انتہا قریب محل (ب ج، د ب ج) ہیں اور فرض کرو کہ (د، ب ب ج، ج ج، (مدودہ) مثلث ف ق ر بنائے ہیں۔ چھ نقطے (د، ب، ج، د، ب، ج) ایک مخروطی پر ہیں [دفعہ ۳۲، مثال ۲] اور یہ مخروطی انتہا میں مثلث ف ق ر کے ضلعوں کو (د، ب، ج) پرس کرے گا۔ پس ف (د، ب، ج) ایک نقطہ پر ملیں گے [دفعہ ۱۸۶، مثال ۱] اور یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ پینلین (د، ب، ج) ف ب (ب، ج، د، ب، ج) ف ب (ب، ج، د، ب، ج) موسیقی ہیں۔ اب اگر (د) ایک مخروطی پر حرکت کرتا ہے جو اس مخروطی کے ہم ماسکی ہے جس کو (د، ب، ج) مس کرتے ہیں تو (د) کا حماس یعنی خط ق ر خطوں (د، ب، ج) اور (د، ج) کے ساتھ مساوی زاوے بنائے گا۔ پس چونکہ (د، ب، ج) ف ب (ب، ج، د، ب، ج) موسیقی ہے اس لیے ف (د، ب، ج) ق ر پر عمود ہے۔ اسی طرح اگر ب ایک ہم ماسکی پر حرکت کرے تو ق (د، ب، ج) ف پر عمود ہے۔ پس ر (د، ب، ج) ق ف پر عمود ہونا چاہئے اور اس لیے ج (د، ب، ج) ف ق کے ساتھ مساوی زاوے بنائے ہیں۔ اس لیے یہ مستبط ہوتا ہے کہ ج ایک ہم ماسکی مخروطی پر حرکت کرتا ہے [اس مسئلہ کی آسانی سے توسیع کیجا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ (د، ب، ج) ایک چار ضلعی ہے جو ایک مخروطی کو حاط کرتا ہے اور فرض کرو کہ (د، ب، ج، د، ب، ج) ہم ماسکی مخروطیوں پر حرکت کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ (د، ب، ج، د، ب، ج) پر ملتے ہیں اور (د، ب، ج، د، ب، ج) پر ملتے ہیں۔ اب

مثلثوں ا ب ج ع، ب ج ف پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ع اور ف ہم ماسکی مخروطیوں پر حرکت کرتے ہیں۔ پس مثلث ج ع د پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ د ایک ہم ماسکی مخروطی پر حرکت کرتا ہے۔ اگر ہم ایک ماسکہ کے لحاظ سے مکافات کریں تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوگا:

اگر ایک مثلث کے راس، ایک ہم محور نظام کے ایک دائرہ پر ہوں اور اس کے دو ضلع نظام کے دائروں کو مس کریں تو تیسرا ضلع نظام کے دوسرے دائرہ کو مس کرے گا۔ (پوانسلٹ کا مسئلہ)

مثال ۲۔ وہ چھ خطوط جو ایک مثلث کے راسوں کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں مقابل کے ضلع ایک مخروطی سے منقطع ہوتے ہیں ایک دوسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

حکاتی مسئلہ حسب ذیل ہے:

ایک مثلث کے زاویوں سے ایک مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو مقابل کے ضلع، ان ماسوں کو جن چھ نقطوں پر قطع کرتے ہیں وہ ایک دوسرے مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

نقطوں میں سے دو کو لاتنا ہی ہر کے دائری نقطوں میں منطیل کرو تو مثلث کا مقابل کا راس ایک ماسکہ میں منطیل ہوگا، اور حسب ذیل مسئلہ فوراً حاصل ہوگا:

اگر مخروطی کے ایک ماسکہ میں سے دو خط کھینچے جائیں اور ان خطوں کے متوازی مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو

ان خطوں اور ان مماسوں کے چار تقاطع تقاطع ایک دائرہ پر واقع ہوں گے۔

مثال ۳۔ حسب ذیل مسئلے ایک دوسرے سے ماخوذ ہو سکتے ہیں:

(۱) دو خط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ان میں سے ایک خط ایک محروطی کا مماس اور دوسرا ایک ہم ماسکی محروطی کا مماس ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے اور یہ کہ ان کے تقاطع مماس کو ملانے والے خط کا نصف ایک دوسرا ہم ماسکی محروطی ہے۔

(۲) دو نقطوں میں سے ایک نقطہ ایک دائرہ پر اور دوسرا ایک ہم محور دائرہ پر ہے، ان نقطوں کے محاذی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس خط کا نصف جو ان کو ملاتا ہے ایک محروطی ہے جس کا ایک ماسکہ انتہائی نقطہ پر ہے، نیز ثابت کرو کہ ان نقطوں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم محور دائرہ ہے۔

(۳) دو خطوں میں سے ایک خط ایک محروطی کا مماس اور دوسرا ایک دوسرے محروطی کا مماس ہے، یہ خط محروطیوں کے حاط چار ضلعی کے ایک وتر کو مستقی طور پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوں کے

نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو اس وتر کے سروں میں سے گذرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقاط تماس کو ملانے والے خط کا لفاف ایک مخروطی ہے جو اسی چار ضلعی میں کھینچا ہوا ہے۔

(۴) اوب اور ج و د دو مخروطیوں کے مشترک وتر ہیں اور ف، ق دو نقطے ہیں جن میں سے ایک ایک مخروطی پر اور دوسرے دوسرے مخروطی پر ہے اور و { ا ف ب ق } موسیقی ہے۔ ثابت کرو کہ خط ف ق کا لفاف ایک مخروطی ہے جو ا ب ج د کو مس کرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ف اور ق پر کے تماس ایک مخروطی پر جو ا، ب، ج، د میں سے گذرتا ہے ملتے ہیں۔

(۵) اگر دو نقطے لیے جائیں جن میں سے ایک ایک دائرہ اور دوسرا دوسرے دائرہ پر ہو اور وہ ان کے بنیادی محور سے مساوی فاصلوں پر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے خط کا لفاف ایک مکانی ہے جو بنیادی محور کو مس کرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان نقطوں پر کے تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جو اول الذکر دائروں کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

چودھویں باب پرشالیں

۱۔ ثابت کرو کہ قطع زائد مزدوج نما کے لمفا سے اپنا آپ شکافی ہوتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے محرومیوں کے نظام کو ہم مرکز محرومیوں میں شکافی کیا جاسکتا ہے۔
 ۳۔ ثابت کرو کہ چار محرومی کھینچے جاسکتے ہیں جن میں ایک ماسک مشترک ہو اور جو تین دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں، نیز ثابت کرو کہ ان میں سے ایک کا وتر خاص دیگر تین کے وتر ان خاص کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ یہ بھی ثابت کرو کہ ان کے مرتبوں میں سے دو دو، مثلث کے ضلعوں پر ملتے ہیں۔

۴۔ اگر دو محرومیوں میں سے ہر ایک کو دوسرے کے لحاظ سے شکافی کیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ دو محرومی اور دو شکافی، ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہیں۔

۵۔ دو محرومی L اور M ایک محرومی E کے لحاظ سے شکافی ہیں۔ اگر L کے لحاظ سے M کا شکافی M' ہو اور L کے لحاظ سے M' کا شکافی M'' ہو تو ثابت کرو کہ M' اور M'' E کے لحاظ سے شکافی ہیں۔

۶۔ اگر ایک درجہ پنسل کی مزدوج شعاعوں کے دو زوج علی التوا ہوں تو ہر زوج علی القوائم ہوگا۔

۷۔ اگر ایک درجہ نقطوں کے دو زوجوں کا نقطہ تنصیف وہی ہو تو ہر زوج کا نقطہ تنصیف وہی ہوگا۔ درجہ کا مرکز کہاں ہے؟

۸۔ محرومیوں کا ایک نظام ہے جو چار ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔ کسی نقطہ سے اس نظام کے ماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں جو ایک پنسل بناتے ہیں جو درجہ میں ہے۔ ثابت کرو کہ نظام کے مرتب دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ دو دائرے اور ان کے مشابہت کے مرکز کسی نقطہ پر ایک ایسی پنسل بناتے ہیں جو درجہ میں ہوتی ہے۔

۱۰۔ اگر دو محدود خطوط کو حصوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیا جاتا

متناظر نقطوں کو ملانے والے خط ایک مکافی کو لف کریں گے۔

۱۱۔ اگر خطوں و ا و آ پر دو ہم رسم سعتوں کے متناظر نقطے و ف و ف ہوں اور متوازی الاضلاع و ف و ف کی تکمیل کی جا تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک محزوطی ہے۔

۱۲۔ تین محزوطیوں میں دو نقطے مشترک ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ تین خط جو ان کے دیگر نقاط تقاطع کو دو دو کر کے ملانے سے حاصل ہوتے ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور کوئی خط جو اس نقطہ میں سے گزرتا ہے محزوطیوں سے ایسے چھ نقطوں پر منقطع ہوتا ہے جو در بیچ میں ہوتے ہیں۔ (۲۱۹)

۱۳۔ اگر دو مثلثوں کے متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ یہ دو مثلث متساوی الاضلاع مثلثوں میں منظر کے لئے جاسکتے ہیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ کوئی تین زاوے قائمہ زاویوں میں منظر کے لئے جاسکتے ہیں۔

۱۵۔ ا، ب، ج، ایک محزوطی پر تین ثابت نقطے ہیں منحنی پر ایک ایسا نقطہ ہندسی طور پر معلوم کرو کہ ا، ب، ج کے محاذی اس نقطہ پر مساوی زاوے بنیں۔

۱۶۔ ایک ثابت نقطہ و میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو یک دے ہوئے مثلث کے ضلعوں کو ا، ب، ج پر قطع کرتا ہے۔ اس خط و ف ایسا نقطہ ہے کہ ا، ب، ج و ف موسیقی ہے۔ ثابت کرو کہ و ف کا طریق ایک محزوطی ہے۔

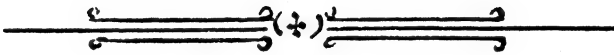
۱۷۔ جب چار محزوطی چار دے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں تو وہ پینل جو ان کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبیوں سے بنتی ہے مستقل چلیبی نسبت کی ہوتی ہے۔

۱۸۔ اگر مستقل مقدار کے دو زاوے اپنے راسوں کے گرد اس طریقہ پر چھو میں کہ ان کی ساقوں میں سے دو کا نقطہ تقاطع ایک محزوطی پر ہو جو

راسوں میں سے گزرتا ہے تو ثابت کر دو کہ دوسری دو ساقیں راسوں میں گزرنے والے ایک دوسرے مخروطی پر متقاطع ہوں گی۔

۱۹۔ اگر ایک کثیر ضلعی کے تمام راس ثابت خطوط مستقیم پر حرکت کریں اور تمام ضلع الا ایک کے ثابت نقطوں کے گرد گردش کریں تو کثیر ضلعی کا بقیہ ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۲۰۔ اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے اور اس کے تمام راس الا ایک کے ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں تو بقیہ راس کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔



پندرہواں باب

غمتغیر

(۲۲۰)

۳۳ — اگر دو مخروطیوں کی مساواتیں

میں $\Delta = 1\lambda + 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 5\delta + 6\epsilon + 7\zeta + 8\eta + 9\theta + 10\iota + 11\kappa + 12\lambda + 13\mu + 14\nu + 15\omega = 0$ ،

اور میں $\Delta = 1\lambda + 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 5\delta + 6\epsilon + 7\zeta + 8\eta + 9\theta + 10\iota + 11\kappa + 12\lambda + 13\mu + 14\nu + 15\omega = 0$ ہوں تو ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے کسی مخروطی کی مساوات کس کس میں $\Delta = 0$ سے حاصل ہوگی۔

وہ شرط کہ (۱) سے خطوط مستقیم کا ایک زوج تعبیر ہو یہ ہے کہ

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

یہ کہ میں ایک کعبی مساوات ہے اور اس کو شکل

$$\Delta = 1\lambda + 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 5\delta + 6\epsilon + 7\zeta + 8\eta + 9\theta + 10\iota + 11\kappa + 12\lambda + 13\mu + 14\nu + 15\omega = 0 \dots (2)$$

میں لکھا جاتا ہے جہاں Δ کے معنی علی الترتیب Δ ہیں اور

طہ = (۱ + ب + ج + ۲ ف + ۲ گ + ۲ ہ)

اور طہ = (۱ + ب + ج + ۲ ف + ۲ گ + ۲ ہ)

اگر مساوات (۲) کی تین اصلیں کم، کم، کم ہوں تو کم، کم، کم =
وغیرہ ان خطوط مستقیم کے زوجوں کی مساواتیں ہیں جو اس اور اس کے
نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔ اگر ہم (۱) اور (۲) سے کم کو ساقط
کریں تو محصلہ مساوات یعنی

$$\Delta \text{ س}^۳ - \text{ط س س}^۲ + \text{ط س س}^۲ - \Delta \text{ س}^۳ = ۰$$

س اور س کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے تین
زوجوں کی مساوات ہے ہوگی۔

۳۳۲ — اب اگر محدودوں کے محوروں کو کسی طرح تبدیل کیا جائے
مثلاً کارٹیزیائی محدودوں سے سرخشی محدودوں میں اور اس تبدیلی سے
محروٹیوں س = ۰ اور س = ۰ کی مساواتیں ۳ = ۰ اور ۳ = ۰

ہو جائیں تو مساوات ک س + س = ۰، ک ۳ + ۳ = ۰ میں
تبدیل ہوگی اور اگر ک ایسا ہو کہ ک س + س = ۰ خطوط مستقیم کے
ایک زوج کو تعبیر کرے تو ک ۳ + ۳ = ۰ سے بھی خطوط مستقیم کا
ایک زوج تعبیر ہوگا۔

پس ک کی وہ قیمتیں جن کے لیے مساوات ک س + س = ۰
خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، یعنی مساوات (۲) دفعہ ۳۳۱ کی اصلیں
محدودوں کے کسی مخصوص محوروں پر منحصر نہیں ہوتی چاہئیں۔ اس لیے
چار مقداروں Δ ، Δ ، Δ ، Δ کی ایک دوسرے کے ساتھ نسبتیں
اسی ہوئی چاہئیں کہ وہ محدودوں کے محوروں پر منحصر نہ ہوں۔
اسی سبب کی بنا پر مقداروں Δ ، Δ ، Δ کو غیر متغیر

کہا جاتا ہے۔

اگر محدودوں کے ایک نظام سے دوسرے نظام میں استحالة میں اور میں میں پڑانے محدودوں کو نئے محدودوں کی رقوم میں رکھ کر فی الواقع عمل میں لایا گیا ہے تو متذکرہ بالا مقداروں میں سے کسی دو کی نسبتیں، جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، نہیں بدلیں گی، لیکن اگر صرف یہ معلوم ہو کہ محدودوں کے ایک نظام کے حوالے سے مساواتیں $\alpha = \beta$ اور $\beta = \gamma$ ہیں اور دوسرے نظام کے حوالے سے یہ مساواتیں $\alpha' = \beta'$ اور $\beta' = \gamma'$ ہو جاتی ہیں تو اس کی کوئی ضمانت نہیں ہے کہ ان نئی مساواتوں میں سے ایک یا دوسری (دونوں نہیں) کسی مستقل مقدار سے مضروب یا مقسوم نہیں ہے۔ اس لیے یہ ممکن ہے کہ مخروطیوں کی وہ نئی مساواتیں جو حقیقتاً استحالة سے حاصل ہوئی ہیں یا جبکہ دونوں اسی مستقل مقدار سے مضروب یا مقسوم ہوں علی الترتیب $\alpha = \beta$ اور $\beta = \gamma$ ہوں اور $\alpha' = \beta' + \gamma'$ کا مینر

$$\alpha' = \beta' + \gamma' \quad \alpha = \beta$$

ہو۔ اس طرح یہ واضح ہے کہ اگرچہ نسبتیں $\alpha : \beta : \gamma$: $\alpha' : \beta' : \gamma'$ تمام صورتوں میں مستقل نہ ہوں تاہم ان مقداروں کے درمیان کوئی ایسا رشتہ جو متجانس ہو جبکہ $\alpha' : \beta' : \gamma'$: $\alpha : \beta : \gamma$ سب کے سب وہی ابعاد کے ہوں اور نیز جبکہ وہ ترتیب وار ۰، ۱، ۲، ۳ ابعاد کے ہوں دونوں صورتوں میں درست رہے گا خواہ مخروطیوں کی مساواتوں کو کسی طرح بھی تبدیل کیا جائے۔

۳۳۳ — حسب ذیل صورتوں میں جو غیر متغیر حاصل کیے گئے ہیں (۲۲۲)

وہ آئندہ کارآمد ہونگے۔

۱۔ اگر $\text{سی} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \text{ جب } \Delta = 0$

$\text{سی} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \text{ جب } \Delta = 0$

تو ک $\text{سی} + \text{سی} = \text{کامینر}$
(ک + ع) (ک + و) (ک + ط)

ہے۔ اس لیے

$\Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2$

۲۔ اگر $\text{سی} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \text{ جب } \Delta = 0$

$\text{سی} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \text{ جب } \Delta = 0$

تو مینر

ک	ع	ن	م
ن	ک	و	ل
م	ل	ک	ط

ہے۔ اس لیے $\Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2$

۳۔ اگر $\text{سی} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \text{ جب } \Delta = 0$

$\text{سی} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \text{ جب } \Delta = 0$

۲۔ $\text{سی} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \text{ جب } \Delta = 0$

تو مینر

ک + ع	ل	ل	م	ن
ل	ک + و	م	ن	ط
ن	ط	ک + ط	ن	ل

ہے۔ اس لیے $\Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2$

$\Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2$

۴۔ اگر $\text{سی} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \text{ جب } \Delta = 0$

۲۔ $\text{سی} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 \text{ جب } \Delta = 0$

سے = ۲ ل + ج + ۲ م + ج + ۲ ن + ع = ۰

ک ل	- ک ل + م + ن	- ک ل + م
- ک ل + م + ن	ک م	- ک م + ن + ل
- ک ل + م	- ک م + ن + ل	ک ن

تومینر

ہے۔ اس لیے $\Delta = ۴ ل + ۲ م + ۲ ن + ع = ط$ ، $۴ ل + ۲ م + ۲ ن + ع = ۰$

اس طرح $ط = ۴ ل + ۲ م + ۲ ن + ع = ۰$

۵۔ اگر $س = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۱ = ۰$ ،

سے $\equiv (لا - ع) + (ما - ب) - غ = ۰$

ک	۱ +	۰	- ع
۰	ک	۱ +	- ب
- ع	- ب	- ک	+ ع + ب - غ

تومینر

ہے۔ اس لیے $\Delta = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ط$ ، $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ط$ ، $(ع + ب - غ - ل - ب) = ط$

$ط = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۱ - غ = ۰$ ، $\Delta = ۰$ ، $غ = ۰$

۶۔ اگر $س = (لا - ع) + (ما - ب) - غ = ۰$ ،

سے $\equiv (لا - ن) + (ما - ق) - ر = ۰$

ک	۱ +	۰	- ع - ن
۰	ک	۱ +	- ک - ب - ق
- ک - ع - ن	- ک - ب - ق	- ک	+ ع + ب - غ + ن + ق - ر

تومینر

ہے۔ اس لیے $\Delta = - غہ^۲$ ، $\Delta = - ر^۲$

طہ = (عہ - ف) + (بہ - ق) - غہ^۲ - ر^۲

طہ = (عہ - ف) + (بہ - ق) - غہ^۲ - ر^۲ یہ ہم دیکھتے ہیں کہ

۳۳۴۔ دفعہ ماضی کی مثالوں (۲) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ طہ = ۰ جبکہ س میں کھینچا ہوا مثلث س کے لیے خود قطبی ہو اور نیز جبکہ س کا مانٹا مثلث س کے لیے خود قطبی ہو۔ نیز ہم جانتے ہیں کہ اگر ان صورتوں میں سے کسی ایک میں ایسا ایک مثلث ہو تو ایسے مثلث تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔

اس کے بالعکس اگر طہ = ۰ تو س میں ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو س کے لیے خود قطبی ہوں اور نیز س کے گرد ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو س کے لیے خود قطبی ہوں۔
 فرض کرو کہ س کے لحاظ سے س پر کے کسی نقطہ کا قطبی، س کو کمر ب' ج پر قطع کرتا ہے۔

اب مثلث ا ب ج کے حوالے سے

س = عہ^۲ + وہ^۲ + طہ^۲ + عہ^۲ + بہ^۲ = ۰

اور س = ۲ل بہ + ۲م جہ + ۲ن عہ = ۰

(۲۲۲)

اس لئے کہ س + س کا مینر

ک	ن	م
ن	ک	ک
م	ک	ط

ہے۔ پس اگر طہ = ۰ تو ل عہ = ۰۔

جب عہ = ۰، تو محرمی میں دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہوتا ہے جو ا میں سے گزرتے ہیں، اور جب ل = ۰، تو س خط مستقیم ج میں اور ا میں سے گزرنے والے ایک دوسرے خط میں تحویل ہوتا ہے

جہاں ۱، س کے لحاظ سے ب ج کا قطب ہے۔ ان صورتوں کو خارج کرنے پر جن میں کہ ایک محروطی خطوط مستقیم کے زوج میں تحول ہوتا ہے ۲ = ۰۔ حاصل ہوتا ہے اور اس لیے (ب ج، س کے لیے خود قطبی ہے۔

پھر فرض کرو کہ س کے لحاظ سے س کے کسی ماس ب ج کا قطب ہے اور فرض کرو کہ ا سے س کے ماس (ب، ج ہیں۔ تب مثلث (ب ج کے حوالے سے

$$س \equiv ل + ع + م + ۲ + ن + ۲ - ۲ م + ۲ - ۲ ن + ل ج ع$$

$$۰ = ۲ ل م ع + ۲ - ۰$$

$$اور س \equiv ع + ع + و + ۲ + ط ج + ۲ + ۲ ع + ۲ ج = ۰$$

پس مینبر

ک ل + ۲ ع	- ک ل م	- ک ن ل
- ک ل م	ک م + ۲ و	- ک م ن + ۲ ع
- ک ن ل	- ک م ن + ۲ ع	ک ن + ۲ ط

ہے۔ اس لیے اگر ط = ۰۔ تو ۲ ل م ن = ۰۔ اگر ل یا م یا ن صفر ہو تو س منطبق خطوط مستقیم کے زوج کو تعبیر کرے گا، اس لیے ان خطی محروطیوں کو خارج کرنے پر ہمیں ۲ = ۰ حاصل ہوتا ہے اور اس لیے (ب ج، س کے لیے خود قطبی ہے۔

پس جب ط = ۰، تو س میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد

کھینچی جاسکتی ہے جو س کے لیے خود قطبی ہوں اور نیز س

کے گرد مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو س کیلئے

خود قطبی ہوں۔

۳۳۵ — دفعہ ۳۳۳ کی مثال (۴) میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر س کا اندرونی مثلث س کو حاطط کرے تو ط^۲ - ۴ = ط^۰۔ اس کا مسئلہ عکس ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ س کا کوئی حاطط س کو ب، ج پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ب، ج سے دوسرے حاطط پر ملتے ہیں۔

تب مثلث (ب ج کے حوالے سے

$$س = ل^۲ + م^۲ + ن^۲ - ۲ن ل ج - ۲م ن ب - ۲ل ج ب$$

$$- ۲ل م ب$$

$$س = ل^۲ + م^۲ + ن^۲ - ۲ن ل ج - ۲م ن ب - ۲ل م ب$$

(۳۲۵)

پس ک س + س کا مینر

$$\begin{vmatrix} ک ل + ۶ & - ک ل م + ط & - ک ن ل + و \\ - ک ل م + ط & ک م^۲ & - ک م ن + ۶ \\ - ک ن ل + و & - ک م ن + ۶ & ک ن^۲ \end{vmatrix}$$

ہے اور اس لیے

$$\Delta = - ۲ل م ن^۲$$

$$ط = ۲ل م ن (ل + ۶ + م + و + ن + ط)$$

$$ط^۲ = - (ل + ۶ + م + و + ن + ط) (۲ل م ن + ۶)$$

$$پس اگر ط^۲ - ۴ = ط^۰ = ۰۔ تو ل م ن + ۶ = ۰۔$$

اس طرح ۶ = ۰۔ اور اس لیے مثلث (ب ج، س کا اندرونی

اور نیز س کا حاطط مثلث ہے۔ مستقیم تغیر ہوں گے جن میں سے ایک

[اگر ۶ = ۰۔ تو س سے دو خطوط مستقیم تغیر ہوں گے جن میں سے ایک

س کو مس کرے گا۔ نیز اگر ل یا م یا ن صفر ہو تو س سے منطبق خطوط

مستقیم کے زوج تغیر ہوں گے۔]

۳۳۶ — پچھلے دو دفعوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر ط = ۰۔ اور

طہ =۔ تو س یا س میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور نیز س یا س کے گرد مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے نیز یہ کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد س یا س میں یا ان میں سے کسی ایک کے گرد کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔

مثال ۱۔ اگر ایک دائرہ کو ایک مکانی کے واسطے میں سے کھینچا جائے تو دائرہ میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع مکانی کو مس کریں۔

ک (ما۔ ۴ ولا) + لا + ما + ۲ گ لا + ف ما۔ ۱۔ ۲ گ ۱ کے

مین میں
 $\Delta = ۴ - ۲$ طہ = ۴ (۱-گ) اور طہ = (۱-گ) ۲
 \therefore طہ = ۴ - ۵ طہ = ۰

مثال ۲۔ اگر ایک دائرہ کا مرکز ایک مکانی کے مرتب پر ہو تو مکانی کے گرد مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو دائرہ کے لیے خود قطبی ہوں۔ نیز دائرہ میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو مکانی کے لیے خود قطبی ہوں۔

فرض کرو س \equiv (لا + ع) ۲ + (ما + ب) ۲ - ۲ = ۰

س \equiv ما - ۴ ولا = ۰

ک	ک	تبک سی + سی کامیز
ک	ک + ۱	ک عہ - ۱۲
ک عہ - ۱۲	ک یہ	ک (عہ - ۲)

ہے جس میں طہ = .

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دائرہ کے مرکز سے مکانی کے دو محاسن اور
لاتنا ہی پر کا خط مکانی کے گرد ایک مثلث بناتے ہیں جو دائرہ کے لیے خود
قطبی ہے۔

مثال ۳ - ثابت کرو کہ تین مخروطی

(۲۲۶)

س = م - ن والا = س = لا - م ب ما = س = لا + م ا ب = .

اس طرح مربوط ہیں کہ ان میں سے کسی ایک میں مثلثوں کی
لاٹنہی تعداد اور دوسرے دو میں سے کسی ایک کے گرد مثلثوں کی
لاٹنہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور نیز ان میں سے کسی ایک کے گرد
مثلثوں کی لاٹنہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو باقی دو میں سے
کسی ایک کے لیے خود قطعی ہوں۔

ک س س + س کامینر

۲ ک + ۲ ب

ہے اور گس، گس، گس، گس کا مینز

دکتر + پ

ہے اور ک میں + میں کامیوز

ب ک ۲ + ۱

ہے۔ ان تینوں صورتوں میں ط = ۰، اور ط = ۰۔

مثال ۴۔ ایک مثلث ایک محروطی کے لیے خود قطبی ہے،
ثابت کرو کہ مثلث کا حاطہ دائرہ محروطی کے مرتب دائرہ کو علی القواہم قطع کرتا ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ محروطی سے } \frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} - ۱ = ۰$$

$$\text{اور دائرہ سے } (لا - ع) + (ما - ب) - ر = ۰$$

ہے۔ تب ک سے س + س کے مینر میں ط کو صفر ہونا چاہئے کیونکہ س میں
کھینچا ہوا مثلث سے کے لیے خود قطبی ہے۔

لیکن [دفعہ ۳۳۳ مثال ۵]

$$\text{ط} = \frac{۱}{وا ب} (ع + ب - ر - ۱ - ب)$$

$$\text{اس لیے } ع + ب - ر = ۱ + ب$$

اور اس لیے س، لا + ما = ۱ + ب کو علی القواہم قطع کرتا ہے۔

اب ط = ۰۔ وہ شرط بھی ہے کہ س کا حاطہ مثلث سے کے لیے خود
قطبی ہو۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ ماضی ہوتا ہے:

اگر ایک محروطی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے تو مثلث کا
قطبی دائرہ محروطی کے مرتب دائرہ کو علی القواہم قطع کرتا ہے۔

$$\text{مثال ۵۔ ثابت کرو کہ محروطی سے } \frac{لا}{وا} + \frac{ما}{ب} - ۱ = ۰ \text{ میں}$$

فرض کرو کہ س میں اور س کے گرد کھینچے ہوئے مثلث کا مرکز عمودی (عہ، بہ) ہے۔ اب چونکہ مرکز عمودی مثلث کے قطبی دائرہ کا مرکز ہوتا ہے اس لیے س میں اور س کے گرد کھینچے ہوئے مثلث کو غہ کی کسی قیمت کے لیے دائرہ

$$ج \equiv (لا - عہ) + (ما - بہ) - غہ^۲$$

کے لیے خود قطبی ہونا چاہئے۔

$$پس ک س + ج کے مینر میں طہ =$$

$$اور ک س + ج کے مینر میں طہ =$$

اب ک س + ج کا مینر

ک + ۱	ک	ک گ - عہ
ک	ک ب + ۱	ک ف - بہ
ک گ - عہ	ک ف - بہ	ک ج + عہ + بہ - غہ^۲

ہے اور طہ = ۱ + عہ + ۲ عہ بہ + ب بہ + ۲ گ عہ + ۲ ف بہ

$$+ ج - (۱ + ب) - غہ^۲ =$$

نیز ک س + ج کا مینر

ک + ۱	ک	ک - عہ
ک	ک ب + ۱	ک - بہ
ک - عہ	ک - بہ	ک - عہ + بہ + بہ - غہ^۲

$$ہے اور طہ = ۱ + عہ + بہ + ۲ غہ - ۱ - ب =$$

پس (عہ، بہ) غزولی

$$س = (۱ + ب) (لا + ما - ۱ - ب)$$

ہے۔
۳۳۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو مخروطی ایک دوسرے کو
مس کریں۔
مخروطیوں کی مساداتوں کو

$$م = ۱ + لا + ۲ + لا + م + ۲ + ف + م = ۰$$

$$س = ۱ + لا + ۲ + لا + م + ۲ + ف + م = ۰$$

یا جاسکتا ہے۔ ک س، س، کا مینر

$$(ک + ۱) (ک + ۱) = ۰ \dots \dots (۱)$$

$$ہے اس لیے $\Delta = ۱ + ف$ ، $\Delta = ۲ + ف$ ، $\Delta = ۲ + ف + ۱ + ف$$$

$$\Delta = ۲ + ف$$

$$اب \Delta - \Delta = ۲ + ف - ۲ + ف = ۰$$

$$\Delta - \Delta = ۲ + ف - ۲ + ف = ۰$$

$$اور \Delta - \Delta = ۲ + ف - ۲ + ف = ۰$$

پس مطلوبہ شرط

$$(۲) \Delta - \Delta = ۲ + ف - ۲ + ف = ۰ \dots \dots$$

ہے۔

اگر مخروطی دوسرے رتبہ کا تماس رکھیں تو $\frac{ف}{۱} = \frac{ف}{۲}$ اور اس لیے

$$\Delta - \Delta = ۲ + ف - ۲ + ف = ۰$$

رشتہ (۲) کو اس واقعہ سے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے کہ مخروطیوں کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے تین زوجوں میں سے دو زوج منطبق ہوتے ہیں جبکہ مخروطی مس کرتے ہیں اور اس لیے کعبی

$$\Delta^2 k + \Delta^2 k + \Delta^2 k + \Delta^2 k = 0$$

کی دو اصلیں مساوی ہیں۔
پس ک کو اوپر کی مساوات اور مساوات

$$\Delta^2 k + \Delta^2 k + \Delta^2 k + \Delta^2 k = 0$$

سے ساقط کرنا ہے۔
پہلی مساوات کو ۳ سے اور دوسری کو ک سے ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$\Delta^2 k + \Delta^2 k + \Delta^2 k + \Delta^2 k = 0$$

پس

$$\frac{\Delta^2 k}{\Delta^2 k - \Delta^2 k} = \frac{\Delta^2 k}{\Delta^2 k - \Delta^2 k} = \frac{\Delta^2 k}{\Delta^2 k - \Delta^2 k}$$

اور اس لیے

$$(\Delta^2 k - \Delta^2 k) = (\Delta^2 k - \Delta^2 k)$$

اب ان مخروطیوں کے نصف قطر انحناء

(۴۲۹)

غ = $\frac{f}{r}$ اور غ = $\frac{f}{r}$

ہیں۔ اور ممیز کی اصلیں

$\frac{f}{r}$ ، $\frac{f}{r}$ اور $\frac{f}{r}$

ہیں۔ اس لیے مکرر اصل کو دوسری اصل کے ساتھ نسبت

$$\frac{f}{r} = \frac{f}{r}$$

ہے۔

اس طرح s اور s' کے انحنائوں کی نسبت ان کے نقطہ تماس پر اس نسبت کے مساوی ہے جو k s s' کے ممیز کی مکرر اصل کو دوسری اصل کے ساتھ ہے۔

۳۳۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک چار ضلعی کو ایک

مخروطی میں اور دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جاسکے۔

فرض کرو کہ وتری مثلث کے حوالے سے چار ضلعی کے چار ضلع
 $l = e \pm m \pm n \pm j = 0$ یا $l = a \pm m \pm n \pm j = 0$ ہیں۔

تب $s = e \pm l \pm m \pm n \pm j = 0$ ان چار خطوں کو مس کرے گا اگر

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 0 \dots (1)$$

ان خطوں کے نقاط تقاطع میں سے چار

$$(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)$$

ہیں۔ اس مخروطی کی عام مساوات جو ان چار نقطوں میں سے گزرتا ہے

$$s = e - l + m + n + j = 0$$

ہے۔

ک s s' کا ممیز

ک	ب	ا	ن
۱	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱

ہے۔ اس لیے $\Delta = \epsilon \omega \tau' = \omega \tau + \epsilon \tau + \epsilon \omega \tau - \omega \tau' \quad (۱)$

$$\tau' = \epsilon - \omega - \tau - \epsilon \tau' = \Delta \tau' = \tau' - 1$$

$$\text{پس } \tau' = \epsilon - \omega - \tau - \epsilon \tau' = \Delta \tau' + \frac{\epsilon \omega \tau}{\tau} + \frac{\Delta \tau}{\Delta \tau} = \tau' + \frac{\Delta \tau}{\Delta \tau}$$

$$\Delta \tau' = \tau' + \Delta \tau' - \tau' = \Delta \tau' = 0$$

اور یہ ٹھیک ابعاد کی مساوات ہے۔

(۴۳۰) یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مینر کی ایک اصل دوسری دو اصلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے کیونکہ ایک اصل $\frac{1}{\epsilon}$ ہے اور دوسری دو اصلیں

$$\omega \tau' + (\omega + \tau) \tau' = \tau' + \tau' = 2\tau' \quad \text{اور } \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\tau}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثال ۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ چار ضلیعوں کو ایک ویسے ہوئے دائرہ کے اندر اور دوسرے دائرہ کے گرد کھینچا جاسکے۔

فرض کرو کہ دائرے

$$س = لا + ما - ل' = 0$$

$$مق = (لا - د) + ما - ب' = 0$$

ہیں۔ تب ک س + مق کے مینر میں یہ معلوم ہوگا کہ

$\Delta = \frac{1}{2} \times \text{طہ} = \frac{1}{2} \times (\text{ب} - \text{د}) = \frac{1}{2} \times (\text{طہ} - \text{د})$ اور $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{طہ} = \frac{1}{2} \times (\text{ب} - \text{د})$
 پس اگر شرط ۴ Δ طہ - Δ طہ = $\frac{1}{2} \times (\text{طہ} - \text{د})$ پوری ہوتی ہے تو
 $\frac{1}{2} \times (\text{ب} - \text{د}) = \frac{1}{2} \times (\text{طہ} - \text{د})$ اور $\frac{1}{2} \times (\text{ب} - \text{د}) = \frac{1}{2} \times (\text{طہ} - \text{د})$
 اس لیے $\text{د} - \text{د} = (\text{ب} - \text{د}) + (\text{طہ} - \text{د}) = (\text{ب} - \text{د}) + (\text{طہ} - \text{د})$
 یعنی $(\text{د} - \text{ب}) = (\text{د} - \text{طہ})$ اور $(\text{د} - \text{ب}) = (\text{د} - \text{طہ})$
 اگر $\text{د} - \text{ب} = \text{طہ} - \text{د}$ تو اس کا مرکز س پر ہے -
 اگر $\text{د} - \text{ب} \neq \text{طہ} - \text{د}$ تو رشتہ کو شکل

$$1 = \frac{1}{\text{د} - \text{ب}} + \frac{1}{\text{د} - \text{طہ}}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ [دیکھو P. 404 Smith & Bryant's Euclid]

۳۴۔ وہ شرط معلوم کرو کہ ایک مثلث کو ایک مخروطی
 س میں اس طرح کھینچا جاسکے کہ اس کا ہر ضلع تین دوسرے
 مخروطیوں میں سے ایک کو مس کرے جہاں ان چار
 مخروطیوں میں چار مشترک نقاط تقاطع ہیں۔

فرض کرو کہ س = ۲ ل بہ جہ + ۲ م جہ + ۲ ن عہ = ۰

اور س = ۲ عہ + ۲ جہ + ۲ ل (۱ + ل) بہ جہ (۱) +
 + ل (۲ م) جہ عہ - ۲ (۱ + ل) لہ ن عہ بہ

تب مخروطی لہ س + س = ۰ لہ س + س = ۰ اور لہ س + س = ۰

عہ، بہ، چہ کو علی الترتیب مس کرتے ہیں اور وہ سب مس، اور مس، کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔
اب ک مس، + مس، کے لیے مینر

ک ن - ۱ - لہ ن	ک م - ۱ - لہ م
ک ن - ۱ - لہ ن	ک ل - ۱ - لہ ل
ک م - ۱ - لہ م	ک ل - ۱ - لہ ل

ہے اور یہ معلوم ہو گا کہ

$$\Delta = 2 \text{ لہ م ن}$$

$$- \text{طہ} = (2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ ل})$$

$$\text{طہ} = 2 \text{ لہ ل} + (2 \text{ لہ ل} + 2 \text{ لہ ل}) + 2 \text{ لہ م ن}$$

$$- \Delta = (2 \text{ لہ ل} + 2 \text{ لہ ل}) + 2 \text{ لہ م ن}$$

$$\text{پس } \text{طہ} = \Delta = 2 \text{ لہ ل} = - (2 \text{ لہ ل} + 2 \text{ لہ ل})$$

$$\text{طہ} - \Delta = 2 \text{ لہ ل} = 2 \text{ لہ ل} + (2 \text{ لہ ل} + 2 \text{ لہ ل})$$

$$\Delta + \Delta = 2 \text{ لہ ل} = - (2 \text{ لہ ل} + 2 \text{ لہ ل})$$

$$\text{اس لیے } 2 \text{ لہ ل} = (2 \text{ لہ ل} + \Delta) + (\Delta + 2 \text{ لہ ل}) = (2 \text{ لہ ل} + \Delta)$$

اور یہ مطلوبہ شرط ہے۔

اب فرض کرو کہ مخروطی مس، = معلوم ہے اور نیز لہ اور لہ کی قیمتیں بھی معلوم ہیں۔

۱۵ دیکھو سامن کی مخروطات صفحہ ۳۳۱ -

تب اوپر کے رشتہ سے لے کر معلوم کرنے کے لیے ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے (یہ مساوات مفرد مساوات میں تحویل ہوگی اگر لہ = ۱)۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :

مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کو ایک دیے ہوئے مخروطی میں کھینچا جائے اور مثلث کے دو ضلع علی الترتیب مخروطیوں میں اور میں کو مس کریں اور مخروطی میں میں سب کے سب چار مشترک نقطوں پر متقاطع ہوں تو مثلث کا تیسرا ضلع ان چار نقطوں میں سے گزرنے والے دو دوسرے ثابت مخروطیوں میں سے ایک کو مس کرے گا۔

یہ معلوم ہوگا کہ تیسرے ضلع کا لاف دو مخروطیوں پر مشتمل ہے کیونکہ اگر میں کا وہ وتر ا ب جو میں کو مس کرتا ہے کھینچا جائے تو ب سے مخروطی میں کے دو مماس ہوں گے اور ج ا کے دو مماس محل نظام کے مختلف مخروطیوں کو مس کریں گے۔ لیکن اگر مثلث ا ب ج بغیر کسی اچانک تبدیلیوں کے ترتیب وار مختلف ممکن محل اختیار کرتا جائے تو تیسرا ضلع ہمیشہ ایک ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔ اوپر کے مسئلہ کی توسیع متعدد ضلعوں کے کثیر ضلعی کی صورت

(۴۳۲)

پر کیجا سکتی ہے۔ مثلاً چار ضلعی ا ب ج د پر غور کرو جیسا ہے کہ نقطے ا، ب، ج، د مخروطی میں پر ہیں اور اس لیے ا ب، ب ج، ج د، د ا کو مس کرتا ہے میں کو اور ج د، میں کو جہاں میں میں میں سب کے سب مخروطیوں کے ایسے نظام سے متعلق ہیں جو چار مشترک نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔ تب چونکہ ا ب اور ج د نظام کے مخروطیوں کو مس کرتے ہیں

اس لیے خط Δ ج بھی نظام کے ایک محروطی کو مس کرے گا (مسئلہ)۔
 اب Δ ج اور ج د نظام کے محروطیوں کو مس کرتے ہیں اور اس لیے
 Δ د بھی نظام کے ایک محروطی کو مس کرے گا۔ اسی طرح متعدد ضلعوں
 کے کسی کثیر ضلعی کی صورت میں ثابت کیا جاسکتا ہے۔

یہ تمام محروطی ہم محور دائروں میں منظر کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح
 پانسلٹ (Poncelet) کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔ [دیکھو دفعات
 ۱۔ ۳، ۴، ۵ اور قلمدس صفحہ ۵۰۰ مصنفہ اسمتھ اور برانٹ]

ایک مخصوص صورت کے طور پر حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک محروطی میں کھینچا جائے اور

اس کے تمام ضلع Δ ایک کے ایک دوسرے محروطی میں کو مس
 کریں تو بقیہ ضلع ایک تیسرے محروطی میں کو مس کرے گا جو
 میں اور میں کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے اور اگر
 بقیہ ضلع اپنے ایک محل میں میں کو مس کرے تو وہ تمام محلوں
 میں میں کو مس کرے گا۔

یہ اندرونی اور باہر کثیر ضلعیوں کا (Porism) ہے یعنی ایک
 ایسے کثیر ضلعی کو ایک محروطی میں کھینچنے کا مسئلہ جس کے ضلع دوسرے
 محروطی کو مس کریں بالعموم ناممکن ہے لیکن اگر کوئی ایسا کثیر ضلعی
 موجود ہو تو ایسے کثیر ضلعی تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔

پندرہویں باب پر مثالیں

۱۔ مثلثوں کی لائقناہی تعداد دائرہ $لا + ما = (۱ + ب) ا$ میں اور ناقص

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ کے گرد کھینچی جاسکتی ہے۔}$$

۲۔ مثلثوں کی لائقناہی تعداد $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ میں اور $لا + ما$

$$= \frac{ا + ب}{ا + ب} \text{ کے گرد کھینچی جاسکتی ہے۔}$$

۳۔ نصف قطر کا ایک دائرہ ایک مثلث میں جو $ما - ۲$ و $لا = ۰$ کے لیے خود قطبی ہے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق مکانی $ما - ۲$ و $لا = ۰$ ہے۔

۴۔ مثلثوں کی لائقناہی تعداد $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ میں اور $\frac{لا}{ا}$ (۴۳۳)

$$+ \frac{ا}{ب(ا - ب)} \text{ کے گرد کھینچی جاسکتی ہے۔}$$

۵۔ مثلثوں کی لائقناہی تعداد $لا + ۲$ و $لا + ما = ۰$ میں اور $ما - ۲$ و $لا = ۰$ کے گرد لہ اور مہ کی تمام قیمتوں کے لیے کھینچی جاسکتی ہے۔

۶۔ اگر دو مساوی دائروں کا مشترک وتر نصف قطر کے مساوی ہو تو ایسے مثلثوں کی لائقناہی تعداد ایک دائرہ میں کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع دوسرے دائرہ کو مس کریں نیز مثلثوں کی لائقناہی تعداد کسی ایک دائرہ میں یا اس کے گرد کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے دائرہ کے لیے خود قطبی ہوں۔

۷۔ ثابت کرو کہ $MA^2 - MA \cdot LA = 0$ میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع $LA + MA - LA \cdot LA + LA^2 = 0$ کو مس کریں۔
 ۸۔ وہ شرط کہ $MA = 0$ اور $MS = 0$ کے دو نقاط تقاطع پر MS کے تماس میں پڑیں یہ ہے کہ

$$MA^2 = (MA^2 - LA^2 - LA \cdot LA)$$

۹۔ ثابت کرو کہ ایسے متساوی الاضلاع مثلثوں کے مرکروں کا

$$\text{طریق جو } \frac{LA}{MA} + \frac{MA}{MB} = 1 \text{ کے لیے خود قطبی ہوں}$$

$$LA^2 (1 - \frac{MA}{MB}) + MA^2 (1 - \frac{LA}{MB}) = (1 - \frac{LA}{MB})^2$$

ہے۔

۱۰۔ اگر $MA^2 = LA^2$ تو ثابت کرو کہ ایک محروطی ایسا کھینچا جاسکتا ہے جو محروطیوں $MA = 0$ ، $MS = 0$ میں سے ہر ایک کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھے۔

۱۱۔ اگر ایک مثلث کے دو ضلع محروطی MA کو مس کریں اور اس کے راس محروطی MA پر ہوں تو تیسرے ضلع کا لاف محروطی $MA^2 = LA^2 + LA \cdot MA$ ہوگا۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ $MA^2 = LA^2 + LA \cdot MA$ میں ایسے مثلثوں کی

لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع $MA^2 = LA^2 + LA \cdot MA$ کو مس کریں اور نیز ثابت کرو کہ ایسے تمام مثلثوں کے عمودی مرکزہ دائرہ $MA^2 = LA^2 + LA \cdot MA$ پر ہیں۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث کا مرکز عمودی جبکہ مثلث کو ایک مکانی میں کھینچا گیا ہو مکانی کے مرتب پر ہو تو مثلث کا قطبی دائرہ ماسکے میں سے گزرے گا۔

۱۴۔ ایک مثلث کو ایک ثابت دائرہ میں اور ایک ثابت محروطی کے گرد کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث کا نو نقطی دائرہ دو ثابت دائروں کو

مس کرتا ہے۔
 ۱۵۔ مس میں ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جن کے ضلع مس کو مس
 (۴۳۴) کریں، ثابت کرو کہ ان خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق جو مثلث کے راسوں کو
 مقابل کے ضلعوں کے تقاطع تا مس سے ملاتے ہیں مخروطی
 Δ مس - ۲ طہ مس = ۰

۱۶۔ اگر مس میں ایسے مثلث کھینچے جاسکیں جو مس کے لیے خود
 قطبی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ مثلث جو مس کے ان ماسوں سے بنتے ہیں جو
 راسوں پر کھینچے گئے ہیں مخروطی
 Δ مس - طہ مس = ۰
 کے اندرونی مثلث ہوں گے۔

۱۷۔ دو مخروطیوں مس، مس کا ایک مشترک نقطہ ۱ ہے اور
 ا ب، ج علی الترتیب مس، مس کے ایسے وتر ہیں جو علی الترتیب
 مس، مس کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) اگر ب پر مس کے ماس
 بھی مس کو مس کریں تو مس میں ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو مس کے
 ماط مثلث ہوں اور (۲) اگر ب ج، مس کو مس کرے تو مس میں ایسے
 مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو مس کے لیے خود قطبی ہوں اور (۳) اگر
 ب ج، مس اور مس دونوں کو مس کرے تو مس کے لحاظ سے مس کا
 متکافی دہی مخروطی ہو گا جو مس کے لحاظ سے مس کا متکافی ہے۔

۱۸۔ مخروطی $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 = 0$ کے ماط متساوی الاضلاع

مثلثوں کے ہندسی مرکزوں کا طریق

$$9(a^2 + b^2) - 2(a^2 + b^2)(3b^2) - 2(a^2 + b^2)(3b^2) + 2(a^2 + b^2)(3b^2) = 0$$

ہے۔

۲۵۔ اگر ایک چار ضلعی کے تین ضلع میں کو مس کریں اور اس کے راس میں پرہوں تو ثابت کرو کہ بقیہ ضلع کا لغات

$$(\text{ط}^2 - \Delta^2 \text{ط}^2) \text{میں} + \Delta^2 \text{ط}^2 - (\text{ط}^2 - \Delta^2 \text{ط}^2) \text{میں} = 0$$

۲۶۔ اگر میں = ۰ اور میں = ۰ کے مشترک ماس میں = ۰ کو جن چار نقطوں پر مس کرتے ہیں ان کو میں کے کسی نقطہ سے ملایا جائے اور اس طریقہ سے حاصل شدہ خطوں سے ایک موسیقی پنسل بنے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ط}^2 - 9 \text{ط}^2 \text{ط}^2 + \Delta^2 \Delta^2 \text{ط}^2 = 0$$

۲۷۔ ثابت کرو کہ وہ شرط کہ ایک ایسا مسدس میں = ۰ میں کھینچا جاسکے جس کے متصلہ راسوں کا ہر زوج میں = ۰ کے لحاظ سے مزدوج ہو یہ ہے کہ

$$\text{ط}^2 = \Delta^2 \text{ط}^2 - (\Delta^2 \Delta^2 \text{ط}^2)$$

اس لیے ثابت کرو کہ ایک ایسے مسدس کو ایک مخروطی کے مرتب دائرہ میں کھینچا جاسکتا ہے کہ اس کے متصلہ راسوں کا ہر زوج مخروطی کے لحاظ سے مزدوج ہو۔

متفرق مثالیں

(۲۳۶)

۱۔ ثابت کرو کہ ایک ثابت دائرہ اور مستقل نصف قطر کے ایک متغیر دائرہ کا بنیادی محور ایک مکانی کولف کرتا ہے جبکہ متغیر دائرہ کا مرکز ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر رہے۔

۲۔ ایک ثابت دائرہ کی مسادات

$$لا + ا^۲ + ۲ لا ما جم سہ + ۲ ک لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

ہے اور ایک دائرہ لا = ۰ اور ما = ۰ کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان دو دائروں کا بنیادی محور مکافیوں

$$(لا \pm ما) + ۲ ک لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتا ہے۔

۳۔ اگر ایک مثلث ف ق س کو ایک مکانی میں کھینچا جائے اور اس کے دو ضلع دیے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ف ق س کے ہندسی مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$۱ لا + ۲ ب ما - ۴ (ب + ۱) ج لا - (ب + ۱) ج = ۰$$

کے چار وتر ایسے ہیں جن کے محاذی نقطہ (۰، ۰) پر قائمہ زاویہ بنتا ہے اور نیز یہ وتر دائرہ لا + ما - ۲ ج لا = ۰ کو مس کرتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ یہ چار خط ایک مربع بناتے ہیں۔

۵۔ اگر ایک مکانی کے نقطوں ف، ق، س پر کے عماد نقطہ

پر ملیں تو وہ خط جو ل کو ف، ق، س پر کے مماسوں سے بنے ہوئے

مثلث کے مرکز عمودی سے ملاتا ہے مکانی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۶۔ اگر ایک مکانی کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ہم نقطہ ہوں تو اس مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی 'ج'، 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے مماسوں سے بنے ایک ثابت مکانی پر ہوں گے۔

۷۔ ایک مخروطی کے مرتب دائرہ کے کسی نقطہ سے اس نقطہ کے قطبی (بلحاظ مخروطی) پر عمود کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق ایک ہم ماسکی مخروطی ہے۔

۸۔ ایک خود قطبی مثلث کے راسوں سے دائرہ لا، ما، ل = ا کے (۴۳۷) مماس کھینچے گئے ہیں جن کے طول ت، ت، ت ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \quad ت_۱ ت_۲ ت_۳ + ت_۱ ت_۲ + ت_۱ ت_۳ + ت_۲ ت_۳ = ۰$$

۲ = Δ جہاں Δ سے مثلث کا رقبہ تعبیر کیا گیا ہے۔

۹۔ 'ف'، 'ق'، 'س' پر ایک مثلث ہے جو ما، ل = ا کے لیے خود قطبی ہے اور 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے گزرتے ہوئے قطر مقابل کے ضلعوں سے علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'س' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$۲ = Δ + ۱ \times ف \times ق \times ق \times ق \times ر = ۰$$

۱۰۔ اگر ایک مثلث کے راس (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) ہوں

اور مثلث، لا، ما، ل = ا کے لیے خود قطبی ہو تو ثابت کرو کہ

$$۲ = \frac{\Delta}{۲} + \left(۱ - \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲}\right) \left(۱ - \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲}\right) \left(۱ - \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲}\right) = ۰$$

۱۱۔ اگر ایک نقطہ و کے فاصلے تین ناہم خط نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' سے عہ، عہ، عہ ہوں تو و سے دائرہ ا ب ج کے مماس و ت کا طول

$$۱۶ \text{ و ت } (۵ \text{ ا ب ج}) + \begin{vmatrix} ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} =$$

سے حاصل ہوگا۔

۱۲۔ اگر $۲-۱۱=۰$ کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد نقطہ (ع'، 'ب') پر ملیں تو اس مثلث کا حاطہ دائرہ جو 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماسوں سے بنے مساوات

$$۲-۱۱=۰ \text{ (ع'، 'ب') } ۲-۱۱=۰$$

سے حاصل ہوگا۔ نیز دائرہ کا قطر اس فاصلہ کے مساوی ہوگا جو ماسکہ اور عمادوں کے نقطہ تقاطع کے درمیان ہے۔
۱۳۔ اگر ایک مثلث ایک مکانی کے لیے خود قلمی ہو تو اس کا حاطہ مرکز مرتب پر ہوگا۔

۱۴۔ اگر ایک مکانی کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد نقطہ ہوں تو اس مثلث کا نو نقطہ دائرہ جو 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماسوں سے بنے مکانی کے راس میں سے گزرے گا۔

۱۵۔ ایک مکانی کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماس مثلث 'ف'، 'ق'، 'س' بناتے ہیں اور مثلثوں 'ف'، 'ق'، 'س' اور 'ف'، 'ق'، 'س' کے مرکز ہندسی 'گ'، 'گ' ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر 'گ' کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو 'گ' کا طریق ایک مکانی ہوگا اور یہ کہ اگر 'گ' کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو 'گ' کا طریق ایک مکانی ہوگا۔

۱۶۔ ع سے جو ایک ناقص کے کسی نقطہ 'ف' پر کا مرکز انحناء ہے دوسرے عماد 'ع'، 'ق'، 'س' سے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق'، 'س' اور 'ف' پر کے عماد کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

۱۷۔ اگر ایک ناقص کام مرکز ایک اندرونی مثلث کا مرکز عمودی ہو تو مثلث کے راسوں پر کے عماد ہم نقطہ ہوں گے۔

۱۸۔ مخروطیوں $۴\lambda + ۲\alpha + ۶\lambda - ۴\alpha = ۰$ اور $۴\lambda + ۲\alpha + ۳\lambda - ۲\alpha = ۰$ کی مساواتیں ان کے مشترک خود قطبی مثلث کے حوالے سے معلوم کرو۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ مساواتوں

$\lambda = ۲ + ۲$ ب ت + ج، $\lambda = ۲ + ۲$ ت ب + ج، $\lambda = ۲ + ۲$ ج ب + ت سے جہاں ت متغیر ہے ایک مکانی حاصل ہوتا ہے اور اس کے مرتبہ کی مساوات

$$\lambda + \lambda = \lambda = ج - ب + ۲ + ۲ ج - ب$$

ہے۔

۲۰۔ اگر ایک مخروطی دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے تو دے ہوئے نقطوں پر کے مماس ایک یا دو سرے ثابت خط مستقیم پر متقاطع ہوں گے۔

۲۱۔ اگر چار دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق ج = ۰ ہو تو اس نظام کے تمام مخروطیوں کے لیے ج پر کے کسی نقطہ کے قطبی متوازی خطوط مستقیم ہوں گے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کے لحاظ سے ان تمام مخروطیوں کے مکانی جو اس نقطہ میں سے گزریں اور جن کا دائرہ انحناء اس نقطہ پر وہی ہو مساوی مکانی ہیں۔

۲۳۔ اگر $\lambda = ۴\lambda - ۲\alpha = ۰$ میں کھینچے ہوئے ایک مثلث کا مرکز ہیسی ثابت نقطہ (ف، گ) پر ہو تو ثابت کرو کہ اس مثلث کے ضلع مکانی $(۲ + ۳\lambda) = ۱۶\lambda - ۲\alpha - ۲\alpha + ۱۸\lambda$

کو مس کریں گے۔

۲۴۔ ایک مثلث کو $\lambda + ۲\alpha - ۲\alpha = ۰$ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا

مرکز عمودی نقطہ (د.) پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے ضلع ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں جس کے ماسکے مثلث کا حائط مرکز اور مرکز عمودی ہیں اور جس کا اندامی دائرہ مثلث کا نو نقطہی دائرہ ہے (یہ دائرہ مثلث کے تمام ممکن محلوں کے لیے وہی ہے)۔

۲۵۔ اگر ایک مثلث کو ایک دائرہ میں اور ایک مکافی کے گرد کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مکافی کے محور پر عمود ہے۔

۲۶۔ ایک ناقص کے ان نیم قطروں کے مربعوں کا مجموعہ جو ایک اندرونی مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہوں اور ناقص کے مرکز سے مثلث کے حائط دائرہ کے تماس کا مربع نیم محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتے ہیں۔

۲۷۔ اگر دو مخروطی 'س' 'س' چار نقطوں پر جو 'س' کے مزدوج قطروں کے سروں پر ہیں متقاطع ہوں تو چار مشترک تماس 'س' کو مزدوج قطروں کے سروں پر مس کریں گے۔

۲۸۔ اگر ایک مثلث کے دور اس ایک ناقص پر ہوں اور تین ضلع دے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو تیسرا اس ایک مخروطی مرہم کرے گا۔

۲۹۔ خط $لا + م + ا = ۰$ پر کے کسی نقطہ 'ف' سے قائم زائد $۲ لا - ج = ۰$ کے تماس 'ق' 'ف' سے کھینچے گئے ہیں اور دائرہ 'ف' 'ق' سے زائد کو مکرر نقطوں 'ق' 'س' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ق' سے مکافی

$$(ل + م) (لا + ا) = (ل + لا + م + ا)$$

کو مس کرتے ہیں۔

۳۰۔ اگر ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کے تماس 'ف' 'ت' 'ق'

ہوں اور مثلث ت ف ق کا مرکز عمودی ناقص پر ہو تو ثابت کرو کہ
ت مخروطی

$$ا' لا + ب' ما = (ا' + ب' ا')$$

پر ہوگا۔

۳۱ — ثابت کرو کہ اس مکانی کی مسادات جو چار خطوط

$$ولا \pm ب = ا' ، لا \pm ب = ما = ا$$

کو مس کرتا ہے

$$(ا' ب' - ا' ب') = ما = ا' و (ا' - ا') \{ لا (ا' ب' - ا' ب') + ب' ا' - ب' ا' \}$$

ہے۔

۳۲ — ایک ایسے نقطہ کا طریق جس کے محدود

$$لا = ا' ت + ب' ت + ج' ، ما = ا' ت + ب' ت + ج' ت + ج'$$

سے حاصل ہوں جہاں ت ایک متغیر بدل ہے ایک مکانی ہوگا جس کا
وتر خاص

$$\frac{(ا' ب' - ا' ب')}{(ا' + ا')}$$

ہوگا۔

۳۳ — ایک مثلث کو عہ بہ = جہ میں کھینچا گیا ہے اور اس کے
دو ضلع عہ + بہ = ک جہ کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع
(ک عہ - بہ) (ک بہ - عہ) = جہ

کو مس کرتا ہے۔

۳۴ — ایک خط مستقیم پر تین ثابت نقطے و، و، و ہیں اور (۲۲۰)
ف ایک دیے ہوئے مخروطی پر کوئی نقطہ ہے۔ ف و مخروطی کو

مکرر ق پر ق و مخرومی کو س بر اور سا و مخرومی کو س پر قطع کرتا ہے۔
ثابت کرو کہ فن سی خط و وس پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے
گزرتا ہے۔

۲۱ ۲۰ ۱۹ ۱۸ ۱۷ ۱۶ ۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

۳۵۔ اُن قائم زائدوں کے مرکبوں کا طریق من کے محور $\frac{r}{a} + \frac{r}{b} = 1$

کے محوروں کے متوازی ہیں اور جو ناقص کے ساتھ دوسرے رتبہ کا شماس رکھتے ہیں مساوات

$$\frac{r}{r}(r_b + r_j) = \frac{1}{r}(r_b r) + \frac{1}{r}(r_j r)$$

سے حاصل ہوگا۔

۳۶۔ اُن قائم زائدوں کے مرکبوں کا طریق جن کے محور محدودوں کے

مخوروں کے متوازی ہیں اور جو مکافی ما۔ ۴ و لا = کے ساتھ دوسرے
رتبہ کا تماس رکھتے ہیں مساوات

$$(12+0)r = 12 \text{ hr}$$

سے حاصل ہوگا۔

۳۷۔ اگر ایک مخروطی کے لحاظ سے مزدوج نقطوں کے چار دیے

ہوئے زوج ف اور ف، ق اور ق، س اور س، س اور س
ہوں تو ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۳۸۔ اگر ایک مخروطی کے لحاظ سے دے ہوئے مزدوج خطوں کے

چاند زوج لی اور لی، ہم اور م، ن اور ن، ف اور ف ہوں
تو ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طلق ایک مخروطی ہے۔

۳۹۔ ایک مخروطی کے نقطہ ف پر کاغذ محوروں کو نقطوں

گ، گ پر قطع کرتا ہے اور گ گ کا نقطہ وسطی و ہے۔ ثابت کرو کہ
تین دیگر نقطوں ق، ق، س پر کے عماد و پرمیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ
ق، س، س، اس مثلث کے راس ہیں جو ناقص میں اعظم رقبہ کا

۴۴۔ اب ج د ع ف ایک مدس ہے جو مخروطی میں اور مخروطی میں کے گرد کھینچا گیا ہے۔ خطوط ا و ب و وغیرہ جو کسی نقطہ و میں سے کھینچے گئے ہیں اس کو کمر نقطوں (ا ب ج د وغیرہ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مدس اب ج د ع ف میں ایک مخروطی کھینچا جاسکتا ہے۔

۴۵۔ ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہے، یہ مخروطی
ایسا ہے کہ نقاط a ، b ، c کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
اس کا مرکز ایک کعبی سطح پر واقع ہے جو (a, b, c) ، مرکز ہندسی گ
مرکز عمودی و نقاط (a, b, c) ، نقطہ (a, b, c) اور (a, b, c)
ب و ج و کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔

۴۶۔ ایک مخروطی 'ب' 'ج' میں سے گذرتا ہے اور 'ا' 'ب' 'ج' پر کے عماد ہم نقطہ ہیں۔ اگر یہ مخروطی متوازی خطوط مستقیم کا ایک زوج نہ ہو تو ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک کعبی سطح پر واقع ہے جو 'ا' 'ب' 'ج' میں سے گذرتا ہے اور نیز 'ا' 'ب' 'ج' کے مرکز ہندی اور ان دائروں کے مرکزوں میں سے گذرتا ہے جو 'ا' 'ب' 'ج' کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

۴۷۔ ایک ایسے دائرہ کے مرکز کے طریق کی مساوات معلوم کرو جو تین دیے ہوئے دائروں کو مساوی زاویوں پر قطع کرے اور ثابت کرو کہ یہ طریق ایک خط مستقیم ہے جو ان تین دائروں کے بنیادی مرکز میں سے گزرتا ہے۔

۴۸۔ اگر ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے ماس ایک نقطہ و پر جو ثابت نقطہ 'ف' پر کے عماد پر ہے، میں تو ثابت کر دکھ مثلث کے مرکز ہندسی، رابطہ مرکز، اور مرکز عمودی کے طریق نقطہ و کے مختلف محلوں کے لیے خطوط مستقیم ہیں۔

۴۹ — اگر ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} - ۱ = ۰$ کا ایک وتر ف ق (۴۴۲)

ہم ماسکی ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} - ۱ = ۰$ کو مس کرے توف پر کا
ماس ق پر کے عماد سے ناقص

$$\frac{\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} - ۱}{۱} = \frac{\{ب + (ب - لا)\} + \{ب + (ب - ما)\}}{۱}$$

پر ملے گا۔

۵۰ — ایک ناقص کے چار نقطوں ا، ب، ج، د پر کے
عماد ایک نقطہ ف پر ملتے ہیں اور دائروں ب ج د، ج د ا،
د ا ب، ا ب ج کے مرکز ا، ب، ج، د ہیں۔ ثابت کرو کہ
ا، ب، ج، د میں سے گزرنے والے وہ خط جو ا، ب، ج، د
پر کے عمادوں کے متوازی ہیں ف میں سے گزرنے والے قطر پر ایک
نقطہ پر ملیں گے۔

۵۱ — اگر قائم زائد لا ما۔ ۱ = ۰ کے وتر ف ق کا وسطی نقطہ
(لا، ما) ہو تو وتر ف ق اور ف ق پر کے ماس سکانی

$$۲ = \left| \frac{لا}{ب} \right| + \left| \frac{ما}{ب} \right|$$

کو مس کریں گے۔

۵۲ — اگر مثلث ا ب ج کے راس (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما)

ہوں اور مثلث ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} - ۱ = ۰$ کے لیے خود قطبی ہو تو
نقطے ا، ب، ج، قائم زائد

ثابت کرو کہ دو سر امتقارب ایک ثابت مکانی کو جو مثلث (ج) کے ضلعوں کو مس کرتا ہے مس کرے گا اور اس کا محور دی ہوئی سمت میں ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

۵۸۔ ایک دے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی میں سے دو دو کو تین خطوط مستقیم سے ملایا گیا ہے۔ کسی مخروطی کے لحاظ سے جو مثلث میں کھینچا گیا ہے ان خطوط مستقیم کے قطب لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان قطبوں سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ مستقل ہے۔

۵۹۔ ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے نقطوں عہ 'بہ' جبہ پر کے عمادوں سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ

$$\frac{(لا - ب) مس}{ب} = \frac{۱}{۲} (ب - ج) مس + \frac{۱}{۲} (ج - ع) مس = \frac{۱}{۲} (ب - ج) مس$$

ہوگا۔

۶۰۔ اگر $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے نقطوں 'ف' 'ق' 'س' کے عماد ناقص پر نقطہ (لا، ما) پر ملیں تو دائرہ 'ف' 'ق' 'س' کی مساوات

$$لا + ما - \frac{ب}{۲} = لا - \frac{لا}{ب} - با - \frac{لا}{ب} - ب = ۰$$

ہوگی۔

۶۱۔ اگر $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز$ جم طہ کے نقطوں عہ 'بہ' جبہ 'ضہ' پر کے عماد جم نقطہ ہوں تو

$$مس \frac{۱}{۲} عہ مس \frac{۱}{۲} بہ مس \frac{۱}{۲} جہ مس \frac{۱}{۲} ضہ = (1 + \frac{ز}{ر}) = ۰$$

۶۲۔ ایک مخروطی جو تین دے ہوئے نقطوں میں سے کھینچا گیا ہے ایک دے ہوئے مخروطی کو نقطوں 'ف' 'ق' 'س' میں پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ 'ف' 'ق' ایک دے ہوئے نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'س' میں ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔

۶۳۔ ایک دے ہوئے مخروطی پر دو ثابت نقطے 'ف' 'ق' لیے گئے ہیں اور ایک ثابت خط مستقیم پر 'س' کوئی نقطہ ہے۔ خطوط 'ف' 'س' 'ق' میں مخروطی کو مکرر 'ف' 'ق' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔

۶۴۔ ایک دے ہوئے نقطہ 'ف' سے ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک دے ہوئے نظام کے کسی مخروطی کے ماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جو 'ف' اور ان دو نقاط 'ماس' میں سے گذرتا ہے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۶۵۔ اگر کسی نقطہ سے ایک ناقص کے ماس 'ت' 'ف' 'ق' کھینچے جائیں تو دو طرف 'ق' اور 'ف' 'ق' پر کے عماد ایک مکانی کو جو ناقص کے محوروں کو مس کرتا ہے 'س' کرینگے۔ (۴۴۴)

۶۶۔ ایک دے ہوئے ناقص کے نقطہ 'ف' پر کے ماس پر مرکز سے عمود کھینچا گیا ہے جس کا پائین ما ہے اور ما کو ماس کے قرار دیکر ایک مکانی کھینچا گیا ہے جو ناقص کے محوروں کو مس کرتا ہے۔ اگر 'ف' اور ما میں سے گذرتا ہو کوئی دائرہ کھینچا جائے جو ناقص کو 'ق' 'س' میں پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ مثلث 'ق' 'س' کے ضلع مکانی کو مس کرینگے اور 'ق' 'س' پر کے عماد اس عماد پر متقاطع ہوں گے جو 'ف' میں سے گذرتا ہو قطر کے دوسرے سرے پر کھینچا گیا ہو۔

۶۷۔ اگر ایک دائرہ پر چار نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہوں اور دائرہ کا مرکز ہو تو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق اسی نظام کے مخروطیوں کے (و سے کھینچے ہوئے) عمادوں کے

(۴۴۵)

نقطہ تقاطع 'ف'، 'ج' اور 'ب' د کا ق'، 'د' اور 'ب' ج کا س' ہے۔
 ۷۲۔ اگر نقطے ('ف'، 'گ'، 'ه'، 'و') دائری ہوں تو ان نقطوں کا
 مرکز ہندسی نقطہی دائرہ پر ہوگا۔

۷۳۔ ایک مثلث کے تین عمودوں ('د'، 'ب'، 'ع'، 'ج'، 'ف'، 'پ')
 تین نقطے 'ف'، 'ق'، 'س' ایسے لیے گئے ہیں کہ

ا ف : ا د = ب ق : ب ع = ج کا : ج ف = لہ : ل ا :
 اور 'ف'، 'ق'، 'س' سے نامتناظر ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ
 ان عمودوں کے چھ بائین ایک دائرہ پر واقع ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ (۱)
 لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے دائروں کا لفاف ایک محزوطی ہے جو حائل
 دائرہ کے ساتھ دو ہر اتنا مس رکھتا ہے، اور (۲) دائروں کے مرکز و کا
 طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۷۴۔ ثابت کرو کہ $\sqrt{ا ا} + \sqrt{م م} + \sqrt{ن ن} = ۰$ کا نصف

قطر اخذ اُس نقطہ پر جہاں وہ ع = ۰ کو مس کرتا ہے

$$\frac{۱۶ \sqrt{ا ا} + ۱۶ \sqrt{م م} + ۱۶ \sqrt{ن ن}}{۳(\sqrt{ا ا} + \sqrt{م م} + \sqrt{ن ن})}$$

ہے۔

۷۵۔ اگر دو ہم باسکی محزوطی ایسے ہوں کہ ایک میں ایسے
 مثلث کھینچے جا سکیں جن کے ضلع دوسرے کو مس کریں تو مثلث کا
 گہر مستقل ہوگا۔

۷۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کا اندرونی دائرہ اور نو نقطہی دائرہ
 ایک دوسرے کو اُس قائم زائد کے مرکز پر مس کرتے ہیں جو مثلث کو
 حائل کرتا ہے اور اندرونی مرکز میں سے گزرتا ہے۔

۷۷۔ ایک مثلث

$$۱۱ + ۱۲ - ۱۳ = ۰$$

کو حائل کرتا ہے اور اس کام کے عمودی نقطہ (۰، ۱) پر ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کا اس مخروطی

$$r_j - j r = b_j + u_j r + (r - j) u$$

پرواقع ہے۔

$$= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}$$

مرکز ہندسی نقطہ $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے ضلع
مخروطی

$$= \left(\frac{r_k}{r_b} + \frac{r_{ll}}{r_j} \right) \left(1 - \frac{r_k}{r_b} + \frac{r_{\infty}}{r_j} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{r_k}{r_b} + \frac{r_{\infty}}{r_j} \right)$$

کو مس کرتے ہیں۔

۹۔ ایک مثلث $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} - 1 = 0$ کو حائط کرتا ہے (۴۴۶)

اور اس کا مرکز ہندسی نقطہ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (ک) پر ہے۔ ثابت کرو کہ
اس کے راس مخروطی

$$r = \left(\frac{100 - 10}{100} \right) + \left(\frac{100 - 10}{100} \right) + \left(\frac{100 - 10}{100} \right)$$

پر ہیں —

۸۰۔ ایک مثلث کو ایک مکافی میں اور ایک مخروطی کے گرد کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی کا طریق عام طور پر ایک مکافی ہوگا، لیکن یہ طریق ایک خط مستقیم ہوگا اگر دیا ہوا مخروطی ایک

مکافی ہو۔
۸۱۔ مخروطی ایسے چار دے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں کہ ان میں سے دو کو ملانے والا خط دوسرے دو کو ملانے والے خط سے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے متقاربوں کا لٹا ایک مکافی ہے۔

۸۲۔ مخروطی ایسے چار دے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں کہ ان میں سے دو کو ملانے والا خط دوسرے دو کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے محور ایک مکافی کو لف کرتے ہیں۔

۸۳۔ اگر ایک چار ضلعی کے ضلع ایک دائرہ کو مس کریں تو ان مخروطیوں کے محور جو اس چار ضلعی میں کھینچے جائیں ایک مکافی کو لف کریں گے۔

۸۴۔ اگر مثلث $\Delta B C$ کو مخروطی $\frac{L}{P} + \frac{M}{Q} = 1$ ۔

میں کھینچا جائے اور ضلع $B C$ ، $\Delta A B C$ ، $\Delta A B C$ ، مخروطی $\frac{L}{P} + \frac{M}{Q} = 1$ ۔ کو نقطوں A ، B ، C پر مس کریں تو A ، B ، C اور $\Delta A B C$ ، مخروطی

$\Delta A B C$ پر ایک نقطہ پر ملیں گے۔
۸۵۔ مثلث $\Delta B C$ کو مخروطی

$$\frac{L}{P} + \frac{M}{Q} = 1$$

میں کھینچا گیا ہے اور ضلع $B C$ ، $\Delta A B C$ ، اور $\Delta A B C$ ، مخروطی

$\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$ ۔ کو 'ا' ب 'ج' پر مس کرتے ہیں۔ حسب ذیل مسئلے ثابت کرو:

(۱) 'ا' ب 'ج' پر کے عماد مخروطی
 $لا^۲ + لا^۲ = (ا - ب)^۲$

برایک نقطہ میں ملیں گے۔
 (۲) 'ا' ب 'ج' پر کے عماد مخروطی
 $لا^۲ + لا^۲ = (ا - ب)^۲$
 برایک نقطہ میں ملیں گے۔

(۳) 'ا' ب 'ج' کا مرکز عمودی مخروطی
 $لا^۲ + لا^۲ = (ا - ب)^۲$

(۴۴)

پہر ہوگا۔
 (۴) مثلث 'ا' ب 'ج' کا مائٹ مرکز مخروطی

$لا^۲ + لا^۲ = (ا - ب)^۲$

پہر ہوگا۔

۸۶۔ اگر چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد مخروطی میں اور مخروطی میں کے گرد گھمینی جاسکے تو ثابت کرو کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد میں اور میں کے گرد گھمینی جاسکتی ہے جہاں میں کے لحاظ سے میں کا قطبی نکالی میں ہے۔

۸۷۔ اگر تین مخروطی ایک نقطہ میں سے گزریں تو اس خط کا لغات ایک مخروطی ہوگا جو ان مخروطیوں کو نقطوں کے تین زوجوں میں

جو در بیج میں ہیں قطع کرتا ہے۔

۸۸۔ تین مخروطیوں س، س، س میں نقطہ و

۸۸۔ میں عربیوں کی اس سہولت سے بہت متاثر ہوں ہوں۔
مشترک ہے۔ میں اور میں کے بقیہ نقاط تقاطع 'ب' ج
ہیں، میں اور میں کے 'ل' میں، اور میں اور میں
کے 'ف' 'ق' میں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں 'ب' ج 'ف' 'ق' کا
'ل' من کے نوزلع ایک ہی مغزولی کو مس کرتے ہیں۔

۸۹ - ثابت کرو کہ اگر مخروطیوں میں =، س =، میں مشترک

دترم = ۰، ب = ۰، ایسے ہوں کہ س - س = ۰، عہ بہ تو مساوات

ک ا عہ ۲۔ ک (س + س) + ہ ۲ = ایک ایسے مخروطی کو تعبیر

کرے گی جو بس اور بس میں سے ہر ایک کے ساتھ دو ہر تاس کھیلا۔

ایک مخروطی مخروطیوں

$$= (z+1)^{r_1} z^{-r_2} + 1 \quad \therefore = (z+1)^{r_1} z^{-r_2} + 1$$

میں سے ہر ایک کے ساتھ محدود دوہرا تماس رکھتا ہے۔ اس کی عام مساوات لکھو اور ثابت کرو کہ تماس کے وتر مبداؤں میں سے گذرتے ہوئے عمودی وتر ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر $z^2 + z^{-2} = 2$ تو ایسے تمام مخروطی قائم زائید ہیں۔

۹۰۔ ثابت کرو کہ مخروطیوں میں $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ ۔

مس = لا - م ب ما = ، اور مس = لا + ما + ب = میں
ایسا رشتہ ہے کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد ایک میں گنی جاسکتی ہے، دوسرے
کے حائط کی جاسکتی ہے، اور میسرے کے لئے خود قطعی ہے۔ نیز ثابت
کرو کہ ان میں سے کسی ایک مخروطی کا ماس دوسرے دو مخروطیوں سے
موسیقی طور پر قطع ہوتا ہے، اور وہ ماس جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ سے

دوسرے دو مخروطیوں کے کھینچے گئے ہوں ایک موسیقی پنیل بناتے ہیں۔
۹۱۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$س = ع - ۲ ل + ۲ ج = ۰، س = ۲ ب - ۲ م + ۲ ج = ۰،$$

(۴۴۸)

معہ رشتہ $ل م ن + ۱ = ۰$ کے اس طرح مربوط ہیں کہ ان کو خواہ کسی ترتیب میں لیا جائے مثلثوں کی لامتناہی تعداد ایک مخروطی میں کھینچی جاسکتی ہے، دوسرے کے حائط کیجا سکتی ہے، اور تیسرے کے لیے خود قطبی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان میں سے کسی ایک مخروطی کا ماس دوسرے دو مخروطیوں سے موسیقی طور پر قطع ہوتا ہے اور وہ حامل جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ سے دوسرے دو مخروطیوں کے کھینچے گئے ہوں ایک موسیقی پنیل بناتے ہیں۔

$$۹۲۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کر دو $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰$ کے$$

ان ماسوں کو جو وتر

ل لا + م ما - ۱ = ۰ کے سروں پر کھینچے گئے ہیں مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مخروطی اور دائرہ کے تقاطع کے وتروں میں سے وہ وتر جو ماس کے وتروں کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے خط

$$لاجم ع + ماجب ع = ۰$$

کے متوازی ہو تو ماسوں کا نقطہ تقاطع مخروطی

$$\frac{لا}{۲} - ماجب ع = \frac{ما}{۲} - واجم ع = واجب ع + ماجب ع$$

پر ہو گا جو ایک قائم زائدہ دے ہوئے ناقص کے ہم ماسکی ہے۔

۹۳۔ ثابت کرو کہ $س \equiv (ا'ب'ج'ف'گ'ه')$ (لا' ما' ا'۲) کے نقطہ (لا' با) پر قریب ترین تماس کے مکانی کی مساوات
 $\Delta س + ج + ت = ۰$

سے یا

$$۰ = \Delta ۲ - ت \quad \left| \begin{array}{ccc} ۱ & ما & لا \\ ۱ & با & لا \\ ج & ف & گ \end{array} \right|$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

۹۴۔ اگر ایک مخروطی جس کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہو
 حائلہ دائرہ کے مرکز میں سے گزرے تو مخروطی کا مرتبہ دائرہ
 مثلث کے حائلہ دائرہ کو مس کرے گا۔

۹۵۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا
 جائے اور مخروطی کا مرتبہ دائرہ مثلث کے حائلہ دائرہ کو مس کرے
 تو وہ نقطہ دائرہ کو بھی مس کرے گا۔

۹۶۔ ثابت کرو کہ ہم ماسکی مخروطیوں کے چار زوج ایسے
 ہوتے ہیں کہ ہر زوج کا ایک مخروطی ایک دے ہوئے مثلث میں اور
 دوسرا اس مثلث کے گرد کھینچا جاسکتا ہے۔

۹۷۔ تین دے ہوئے نقطوں (ا'ب'ج'سے ایک دے

(۳۳۹)

ہوئے دائرہ س کے تماس (ا'ف'ب'ق'ج'س'ہیں۔
 ثابت کرو کہ (۱) اگر تین مستطیلوں ب ج x ا'ف'ج ا'د'ب'ق'
 ا ب x ج س'ہیں سے ایک دوسرے دو کے مجموعہ سے بڑا

ہو تو دائرہ (ب ج دائرہ) سے کو قطع کرے گا، (۲) اگر ان میں سے ایک مستطیل دوسرے دو کے مجموعہ کے مساوی ہو تو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں گے۔ اور (۳) اگر ان میں سے مستطیل دوسرے دو کے مجموعہ سے کم ہو تو دائروں میں کوئی نقطہ مشترک نہیں ہوں گے۔

۹۸۔ ایک چار ضلعی کو

$$س \equiv ۱ع + ۲ب + ۳ج + ۴د = ۰$$

میں کھینچا گیا ہے اور اس کے تین ضلع

$$س \equiv ۱ع + ۲د + ۳ط + ۴ج = ۰$$

کو مس کرتے ہیں، ثابت کرو کہ چوتھا ضلع

$$۱ع + ۲د + ۳ط + ۴ج = ۰$$

کو مس کرتا ہے۔

۹۹۔ ایک نقطہ سے مخروطیوں سے $س = ۰$ ، $س = ۰$ کے ماس کھینچے گئے ہیں جو متقل جلیبی نسبت لہ کی ایک پیش بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق

$$۱ع + ۲د + ۳ط + ۴ج = ۰$$

ہے۔

۱۰۰۔ ایک دے ہوئے مخروطی کی مساوات $ع = ۰$ جہ ہے۔ ثابت کرو کہ اس مخروطی کی عام مساوات جو نقطوں $ج = ۰$ ، $ع = ۰$ اور $ج = ۰$ ، $ع = ۰$ میں سے گزرتا ہے اور جو دے ہوئے مخروطی کو

نقطہ ف پرس کرتا ہے اور جس کا نصف قطر انخلاء نقطہ ف پر
دے ہوئے محروطی کے انخلاء (اُسی نقطہ ف پر) کا گنا ہے حسب
ذیل ہے:

ل (عہ بہ - جہ^۲) + (ک - ا) جہ (عہ - ۲ ل جہ + ل^۲ بہ) = ۰
نیز ثابت کرو کہ دوسرے مشترک ماسوں کے نقطہ تقاطع کا
طریق

$$عہ بہ = \left(\frac{ک - ا}{ک + ا} \right) جہ^۲$$

ہے۔

تیسری مثال

فہرست اصطلاحات

محرومی تراشیں

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
A		Co-axial circles	ہم محور دائرے
Anharmonic ratio	غیر مستقیم	Collinear	ہم خط
or cross ratio	پہلی نسبتیں	Complement	تکملہ
Areal co-ordinates	رقبہ محدد	Coneyclie points	ہم دائری نقطے
Asymptote	مقابلہ	Confocal conic	ہم فوکی محرومی
Auxiliary circle	امدادی دائرہ	Confocals	ہم فوکی
Auxiliary conic	امدادی محرومی	Conics	محرومی
Axes	محاور (واحد - محور)	Conjugate axis	مزدوج محور
C		Conoidal surface	محرومی مناسطح
Cartesian-		Co-normal points	ہم عادی نقطے
co-ordinates	کارٹیزی محدد	Co-ordinate	محدد
Centre locus	مرکز طریق	Corresponding	نظیری نقطے
Centroid	مرکز ہندسی	chords	متناظر نقطے
Circumcentre	حائط مرکز	D	
Circumscribing		Degree	درجہ
conic	حائط محرومی	Diagonal point	قطری نقطہ
Class	جماعت		

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
Director circle	مرتب دائرہ	Homogeneous equation	متجانس مساوات
Directrix	مربع (جمع - مرتبات)	Homographic	ہم رسم
Discriminant	ممیز	Hyperbola	قطع زائد
Double points or foci	دوہرے نقطے یا ماسکے	I	
E		In-centre	اندرونی مرکز
Eccentric angle	خارج المرکز زاویہ	Inscribed conic	اندرونی مخروطی
Eccentricity	خروج المرکز	Invariants	غیر متغیر
Ellipse	قطع ناقص	Involution	دریچ
Envelope	لفاف	L	
Equi-conjugate diameters	مساوی مزدوج قطار	Latus-rectum	وتر خاص
F		Limiting points	انتہائی نقطے
Foci	اسکے	Linear dimensions	خطی ابعاد
Fociod	اسکینا	Locus	طریق
G		M	
Generating line	تکوینی خط	Major axis	محور اعظم
Generator	کمون	Minor axis	محور اصغر
H		N	
Harmonically conjugate	موتیقی طور پر مزدوج	Normal	عماد
Harmonic progression	سلسلہ موتیقی	O	
		Oblique axis	اُبل محور

انگریزی	اردو	انگریزی	اردو
Origin	مبدأ	Reciprocation	مکافات
Orthogonal circles	} علی القوائم دائرے	Rectangular hyperbola	} قائم زائد
Osculating curve	نشتی منحنی	Re-entrant	متداخلہ
P		S	
Parabola	قطع مکانی	Scalar quantities	میزانی مقداریں
Pencil	پنسل	Self-Polar triangle	} خود قطبی مثلث
Polar	قطبی	Semi latus-rectum	نیم وتر خاص
Polar co-ordinates	قطبی مختد	T	
Polarity	قطبیت	Tangential equation	} مماسی مساوات
Projection	تنظیل - اظلال	Transverse axis	قاطع محور
Projective property	نظمی خواص	Triad	ثلاثیہ
Q		Trilinear co-ordinates	} سه خطی مختد
Quadrants	ربعات	V	
R		Vertex	رأس
Radical axis	بنیادی محور	Vectorial angle	سمتی زاویہ
Radius of curvature	} نصف قطر انحناء		
Radius rector	سمتی نصف قطر		
Range	سعت		
Reciprocal polar	مستکانی قطبی		

اغلاطانا

مخروطی تراشیں

صحیح	غلط	نقطہ	نقطہ	صحیح	غلط	نقطہ	نقطہ
تائم	فائم	۹	۳۸۶	(لا، با)	(لا، با)	۸	۱۰
لا	لا	۶	۳۸۸	(لب + با)	(لب + با)	۶	۱۱
دیے	دے	۱۳	۳۹۰	سا	با	۶	۱۶
ایک	ایب	۱۵	۳۹۲	گھڑی	کھڑی	۱۲	۱۸
ن ب	ن ب	۱۶	۴۰۱	محو روں	محو روں	۲	۲۳
معاول	ل	۱۶	۴۰۲	$\frac{لا - لا}{لا - لا}$	$\frac{لا - لا}{لا - لا}$	آخری سطر	۲۶
مرکز	مراکز	۱۰	۴۰۹	$\frac{لا - لا}{لا - لا}$	$\frac{لا - لا}{لا - لا}$	۶	۳۲
=	=	۳	۴۲۸	(۶، ۳)	(۶، ۳)	۱۳	۳۸
وہی	رہی	۱۳	۴۳۴	مسئلہ اخذ	مسئلہ اخذ	۱۶	۱۴۱
(عہ + بہ + جہ)	(عہ + بہ + جہ)	۲	۴۳۸	مسئلہ	مسئلہ	۶	۱۴۳
ہے	ہے	۱۶	۴۴۰	$\frac{ک}{م}$	$\frac{ک}{م}$	۱۵	۱۶۲
نقطوں	نقطوں	آخری سطر	۴۴۶	$\frac{۲۶}{ج}$	$\frac{۲۶}{ج}$	۵	۱۹۱
و	و	۲۰	۵۲۶				

صحیح	غلط	ک	ک	صحیح	غلط	ک	ک
لفاف	لفاف	۱۱	۵۹۷	مساوات	مساوت	۸	۵۵۰
لا متناہی	لا آتہا	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۶۱۰}{۶۲۳}$	=	=	۱۱	۵۵۲
د	و	۵	۶۱۹	الحاور زائد	الحاور زائد	۱۹	۵۵۵
متکافی	تکافی	۱۸	۶۲۵	ہوگا۔	ہے۔	۱۸	۵۶۱
				محور	محور	۲۲	۵۶۶
				تظلیل	تظلیل	۱۵	۵۷۸

Mr. Abdul Wahid

